

УДК 517.927.4+517.988.63

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ТРАЕКТОРИЯХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ВЫДЕЛЕННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. В. Быстрецкий

Исследованы ограниченные траектории автономной системы с выделенной положительно однородной нелинейностью, являющейся градиентом гладкой функции. Доказано существование нестационарных ограниченных траекторий, лежащих в связных компонентах множества точек, где положительно однородная функция отрицательна, и ненулевых стационарных точек в тех связных компонентах, эйлерова характеристика замыкания которых отлична от нуля. Существование нестационарных ограниченных траекторий обосновано с использованием метода Важевского, а существование стационарных точек – с помощью методов вычисления вращения конечномерных векторных полей.

DOI: 10.31857/S0374064123070130, EDN: GXBVQD

Введение. Рассмотрим автономную систему вида

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + \eta(|x(t)|)(x(t) - \nabla v(x(t))), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n -мерных векторов с вещественными координатами, $n \geq 2$, ∇v – градиент функции $v \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}^1)$, являющейся положительно однородной порядка $m > 0$, т.е. $v(\lambda y) \equiv \lambda^m v(y)$ для любых $\lambda > 0$, и $\nabla v(y) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 0.5, \\ 2(1-s), & 0.5 < s < 1, \\ 0, & s \geq 1. \end{cases}$$

При любом $y \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $\varphi(t, y)$ автономной системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, y) = y$ и определённое на наибольшем интервале $(\tau_-(y), \tau_+(y))$ изменения t . Множество $\{\varphi(t, y) : t \in (\tau_-(y), \tau_+(y))\}$ называют *траекторией решения* $\varphi(t, y)$ или *траекторией автономной системы* (1), выпущенной из точки y . Решение $\varphi(t, y)$ и его траекторию назовём *ограниченными вправо (влево)*, если скалярная функция $|\varphi(t, y)|$ ограничена на промежутке $(0, \tau_+(y))$ ($(\tau_-(y), 0)$); в этом случае $\tau_+(y) = +\infty$ (соответственно $\tau_-(y) = -\infty$). Ограниченное в обе стороны решение и его траекторию назовём просто *ограниченными*.

В статье исследованы ограниченные траектории автономной системы (1), что связано с работами [1, 2], в которых доказаны теоремы существования ограниченных решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Здесь ∇v – главная нелинейная часть, являющаяся градиентом положительно однородной функции порядка $m > 2$, f – возмущение, удовлетворяющее условию

$$|y|^{1-m} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Из результатов работы [1, теорема 5] следует, что если $\nabla v(y) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и отлично от нуля вращение $\gamma(\nabla v, S^{m-1})$ векторного поля $\nabla v : S^{m-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ на единичной сфере

$S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$, то система уравнений (2) имеет по крайней мере одно ограниченное решение при любом возмущении f , удовлетворяющем условию (3). В статье [2, с. 162] построен пример системы уравнений вида (2), имеющей нестационарные ограниченные решения при $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 0$. В связи с этими результатами авторам представляется актуальным исследование ограниченных решений системы уравнений (2) при конкретных возмущениях f , удовлетворяющих условию (3).

В настоящей работе доказано существование нестационарных ограниченных траекторий автономной системы (1), лежащих в связных компонентах непустого множества $\{y \in \mathbb{R}^n : v(y) < 0\}$. Кроме того, доказано существование ненулевых стационарных точек в тех связных компонентах, эйлерова характеристика замыкания которых отлична от нуля. Существование нестационарных ограниченных траекторий доказано с использованием метода Важевского [3, гл. 10, § 3], а существование стационарных точек обосновано с применением методов вычисления вращения конечномерных векторных полей [4, гл. 1].

1. Основные результаты. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) функция $v \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}^1)$;
- 2) существует число $m > 0$ такое, что $v(\lambda y) \equiv \lambda^m v(y)$ для любого $\lambda > 0$;
- 3) $\nabla v(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- 4) множество $\{y \in \mathbb{R}^n : v(y) < 0\}$ не пусто.

Если выполнены условия 1)–4), то имеем:

а) для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $\varphi(t, y)$, $t \in (\tau_-(y), \tau_+(y))$, автономной системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, y) = y$;

б) для функции v верна формула Эйлера $\langle \nabla v(y), y \rangle \equiv mv(y)$, где $\langle z, y \rangle = z_1 y_1 + \dots + z_n y_n$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$;

в) определено вращение $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ векторного поля $\nabla v : S^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ на S^{n-1} (другими словами, определена степень отображения $\nabla v / |\nabla v| : S^{n-1} \mapsto S^{n-1}$) (см., например, [4, с. 16]);

г) множество $\Omega_-(v) = \{y \in S^{n-1} : v(y) < 0\}$ либо совпадает с S^{n-1} , либо состоит из конечного числа связных компонент $\Omega_-^j(v)$, $j = \overline{1, p_-(v)}$, с гладкими границами, и в каждой граничной точке вектор ∇v сонаправлен с вектором внешней нормали;

д) для каждой связной компоненты $\Omega_-^j(v)$ определена эйлерова характеристика $\chi(\overline{\Omega_-^j(v)})$ её замыкания [5, с. 35–36, 410];

е) справедливо равенство $\chi(\overline{D_-^j(v)}) = \chi(\overline{\Omega_-^j(v)})$, где $\overline{D_-^j(v)}$ – замыкание области

$$D_-^j(v) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0.5 < |y| < 1, \ y/|y| \in \Omega_-^j(v)\}.$$

Далее обозначим через Ω произвольную связную компоненту множества $\Omega_-(v)$ и определим

$$D = \{y \in \mathbb{R}^n : 0.5 < |y| < 1, \ y/|y| \in \Omega\}, \quad \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = \{y : |y| = 0.5, \ y/|y| \in \Omega\}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–4). Тогда существуют множества $M_i \subset \Omega_i$, $i = 1, 2$, такие, что для любой точки $y \in M_1 \cup M_2$ выпущенная из неё траектория автономной системы (1) лежит в области D при $t \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и $\chi(\overline{\Omega}) \neq 0$, то существует стационарная точка автономной системы (1), лежащая в области D .

Таким образом, если обозначим через $p_-(v)$ число связных компонент множества $\Omega_-(v)$, то, согласно теореме 1, у автономной системы (1) ограничены по крайней мере $p_-(v)$ траекторий, выпущенных из Ω_2 , и ограничены вправо по крайней мере $p_-(v)$ траекторий, выпущенных из Ω_1 . Кроме того, согласно теореме 2, в тех областях $D_-^j(v)$, где $\chi(\overline{D_-^j(v)}) \neq 0$, имеется стационарная точка автономной системы (1).

Теорема 1 доказана с использованием метода Важевского [3, гл. 10, § 3]. Суть данного метода состоит в том, что с помощью набора функций выделяется область в фазовом пространстве, где остаются некоторые решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений при

возрастании t . В случае автономной системы (1) посредством функции v выделена область D и доказано существование траекторий, лежащих в области D при $t > 0$. В теореме 2 существование стационарной точки доказано с применением методов вычисления вращения конечномерных векторных полей [4, гл. 1], а именно, доказана формула

$$\gamma(\nabla v + f, \partial D) = -\chi(\bar{\Omega}),$$

где $f(y) = \eta(|y|)(y - \nabla v(y))$, откуда в силу условия $\chi(\bar{\Omega}) \neq 0$ и принципа ненулевого вращения [4, с. 20] следует существование стационарной точки, лежащей в области D .

2. Доказательство теоремы 1. Очевидно, что если $\Omega_-(v) = S^{n-1}$, то для любой точки $y \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выпущенная из неё траектория автономной системы (1) ограничена вправо.

Пусть $\Omega_-(v) \neq S^{n-1}$. Для любого решения $\varphi(t, y)$, $t \in (\tau_-(y), \tau_+(y))$, автономной системы (1) имеем

$$\frac{d}{dt}v(\varphi(t, y)) = (1 - \eta(|\varphi(t, y)|))|\nabla v(\varphi(t, y))|^2 + \eta(|\varphi(t, y)|)mv(\varphi(t, y)),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|\varphi(t, y)|^2 = (1 - \eta(|\varphi(t, y)|))mv(\varphi(t, y)) + \eta(|\varphi(t, y)|)|\varphi(t, y)|^2.$$

Отсюда следует:

1) если $y \in \Gamma$, где $\Gamma = \partial D \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, то $\varphi(t, y) \notin \bar{D}$ при $t \in (0, \tau_+(y))$;

2) если $y \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, то существует наибольший интервал $(0, \tau(y))$, где имеет место включение $\varphi(t, y) \in D$, $t \in (0, \tau(y))$. При этом если $\tau(y) < +\infty$, то $\varphi(\tau(y), y) \in \Gamma$. В силу непрерывной зависимости решения $\varphi(t, y)$ от y для $y \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ из малой окрестности $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ имеем $\tau(y) < +\infty$. Следовательно, каждое из множеств $\Omega_i^0 = \{y \in \Omega_i : \tau(y) < +\infty\}$, $i = 1, 2$, не пусто и состоит, по крайней мере, из p связных компонент, где p – число связных компонент границы $\partial\Omega$. Функция τ непрерывна на множестве $\Omega_1^0 \cup \Omega_2^0$.

Определим $M_i = \partial\Omega_i^0 \setminus \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$. Проверим, что $M_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$; тем самым теорема 1 будет доказана. Для определённости предположим, что $M_1 = \emptyset$. Тогда $\Omega_1^0 = \Omega_1$ и $\varphi(\tau(y), y) \in \Gamma$ для любого $y \in \Omega_1$. Функция $|\varphi(\tau(y), y)|$ непрерывна на множестве Ω_1 и принимает наименьшее значение в какой-то точке $y_0 \in \Omega_1$, так как в точках y , близких к $\partial\Omega_1$, значение $|\varphi(\tau(y), y)|$ близко к единице. Тогда, в силу непрерывной зависимости решения от начальных данных, в шаре малого радиуса с центром в точке y_0 найдётся точка z , для которой выпущенная из неё траектория, пересекая множество Ω_1 , через конечное время t_1 окажется в точке $\varphi(t_1, z) \in \Gamma$, где $|\varphi(t_1, z)| < |\varphi(\tau(y_0), y_0)|$. Пришли к противоречию. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Аналогично работе [6, лемма 2] можно построить положительно однородную порядка m функцию $v_1 \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}^1)$ такую, что v_1 совпадает с v на Ω , $\Omega_-(v_1) = \Omega$ и $\nabla v_1(y) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда имеем $\gamma(\nabla v + f, \partial D) = \gamma(\nabla v_1 + f_1, \partial D)$, где $f(y) = \eta(|y|)(y - \nabla v(y))$, $f_1(y) = \eta(|y|)(y - \nabla v_1(y))$.

Векторное поле $\nabla v_1 + f_1$ внутри сферы S^{n-1} обращается в нуль в точке 0 и, возможно, в точках области D . Поэтому, согласно свойству вращения [4, с. 16], верно равенство

$$\gamma(\nabla v_1, S^{n-1}) = \gamma(\nabla v_1 + f_1, \partial(|y| < 0.5)) + \gamma(\nabla v_1 + f_1, \partial D) = 1 + \gamma(\nabla v_1 + f_1, \partial D).$$

Следовательно,

$$\gamma(\nabla v_1, S^{n-1}) = 1 + \gamma(\nabla v + f, \partial D).$$

Применяя к функции v_1 формулу из работы [7], находим

$$\gamma(\nabla v_1, S^{n-1}) = 1 - \chi(\bar{\Omega}_-(v_1)) = 1 - \chi(\bar{\Omega}).$$

Значит, $\gamma(\nabla v + f, \partial D) = -\chi(\bar{\Omega})$. Отсюда, в силу условия $\chi(\bar{\Omega}) \neq 0$ и принципа ненулевого вращения [4, с. 20], следует существование точки из D , где векторное поле $\nabla v + f$ обращается в нуль. Данная точка является стационарной для автономной системы (1). Теорема 2 доказана.

4. Пример функции. Рассмотрим функцию вида

$$v(y) = |y|^{m+1-q} \prod_{i=1}^q (\langle c_i, y \rangle - d_i |y|), \quad (4)$$

где $m > 1$, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, q}$, $q \geq 1$. В статье [8] доказано, что для положительно однородной функции v , заданной формулой (4), условие $\nabla v(y) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ равносильно двум условиям:

A_1 : $|c_i| \neq |d_i|$, $i = \overline{1, q}$;

A_2 : при любых $i, j \in \{1, \dots, q\}$, $i \neq j$, верна импликация

$$(|c_i| > |d_i|, |c_j| > |d_j|) \implies |d_i c_j - d_j c_i| > (|c_i|^2 |c_j|^2 - \langle c_i, c_j \rangle^2)^{1/2}.$$

Множество $\Omega_-(v)$ не пусто лишь в том случае, когда не пусто множество $\{i : |c_i| > |d_i|\}$. В этом случае граница произвольной связной компоненты Ω множества $\Omega_-(v)$ состоит из конечного числа $(n-2)$ -мерных ориентируемых гладких многообразий без края, диффеоморфных S^{n-2} . Другими словами, связную компоненту Ω можно получить из S^{n-1} , удаляя какие-то k множеств, каждое из которых диффеоморфно шару $B^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| \leq 1\}$. Поэтому, зная k и воспользовавшись известными свойствами эйлеровой характеристики [5, с. 35–36, 410], находим

$$\chi(\overline{\Omega}) = \chi(S^{n-1}) - k\chi(B^{n-1}) + k\chi(S^{n-2}),$$

$$\chi(\overline{\Omega}) = 1 + (-1)^{n-1} - k + k(1 + (-1)^{n-2}) = 1 + (-1)^n(k-1).$$

Отсюда, согласно теореме 2, можно получить ответ на вопрос о существовании стационарной точки в соответствующей области D .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухамадиев Э. О построении правильной направляющей функции для системы дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 4. С. 777–779.
2. Мухамадиев Э., Наимов А.Н. Критерии существования периодических и ограниченных решений для трёхмерных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 157–172.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
5. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. М., 2014.
6. Mukhamadiev E., Naimov A.N. On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables // Iss. Anal. 2021. V. 10. № 2. P. 67–78.
7. Мухамадиев Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 596–598.
8. Мухамадиев Э., Наимов А.Н. Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2022. № 4. С. 37–48.

Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2023 г.

После доработки 06.02.2023 г.

Принята к публикации 19.05.2023 г.