

УДК 519.63+517.957

ГЛОБАЛЬНО УСТОЙЧИВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА

© 2023 г. П. П. Матус, Д. Пылак

Построены и исследованы безусловно монотонные и глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера. Показано, что при определённом выборе входных данных эти схемы наследуют главное свойство устойчивого решения дифференциальной задачи. Доказана безусловная монотонность рассматриваемых разностных схем и получена априорная оценка разностного решения в равномерной норме. Доказано устойчивое поведение разностного решения в нелинейном случае при жёстких ограничениях на входные данные. Полученные результаты обобщены на многомерные уравнения, для аппроксимации которых применяются экономичные разностные схемы.

DOI: 10.31857/S0374064123070099, EDN: GUZVVS

Введение. Популяционная модель Фишера или Колмогорова–Петровского–Пискунова [1, 2] встречается в различных задачах, например, в теории горения, в теории фазовых переходов, в физике плазмы и др. Дифференциальные свойства решения задачи Коши для уравнения данной модели изучаются в фундаментальной монографии [3, с. 465]. Указывается класс входных данных, для которых точное неотрицательное решение не превосходит единицы для любого $0 \leq t < +\infty$. Естественно для этой модели строить такие вычислительные методы, которые наследуют это свойство. В данной работе строятся и исследуются безусловно монотонные и глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера. При определённом выборе входных данных задачи эти схемы наследуют главное свойство устойчивого решения дифференциальной задачи: $0 \leq u(x, t) \leq 1$ при всех $(x, t) \in \bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}$. Устойчивое поведение разностного решения в нелинейном случае доказывается при ограничениях на входные данные $0.5 \leq u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t) \leq 1$. В п. 3 полученные результаты обобщаются на многомерное уравнение Фишера, для численного решения которого используются экономичные локально-одномерные схемы.

1. Вспомогательные результаты.

1.1. Двусторонние оценки. В дальнейшем нам понадобится нестандартный принцип максимума для общей канонической формы записи разностных схем [4, гл. IV, § 2], позволяющий устанавливать двусторонние оценки разностного решения для нелинейных задач [5]. Пусть задано начальное число точек – сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где ω_h – множество внутренних точек, γ_h – множество граничных узлов. *Окрестностью точки x* называется множество $M'(x) = M(x) \setminus x$, $M(x)$ – шаблон.

Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x, \xi)$, $F(x)$, определённые при любых $x \in \omega_h$ и принимающие вещественные значения. Для каждой точки $x \in \omega_h$ сопоставим одно и только одно уравнение вида

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (1)$$

называемое *канонической формой записи* разностной схемы. Для уравнения (1) в граничных узлах зададим условие Дирихле

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (2)$$

Отметим, что при аппроксимации граничных условий второго или третьего рода сетка может не содержать граничных узлов.

Будем предполагать выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in M'(x), \quad x \in \omega_h, \quad (3)$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in M'(x), \quad x \in \omega_h, \quad (4)$$

гарантирующих однозначную разрешимость схемы в равномерной норме.

Сформулируем утверждение, позволяющее установить двусторонние оценки сеточного решения при незнакоопределённых входных данных задачи $\mu(x)$, $F(x)$.

Лемма. Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (3), (4). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1), (2) принадлежат интервалу изменения входных данных

$$m_1 \leq y(x) \leq m_2, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

где

$$m_1 = \min \left\{ \min_{x \in \gamma_h} \mu(x), \min_{x \in \omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \right\}, \quad m_2 = \max \left\{ \max_{x \in \gamma_h} \mu(x), \max_{x \in \omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \right\}.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в работе [5].

1.2. Определение монотонности разностной схемы в нелинейном случае. В теории вычислительных методов понятие монотонности имеет большое значение, поскольку монотонность обеспечивает отсутствие нефизических осцилляций в численных расчётах. Сохранение свойства монотонности разностной схемы важно для задач с сильно меняющимися входными данными [6]. В линейном случае монотонность разностной схемы следует из положительности коэффициентов разностной схемы [6] или сеточного принципа максимума [7]. В нелинейном случае понятие монотонности несколько сложнее [8, 9]. Самое правильное и естественное определение дано в монографии [10, с. 123]. Для абстрактной задачи (1), (2) оно формулируется следующим образом. Возмущая входные данные $F(x)$, $\mu(x)$, получаем возмущённую задачу

$$A(x)\tilde{y}(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\tilde{y}(\xi) + \tilde{F}(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$\tilde{y}(x) = \tilde{\mu}(x), \quad x \in \gamma_h.$$

В соответствии с работами [8; 9; 10, с. 123] разностная схема (1), (2) называется *монотонной*, если из условий

$$\tilde{F}(x) - F(x) \geq 0, \quad x \in \omega_h, \quad \tilde{\mu}(x) - \mu(x) \geq 0, \quad x \in \gamma_h, \quad (6)$$

$$\tilde{F}(x) - F(x) \leq 0, \quad x \in \omega_h, \quad \tilde{\mu}(x) - \mu(x) \leq 0, \quad x \in \gamma_h,$$

следует выполнение соответствующих неравенств

$$\tilde{y}(x) - y(x) \geq 0, \quad (\tilde{y}(x) - y(x) \leq 0), \quad x \in \bar{\omega}_h. \quad (7)$$

1.3. Точная разностная схема. При аппроксимации нелинейного члена в уравнении Фишера будем ориентироваться на точную разностную схему [11; 12, с. 16]

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \left[\frac{1}{y_{n+1} - y_n} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{dy}{f(y)} \right]^{-1}, \quad y_0 = u_0,$$

$$y_n = y(t_n), \quad t_n \in \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots\},$$

аппроксимирующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u = u(t), \quad u(0) = u_0.$$

Следствие. Для квадратичной нелинейности $f(u) = u^2$ точная разностная схема имеет безытерационный вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = y_n y_{n+1}, \quad y_0 = u_0. \quad (8)$$

2. Разностная схема для уравнения Фишера.

2.1. Постановка задачи. Уравнение Фишера, известное также как уравнение Колмогорова–Петрова–Пискунова [1], названо в честь статистика и биолога Рональда Фишера, предложившего его в 1937 г. для описания процессов популяционной динамики [2]. Поставим для этого уравнения начальную задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1 - u), \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (10)$$

В монографии [3, с. 465] изучаются вопросы существования неотрицательных и устойчивых решений при $t \rightarrow \infty$ в виде бегущих волн. В частности, доказывается, что если входные данные задачи удовлетворяют условиями

$$0 \leq u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t) \leq 1, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (11)$$

то и для точного решения имеет место аналогичная двусторонняя оценка

$$0 \leq u(x, t) \leq 1, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (12)$$

2.2. Разностная схема и априорная оценка. На равномерной пространственно-временной сетке с постоянными по пространству и времени шагами h и τ соответственно

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau, \quad \overline{\omega}_h = \omega_h \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}, \quad \omega_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad hN = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots\} = \omega_\tau \cup \{t_0 = 0\}$$

аппроксимируем дифференциальную задачу (9), (10) неявной разностной схемой с учётом формулы (8):

$$y_t = \hat{y}_{\overline{x}x} + \lambda y(1 - \hat{y}), \quad (13)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = \hat{\mu}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{\mu}_2, \quad t \in \omega_\tau. \quad (14)$$

В работе используются стандартные обозначения теории разностных схем [4, гл. V, § 1]:

$$v = v_i^n = v(x_i, t_n), \quad \hat{v} = v_i^{n+1}, \quad v_t = (\hat{v} - v)/\tau, \quad v_{\overline{x}x} = (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)/h^2.$$

Запишем схему (13), (14) в каноническом виде (1), (2):

$$C_i^n y_i^{n+1} = A y_{i-1}^{n+1} + B y_{i+1}^{n+1} + F_i^n, \quad y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1},$$

где

$$A = B = \gamma, \quad \gamma = \tau/h^2, \quad C_i^n = 1 + 2\gamma + \lambda\tau y_i^n, \quad F_i^n = (1 + \lambda\tau)y_i^n, \quad D_i^n = 1 + \lambda\tau y_i^n.$$

Относительно входных данных предполагаем выполненными условия (11). Докажем, что и для решения разностной схемы (13), (14) при всех $(x, t) \in \overline{\omega}$ выполнен разностный аналог

дифференциального свойства решения непрерывной задачи (12). Следуя методу математической индукции, предположим, что $0 \leq y_i^n \leq 1$ для всех $i = 0, \bar{N}$. При таком предположении выполнены все условия леммы, и на основании неравенства (5) находим двустороннюю оценку

$$m_1^n \leq y_i^{n+1} \leq m_2^n, \quad (15)$$

где

$$m_1^n = \min \left\{ \min_{x \in \gamma_h} \left\{ \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1} \right\}, \min_{x \in \omega_h} \frac{(1 + \lambda\tau)y_i^n}{1 + \lambda\tau y_i^n} \right\} \geq 0,$$

$$m_2^n = \max \left\{ \max_{x \in \gamma_h} \left\{ \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1} \right\}, \max_{x \in \omega_h} \frac{(1 + \lambda\tau)y_i^n}{1 + \lambda\tau y_i^n} \right\} \leq \max \left\{ 1, \frac{1 + \lambda\tau y_i^n}{1 + \lambda\tau y_i^n} \right\} \leq 1.$$

Следовательно, оценка (15) выполнена для произвольного $n = 0, 1, \dots$. На основании данного неравенства заключаем, что

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_{\bar{C}} \leq 1, \quad \|\cdot\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |\cdot|.$$

2.3. Безусловная монотонность. Разностную схему (13), (14) будем называть *безусловно монотонной*, если она монотонна при произвольных соотношениях сеточных шагов τ и h .

Рассмотрим разностную задачу с возмущёнными входными данными

$$\tilde{y}_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \lambda \tilde{y}(1 - \hat{y}), \quad (16)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = \hat{\mu}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{\mu}_2. \quad (17)$$

Относительно возмущённых входных данных предполагаем выполненными условия (6) и (11):

$$\tilde{u}_0(x) - u_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{\mu}_k(t_{n+1}) - \mu_k(t_{n+1}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad t_{n+1} \in \omega_\tau.$$

Вычитая из уравнений (16), (17) соответствующие уравнения (13), (14), получаем задачу для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$:

$$\bar{y}_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \lambda \bar{y} - \lambda \hat{y} \bar{y} + \lambda \hat{y} \bar{y}, \quad (18)$$

$$\hat{y}_0 = \hat{\mu}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{\mu}_2, \quad \bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x). \quad (19)$$

Определим сеточные функции

$$F = (1 + \lambda\tau)\bar{y} - \lambda\tau\hat{y}\bar{y}, \quad D = 1 + \lambda\tau\hat{y} \geq 0.$$

Пусть на n -м временном слое разностное решение является монотонным в смысле (7). Докажем, что оно является монотонным и на $(n+1)$ -м временном слое. Так как сеточная функция $\hat{y}$ удовлетворяет неравенству $y^{n+1} \leq 1$, то функция $F = (1 + \lambda\tau - \lambda\tau\hat{y})\bar{y} \geq \bar{y} \geq 0$ является неотрицательной. На основании сформулированной леммы для $\bar{y}^{n+1}$ получаем неравенство

$$\bar{y}^{n+1} \geq \min \left\{ \min_{x \in \gamma_h} \{\bar{\mu}_1^{n+1}, \bar{\mu}_2^{n+1}\}, \min_{x \in \omega_h} \frac{F}{D} \right\} \geq 0.$$

Итак, мы доказали монотонность разностной схемы при произвольных соотношениях на сеточные шаги τ и h .

2.4. Глобальная устойчивость. Понятие устойчивости является составной частью корректности постановки дифференциальной или разностной задачи и в общем случае означает непрерывную зависимость решения задачи u от входных данных φ , т.е. существует такая неотрицательная функция $\rho(t)$, не зависящая от решения и входных данных, которая удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \leq \rho(t) \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_2, \quad (20)$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – некоторые нормы, $\tilde{u}$ – решение той же дифференциальной задачи с возмущёнными входными данными. Определение глобальной устойчивости даётся в работе [13].

Определение. Предположим, что решение дифференциальной или разностной задачи удовлетворяет оценке (20). Тогда задача называется *глобально устойчивой*, если $\rho(t) \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow +\infty$, и *асимптотически устойчивой*, если $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если входные данные дифференциальной задачи (9), (10) удовлетворяют условиям (11), то возникают решения типа бегущей волны [13, с. 442]

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x - ct, \quad c = 2,$$

удовлетворяющие регулярным состояниям

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 1.$$

В этой же монографии отмечается [13, с. 447], что малые возмущения могут быть неустойчивы в некоторой конечной области.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия на входные данные:

$$0.5 \leq u_0(x), \quad \mu_k(t) \leq 1, \quad k = 1, 2, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (21)$$

Тогда решение разностной задачи (13), (14) является глобально устойчивым и имеет место априорная оценка в равномерной норме для любого $t \in \overline{\omega}_\tau$:

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\|_{\overline{C}} \leq \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \left\{ \max_{k=1,2} |\tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t)|, \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{\overline{C}} \right\}. \quad (22)$$

Доказательство. Покажем, что при предположениях (21) имеют место соотношения

$$0.5 \leq y_i^n, \quad \tilde{y}_i^n \leq 1 \quad \text{для всех } i = \overline{0, N}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Докажем сначала, что справедливы нижние оценки для решения разностных задач (13), (14) и (16), (17). Действительно,

$$\frac{F_i^n}{D_i^n} = \frac{1 + \lambda\tau}{1 + \lambda\tau y_i^n} \geq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $0.5 \leq y_i^k \leq 1$ для всех $k = \overline{0, n}$, то на основании леммы для решения y_i^{n+1} справедливо неравенство

$$y_i^{n+1} \geq \min \left\{ \min_{k=1,2} \mu_k(t_{n+1}), \min_{i=1, N-1} \frac{F_i^n}{D_i^n} \right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют вывод априорной оценки (15).

Обратимся теперь к доказательству требуемого неравенства (22). Максимум модуля сеточной функции $\tilde{y} = \tilde{y} - y$ и решения задачи (18), (19) может достигаться на границе области, и тогда оценка (22) справедлива. Если же максимум достигается во внутренней точке, то на основании леммы для решения задачи (18), (19) имеет место неравенство

$$\tilde{y}_i^{n+1} \leq \max_{x \in \omega_h} \left\{ \frac{(1 + \lambda\tau) - \lambda\tau \tilde{y}}{1 + \lambda\tau \tilde{y}} \right\} \tilde{y}_i^n \leq \max_{x \in \omega_h} \frac{1 + \lambda\tau(1 - \hat{y})}{1 + \lambda\tau \tilde{y}}.$$

В силу (23) для всех i и n выполняется условие $1 - y_i^{n+1} \leq \tilde{y}_i^n$. Следовательно, из последнего неравенства находим

$$\tilde{y}_i^{n+1} \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{1 + \lambda\tau(1 - y_i^{n+1})}{1 + \lambda\tau \tilde{y}} \tilde{y}_i^n \leq \|y_i^n\|_C.$$

Итак,

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\|_C \leq \|\tilde{y}^n - y^n\|_C.$$

Объединив полученные оценки для $\tilde{y}^{n+1}$, приходим к неравенству (22). Теорема доказана.

Замечание. Полученные выше результаты обобщаются на обобщённое уравнение Фишера [3, с. 454]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 r_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \lambda(1-u)u, \quad x = (x_1, x_2).$$

Вывод основывается на том, что минимальное и максимальное значения решения не зависят как от конвективных коэффициентов $r_\alpha(x_1, x_2)$, так и от диффузионных $k_\alpha(x_1, x_2, t, u)$ [5].

3. Многомерное уравнение Фишера. Используя метод суммарной аппроксимации, можно построить экономичные аддитивные схемы для многомерного уравнения Фишера в p -мерной области $\overline{G} = G \cup \Gamma$. В данной работе ограничимся рассмотрением локально одномерной схемы [4, с. 486]. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ – точка p -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим в цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$, $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$, первую краевую задачу для p -мерного уравнения Фишера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \lambda u(1-u), \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha, \quad L_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (24)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}. \quad (25)$$

Для аппроксимации дифференциальной задачи (24), (25) будем использовать чисто неявную локально-одномерную схему вида

$$\frac{y_{i_\alpha}^{n+\alpha/p} - y_{i_\alpha}^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_{i_\alpha}^{n+\alpha/p}, \quad \alpha = \overline{1, p-1}, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad (26)$$

$$\frac{y_{i_p}^{n+1} - y_{i_p}^{n+(p-1)/p}}{\tau} = \Lambda_p y^{n+1} + \lambda y^{n+(p-1)/p} y^{n+1}, \quad \alpha = p, \quad (27)$$

с граничными и начальными условиями

$$y^{n+\alpha/p} = \mu^{n+\alpha/p} \quad \text{при} \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h. \quad (28)$$

Здесь также используются обычные обозначения теории разностных схем

$$\omega_h = \{x = (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_p h_p), \quad 0 \leq i_\alpha \leq N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, p}\},$$

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h, \quad \gamma_{h,\alpha} = \omega_h \cup \{x_\alpha = 0, l_\alpha\},$$

$$\Lambda_\alpha y = y_{\overline{x_\alpha x_\alpha}} = \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1_\alpha)} - 2y + y^{(-1_\alpha)}).$$

Кратко опишем вычислительный алгоритм, реализующий схему (26)–(28). Пусть известно y^n . Чтобы найти y^{n+1} на новом слое, мы должны решить p уравнений с краевыми условиями (28), последовательно полагая $\alpha = \overline{1, p}$. Для определения $y^{n+\alpha/p}$ получаем краевую задачу

$$A_\alpha y_{i_\alpha-1}^{n+\alpha/p} - C_{i_\alpha} y_{i_\alpha}^{n+\alpha/p} + B_{i_\alpha} y_{i_\alpha+1}^{n+\alpha/p} = -F_{i_\alpha}^{n+(\alpha-1)/p}, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$y^{n+\alpha/p} = \mu^{n+\alpha/p} \quad \text{при} \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

где

$$A_\alpha = B_\alpha = \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha = \tau/h_\alpha^2, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad C_{i_\alpha} = \begin{cases} 1 + A_\alpha + B_\alpha, & \alpha = \overline{1, p-1}, \\ 1 + A_p + B_p + \lambda \tau y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}, & \alpha = p, \end{cases}$$

$$F_{i_\alpha}^{n+(\alpha-1)/p} = \begin{cases} y_{i_\alpha}^{n+(\alpha-1)/p}, & \alpha = \overline{1, p-1}, \\ (1 + \lambda \tau) y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}, & \alpha = p. \end{cases}$$

Полагая последовательно $\alpha = \overline{1, p}$ и меняя направления прогонок, определяем $y^{n+1/p}$, $y^{n+2/p}$, ..., y^{n+1} , затратив при этом $O(1)$ операций на узел действий. Таким образом, локально-одномерная схема является экономичной. Для получения глобальных априорных оценок разностного решения, как и в одномерном случае, предположим выполнение условий вида (11), (12)

$$0 \leq \mu(x, t), u_0(x) \leq 1 \quad \text{при всех } (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (29)$$

Применив теперь лемму к разностным уравнениям (26) и (28), получим оценки

$$m_1^{n+\alpha/2} \leq y_i^{n+\alpha/p} \leq m_2^{n+\alpha/p},$$

где

$$m_1^{\alpha/p} = \min \left\{ \min_{x \in \gamma_{h,\alpha}} \mu^{n+\alpha/p}, \min_{x \in \omega_h} y^{n+(\alpha-1)/p} \right\}, \quad \alpha = \overline{1, p-1},$$

$$m_2^{\alpha/p} = \max \left\{ \max_{x \in \gamma_{h,\alpha}} \mu^{n+\alpha/p}, \max_{x \in \omega_h} y^{n+(\alpha-1)/p} \right\}, \quad \alpha = \overline{1, p-1}.$$

Следуя методу математической индукции, предположим, что $\|y^k\|_{\overline{C}} \leq 1$ для всех $k = \overline{0, n}$. Здесь $\|y^n\|_{\overline{C}} = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |y(x, t_n)|$. Тогда из неравенств (29) находим $0 \leq y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p} \leq 1$ для всех i_α .

Обратимся теперь к разностному уравнению (20). Снова применяя лемму, получаем неравенство

$$y_i^{n+1} \leq \max \left\{ \max_{\alpha=\overline{1,p}} \max_{x \in \gamma_h} \mu^{n+\alpha/p}, \max_{x \in \omega_h} \frac{(1 + \lambda \tau) y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}}{1 + \lambda \tau y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}} \right\} \leq \max \left\{ 1, \frac{1 + \lambda \tau y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}}{1 + \lambda \tau y_{i_\alpha}^{n+(p-1)/p}} \right\} \leq 1.$$

Это завершает доказательство того факта, что при выполнении условий (29) решение разностной задачи унаследует свойство глобальной ограниченности решения дифференциальной задачи и при всех $0 \leq t < +\infty$ имеет место неравенство $\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|y(t)\| \leq 1$. Как и в одномерном случае, решение разностной задачи при выполнении условий

$$0.5 \leq \mu(x, t), u_0(x) \leq 1 \quad \text{при всех } (x, t) \in \overline{Q}_T$$

является глобально устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. Московского гос. ун-та. Секция А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–25.
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Hum. Genetic. 1937. V. 7. № 4. P. 353–369.
3. Murray J.D. Mathematical Biology: an Introduction. Berlin, 2001.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.

5. *Matus P., Hieu L.M., Vulkov L.G.* Analysis of second order difference schemes on nonuniform grids for quasilinear parabolic equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2017. V. 310. P. 186–199.
6. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
7. *Matus P.* The maximum principle and some of its applications // Comput. Methods Appl. Math. 2002. V. 2. P. 50–91.
8. *Matus P., Lemeshevsky S.* Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comput. Methods Appl. Math. 2009. V. 9. № 3. P. 253–280.
9. *Матус П.П., Утебаев Б.Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.
10. *Godlewski E., Raviart P.-A.* Hyperbolic Systems of Conservation Law. Paris, 1991.
11. *Матус П.П., Ирхин В.А., Лапиньска-Хицонович М., Лемешевский С.В.* О точных разностных схемах для гиперболических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 978–986.
12. *Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D.* Exact Finite-Difference Schemes. Berlin, 2016.
13. *Jovanovic B., Lemeshevsky S., Matus P.* On the stability of differential-operator equations and operator-difference schemes as $t \rightarrow \infty$ // Comput. Methods Appl. Math. 2002. V. 2. № 2. P. 153–170.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет имени Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию 24.03.2023 г.
После доработки 24.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.