ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 847–864

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2022. Т. 58. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064123060146, EDN: FISJXL

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) "Об оценках сверху управляющей функции в параболической задаче управления с точечным наблюдением" (17 февраля 2023 г.).

Рассматривается краевая задача для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T \equiv (0,1)\times(0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x,0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

где $a, b, h, a_t, b_x \in C(\overline{Q}_T)$, $0 < a_1 \leqslant a(x,t) \leqslant a_2 < +\infty$, $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$ и $\xi \in L_2(0,1)$. Изучается следующая задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ при фиксированных ξ и ψ, требуется сделать температуру $u(x_0,t)$ в данной точке $x_0 \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ при всех $t \in (0,T)$. Задачи управления и экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2], причём наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. Продолжая исследования [3, 4], мы получаем оценки нормы управляющей функции через значение функционала качества: ранее найдены оценки снизу [5–7], а здесь получена оценка сверху, применимая для доказательства существования решения экстремальной задачи на неограниченных множествах управлений.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $[0,T] \to L_2(0,1)$, действующее по правилу $t \mapsto u(\,\cdot\,,t)$, непрерывно [8, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – подпространство функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T) = \eta(0,t) = 0$. *Слабым решением* задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot) = \varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (au_x\eta_x - bu_x\eta - hu\eta - u\eta_t)\,dx\,dt = \int\limits_0^1 \xi\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^T a(1,t)\psi\eta(1,t)\,dt.$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Теорема 1 [7, 9]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём для некоторой константы* C_1 *(не зависящей от* φ, ψ *и* ξ*) имеет место оценка*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, а $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим функционал

$$J[z,\rho,\varphi] \equiv \int\limits_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2 \rho(t)\,dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с управляющей функцией φ, а $\rho \in L_\infty(0,T)$ – весовая функция ($\operatorname{ess}\inf\limits_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$), задающая в $L_2(0,T)$ норму $\|f\|_{L_{2,\rho}} \equiv (\int_0^T f^2(t)\rho(t)\,dt)^{1/2}$.

Теорема 2 [5–7]. *Если* $a_t(x,t) \geqslant 0$, $b_x(x,t) \geqslant h(x,t)$ *при* $(x,t) \in Q_T$, $b(x,t) \geqslant 0$ *при* $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$ $(x_0 \in (0,1])$ *и* $b(1,t) \leqslant 0$ *при* $t \in [0,T]$, *то справедливо неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi,\rho,z]/\rho_1)^{1/2} - x_0(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})/a_1.$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 при* $\psi = 0 = \xi$ *выполнена оценка*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi,\rho,z]/\rho_1)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Если* $\psi = 0 = \xi$, $\varphi = \gamma\varphi_1 + \varphi_2$, *где* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $\|\varphi_1\|_{W_2^1(0,T)} = 1$, *то имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \ ((J[z,\rho,\varphi])^{1/2} + \|u_{\varphi_2}(x_0,t)\|_{L_{2,\rho}} + \|z(x_0,\cdot)\|_{L_{2,\rho}})/\|u_{\varphi_1}(x_0,\cdot)\|_{L_{2,\rho}} + \|\varphi_2\|_{W_2^1(0,T)}.$$

Для фиксированных функций z и ρ рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi].$$

Определение. Множество $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ назовём *конечномерно аппроксимируемым*, если существуют такая конечная система функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_N \in \Phi$ и константа M, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ при некоторых $\gamma_1,\ldots,\gamma_N \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $\|\varphi - \sum_{j=1}^N \gamma_j\varphi_j\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M$.

Теорема 4. *Если множество* Φ *непусто, замкнуто, выпукло и конечномерно аппроксимируемо, то для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On properties of the control function in an control problem with a point observation for a parabolic equation // Funct. Diff. Equ. 2021. V. 28. № 3–4. P. 99–102. 7. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. С. 28–31. 8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 9. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.

М. И. Бесова (Москва) “Голоморфная регуляризация сингулярно возмущённых уравнений высшего порядка” (3 марта 2023 г.).

Одним из приоритетных направлений развития метода регуляризации С.А. Ломова [1, гл. I, § 4] является построение теории сходимости рядов (обычной, не асимптотической) по степеням малого параметра, представляющих решение сингулярно возмущённых задач. Рассмотрим семейство (с параметром $\varepsilon > 0$) задач Коши

$$\varepsilon\ddot{y} = f(t,y,\dot{y}), \quad t \in [0,T], \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad \dot{y}(0,\varepsilon) = v^0, \tag{1}$$

где функция $f(t,y,v)$ отлична от нуля внутри области $\Omega_{tyv} \subset \mathbb{R}^3$ (содержащей точку $M_0 = (0,y^0,v^0)$) и аналитична в замыкании этой области. Запишем уравнение (1) в виде системы с “медленной” и “быстрой” переменными

$$\dot{y} = v, \quad \varepsilon\dot{v} = f(t,y,v), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad v(0,\varepsilon) = v^0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Система (2) при выполнении условий теоремы Тихонова о предельном переходе [2, § 7] имеет два независимых интеграла, голоморфных в точке* $\varepsilon = 0$.

Определение. Решение $(y(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ системы (2) называется *псевдоаналитическим в точке* $\varepsilon = 0$, если для некоторой *регуляризирующей* [1, гл. 2, § 2; 3] функции $\varphi(t)$ и для любого малого $\varepsilon > 0$ на некотором отрезке $[0,T_\varepsilon]$ равномерно сходятся представляющие это решение ряды

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n Y_n(t,\varphi(t)/\varepsilon), \quad v(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V_n(t,\varphi(t)/\varepsilon). \tag{3}$$

Достаточное условие существования таких решений представляет

Теорема 2. *Если функция* $\varphi(t)$ *аналитична на отрезке* $[0,T]$, *причём* $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(t) < 0$ *при* $t \in [0,T]$ *и уравнение*

$$\dot{\varphi}(t)\int\limits_{v^0}^{v} \frac{dv_1}{f(t,y^0,v_1)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$$

имеет решение вида $v = V_0(t,y^0,v^0,\Phi(\varphi(t)/\varepsilon))$, *где* $\Phi(\eta)$ *– возрастающая на* $\mathbb{R}$ *целая функция с наименьшим (асимптотическим) значением* a, *а функция* $V_0(t,y^0,v^0,q)$ *ограничена на множестве* $T^0_{tyv} \times (a,\Phi(0)]$, *где* $T^0_{tyv} \subset \Omega_{tyv}$ *– некоторый компакт, то решение* $y(t,\varepsilon)$ *задачи (1) псевдоаналитическое в точке* $\varepsilon = 0$.

В формулах (3) члены до первого порядка включительно при $L \equiv \partial_t + v\partial_y$ имеют вид

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t) + \varepsilon\int\limits_{v^0}^{v} \frac{L(y-\overline{y}(t))\,dv_1}{f(t,y,v_1)}\Bigg|_{\substack{y=\overline{y}(t)\\ v=V_0(t,y^0,v^0,\varphi(t)/\varepsilon)}} + \ldots,$$

$$v(t,\varepsilon) = V_0(t,\varphi(t)/\varepsilon) + \varepsilon\frac{f(t,y,v)}{\varphi'(t)} \times$$

$$\times\left[\int\limits_{v^0}^{v}\left(L\int\limits_{v^0}^{v^1}\frac{\dot{\varphi}(t)\,dv_2}{f(t,y,v_2)}\right)\frac{dv_1}{f(t,y,v_1)} - \int\limits_{v^0}^{v}\frac{L(y-\overline{y}(t))\,dv_1}{f(t,y,v_1)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{v^0}^{v}\frac{\dot{\varphi}(t)\,dv_1}{f(t,y,v_1)}\right]\Bigg|_{\substack{y=\overline{y}(t)\\ v=V_0(t,y^0,v^0,\varphi(t)/\varepsilon)}} + \ldots$$

Для краевых задач применяется алгоритм псевдоаналитического продолжения [4].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

Литература. 1. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011. 2. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М., 1973. 3. Качалов В.И. Об одном методе решения сингулярно возмущённых систем тихоновского типа // Изв. вузов. Математика. 2018. № 6. С. 25–30. 4. Besova M., Kachalov V. Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 1. Art. 72.

А. В. Тюленев (Москва) "Пример невычислимых решений задачи Коши для волнового уравнения с вычислимыми начальными условиями" (3 марта 2023 г.).

При $n=2$ и $n=3$ рассматривается задача Коши для *волнового* уравнения

$$u_{tt}-\Delta u=0, \quad u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^n$, а *начальная* функция $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Решение задачи (1) понимается в обобщённом смысле (оно существует и единственно [1, § 12]) и определяется как равномерный предел последовательности решений u_k задачи (1) с начальными функциями $\varphi_k\in C^3(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющими условиям $\varphi_k\to\varphi$ и $(\varphi_k)'\to\varphi'$ равномерно по $x\in\mathbb{R}^n$ при $k\to+\infty$.

Определение 1. *Вычислимыми* называются:

1) функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (возможно, не являющаяся *тотальной*, т.е. определённой при всех $m\in\mathbb{N}$), если существует алгоритм, который её *вычисляет*, т.е. останавливается на тех и только тех $m\in\mathbb{N}$, для которых значение $f(m)$ определено, и выдаёт это значение;

2) последовательность рациональных чисел r_k, если для некоторых вычислимых тотальных функций $a,b,s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ верны равенства

$$r_k=(-1)^{s(k)}a(k)/b(k), \quad k\in\mathbb{N};$$

3) действительное число x, если для некоторых вычислимых последовательности рациональных чисел r_k и тотальной функции $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ верны оценки

$$|r_k-x|\leqslant 2^{-m}, \quad k\geqslant\beta(m), \quad m\in\mathbb{N};$$

4) последовательность действительных чисел x_m, если для некоторой вычислимой последовательности рациональных чисел r_{mk} верны оценки

$$|r_{mk}-x_m|\leqslant 2^{-k}, \quad k,m\in\mathbb{N}.$$

Определение 2. Для *вычислимого* (т.е. имеющего вычислимые границы) отрезка I функция $f:I\to\mathbb{R}$ называется *вычислимой*, если выполнены следующие условия:

1) для любой вычислимой последовательности чисел $x_m\subset I$ последовательность значений $f(x_m)$ вычислима (*секвенциальная вычислимость*);

2) для некоторой вычислимой функции $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ верны импликации

$$|x-y|\leqslant 1/\beta(m) \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leqslant 2^{-m}, \quad x,y\in I, \quad m\in\mathbb{N}$$

(*эффективная равномерная непрерывность*).

Понятия вычислимых чисел, последовательностей и функций естественным образом распространяются на многомерный случай [2, гл. 0, п. 3].

Возникает вопрос о вычислимости решения задачи (1) с вычислимой функцией φ. Известно [2, гл. 1, п. 1], что если $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^n)$, то решение (классическое) задачи (1) вычислимо в любом вычислимом параллелепипеде $[0,T]\times I^n$. В случае $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ это, вообще говоря, уже не так, а именно: при $n=3$ существует [3] вычислимая начальная функция с компактным носителем, для которой решение (уже обобщённое) u задачи (1) непрерывно, единственно и секвенциально вычислимо, но функция $u(1,\cdot)$ не вычислима. Доказательство этого результата не распространяется автоматически на меньшие размерности. Более того, при $n=1$ он уже неверен, а ответ на вопрос о его справедливости в случае $n=2$ даёт

Теорема. *Существует вычислимая функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, для которой решение u задачи (1) существует, непрерывно и секвенциально вычислимо, но функция $u(1,\cdot)$ не вычислима.*

Литература. 1. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961. 2. Pour-El M.B., Richards J.I. Computability in Analysis and Physics. Berlin; Heidelberg, 1989. 3. Pour-El M.B., Richards J.I. The wave equation with computable initial data such that its unique solution is not computable // Adv. in Math. 1981. V. 39. P. 215–239.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (10 марта 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \tag{1}$$

Положим $B_\rho = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \rho\}$ и $\rho_0 \equiv \sup\{\rho : B_\rho \subset G\}$, а через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0,x_0) = x_0$.

Определение 1. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского* или *верхнепредельного* типа (отмечается ниже индексом $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно):

1) *устойчивостью* [1, 2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t,x_0)| < \varepsilon, \quad \varliminf_{t \to +\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) *полной неустойчивостью* [1, 2], если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,\rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2) (в частности, возможно, решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$);

3) *почти устойчивостью* [2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0,\rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры (здесь и ниже – Лебега);

4) *почти полной неустойчивостью* [2], если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,\rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры;

5) *μ-устойчивостью* при данном $\mu \in [0,1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0,\rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0,\delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество *относительной* меры $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\rho)$ (т.е. долей от меры B_ρ) не меньшей μ;

6) *ν-неустойчивостью* при данном $\nu \in [0,1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,\rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0,\delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество относительной меры $\mathrm{N}_\varkappa(f,\varepsilon,\rho)$, не меньшей ν.

Корректность определения 1 обосновывает

Теорема 1. *Для любой системы (1), любого $\varepsilon > 0$ и каждого из требований (2) множества всех точек $x_0 \in G$, как удовлетворяющих этому требованию, так и не удовлетворяющих ему, измеримы.*

Правомерность следующего ниже определения 2 обеспечивает

Теорема 2. *Для любой системы (1) множество всех значений $\mu \in [0,1]$ (равно как и всех значений $\nu \in [0,1]$), для которых она обладает ляпуновской, перроновской или верхнепредельной μ-устойчивостью (соответственно, ν-неустойчивостью), заведомо содержит точку 0 и представляет собой промежуток, возможно, вырождающийся в точку.*

Определение 2. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0,1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ-устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ – нет;

б) *мерой неустойчивости* такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0,1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ система (1) обладает ν-неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ – нет.

Конкретные формулы для мер устойчивости и неустойчивости предлагает

Теорема 3. *Для каждой системы (1) однозначно определена шестёрка её ляпуновских, перроновских и верхнепредельных мер устойчивости или неустойчивости, которые соответственно задаются формулами*

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\rho\to+0} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\rho), \quad \nu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\rho\to+0} \mathrm{N}_\varkappa(f,\varepsilon,\rho), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma,$$

причём пределы в них при $\varepsilon \to +0$ могут быть заменены точной нижней или, соответственно, верхней гранью по $\varepsilon > 0$.

Набор основных соотношений, связывающих различные меры устойчивости и неустойчивости, задаёт

Теорема 4. *Для любой системы (1) выполнены неравенства*

$$0 \leqslant \mu_\lambda(f) \leqslant \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu_\pi(f) \leqslant \nu_\sigma(f) \leqslant \nu_\lambda(f) \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leqslant 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Естественную связь свойств почти устойчивости и почти полной неустойчивости с единичными значениями соответствующих мер раскрывает

Теорема 5. *Система (1) обладает почти устойчивостью или почти полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает 1-устойчивостью или, соответственно, 1-неустойчивостью этого типа, и тогда её мера устойчивости того же типа равна 1, а неустойчивости – 0, или наоборот.*

Указанная в теореме 5 логическая связь между конкретными свойствами и мерами оказывается лишь односторонней, что и подтверждает

Теорема 6. *При $n = 2$ существуют две автономные системы вида (1), не обладающие ни почти устойчивостью, ни почти полной неустойчивостью ни одного из трёх типов: у одной из них меры устойчивости или неустойчивости всех трёх типов равны соответственно 1 или 0, а у другой – наоборот.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

Е. А. Барабанов (Минск)**, В. В. Быков** (Москва) “Коэффициент неправильности Ляпунова и индекс экспоненциальной устойчивости линейной параметрической системы как вектор-функция параметра” (17 марта 2023 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}^n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, с которой мы далее отождествляем саму систему (1). Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим её показатели Ляпунова, через $\mathrm{es}\,(A)$ – её индекс экспоненциальной устойчивости (т.е. размерность линейного подпространства решений системы (1) с отрицательными показателями Ляпунова), а через $\sigma_{\text{Л}}(A)$ – коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 19], с помощью которого формулируются достаточные условия, характеризующие реакцию системы $A \in \mathcal{M}^n$ как на её линейные экспоненциально убывающие возмущения [2], так и на её нелинейные возмущения высшего порядка малости [1, с. 275].

Долгое время держалась гипотеза (основанная на результате Ляпунова об условной устойчивости по правильному первому приближению) о том, что показатели Ляпунова правильных систем не меняются при убывающих к нулю возмущениях. Однако Р.Э. Виноград привёл пример правильных систем $A, B \in \mathcal{M}^2$ (см. [3]), удовлетворяющих соотношениям

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0, \quad \lambda_1(B) = -1, \quad \lambda_2(B) = 1, \quad \lim_{t \to +\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0.$$

Поэтому индекс экспоненциальной устойчивости es, принимающий ровно $n+1$ значение, не полунепрерывен даже на множестве $\mathcal{R}^n$ правильных систем с равномерной топологией.

Для заданного метрического пространства M рассмотрим параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

для которого при каждом фиксированном $\mu \in M$ система (2) принадлежит классу $\mathcal{M}^n$ – её индекс экспоненциальной устойчивости и коэффициент неправильности Ляпунова обозначим через $\mathrm{es}\,(\mu, A)$ и $\sigma_{\text{л}}(\mu, A)$. Класс семейств (2) (отождествляемых с задающими их функциями A), непрерывных на пространстве $\mathcal{M}^n$ с компактно-открытой топологией, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а с равномерной топологией – через $\mathcal{U}^n(M)$. Введём и подкласс $\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M) \subset \mathcal{U}^n(M)$ семейств, задаваемых функциями вида $A(t,\mu) = (B(t) + Q(t,\mu))x$, где $B \in \mathcal{R}^n$, а непрерывная функция $Q : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu \in M} \|Q(t,\mu)\| \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Задача. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M дать полное дескриптивно-функциональное описание каждого из классов пар функций

$$\mathfrak{T}[\mathcal{C}^n(M)] \equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \mathrm{es}\,(\,\cdot\,,A))\colon A \in \mathcal{C}^n(M)\}, \quad \mathfrak{T}[\mathcal{U}^n(M)] \equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \mathrm{es}\,(\,\cdot\,,A))\colon A \in \mathcal{U}^n(M)\},$$
$$\mathfrak{T}[\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)] \equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \mathrm{es}\,(\,\cdot\,,A))\colon A \in \mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)\}.$$

Напомним [4, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $(*, G_\delta)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r, +\infty)\big)$ является G_δ-множеством в метрическом пространстве M. В частности, класс $(*, G_\delta)$ – собственный подкласс второго класса Бэра [4, с. 249]. Полное описание классов

$$\mathfrak{S}[\mathcal{U}^n(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A)\colon A \in \mathcal{U}^n(M)\}, \quad \mathfrak{S}[\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A)\colon A \in \mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)\}$$

заключается в следующем [5]: они совпадают и состоят из функций $M \to \mathbb{R}_+$ класса $(*, G_\delta)$, имеющих непрерывную мажоранту. Описание класса $\mathfrak{S}[\mathcal{C}^n(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A)\colon A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ вытекает из [6]: для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M он состоит из всех функций $M \to \mathbb{R}_+$ класса $(*, G_\delta)$. Это следует и из более общего результата [7] с полным описанием класса вектор-функций $\{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \sigma_{\text{п}}(\,\cdot\,,A)) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, составленных из коэффициентов неправильности Ляпунова $\sigma_{\text{л}}$ и Перрона $\sigma_{\text{п}}$ [1, с. 19]. Описание классов $\{\mathrm{es}\,(\,\cdot\,,A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ и $\{\mathrm{es}\,(\,\cdot\,,A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ получено в работе [8]: оба они состоят из функций $f\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, для которых функция $(-f)$ принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$.

Теорема 1. *Для любых $n \geqslant 1$ и метрического пространства M пара функций (σ, τ), где $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ и $\tau\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, принадлежит классу $\mathfrak{T}[\mathcal{C}^n(M)]$ тогда и только тогда, когда функции σ и $(-\tau)$ принадлежат классу $(*, G_\delta)$.*

Полностью решить поставленную выше задачу описания классов $\mathfrak{T}[\mathcal{U}^n(M)]$ и $\mathfrak{T}[\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)]$ пока не удалось. Рассмотрим упрощённый её вариант. Следуя [9], назовём *символом полной экспоненциальной неустойчивости* системы (1) величину

$$\mathrm{ti}\,(A) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1(A) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1(A) < 0. \end{cases}$$

Следующая теорема полностью описывает классы пар функций

$$\mathfrak{U}[\mathcal{U}^n(M)] \equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \mathrm{ti}\,(\,\cdot\,,A))\colon A \in \mathcal{U}^n(M)\},$$
$$\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)] \equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\,\cdot\,,A), \mathrm{ti}\,(\,\cdot\,,A))\colon A \in \mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)\}.$$

Теорема 2. *Для любых* $n \geqslant 2$ *и метрического пространства* M *справедливо равенство классов* $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^n(M)] = \mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)]$, *а пара функций* (σ, τ), *где* $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ *и* $\tau : M \to \{0,1\}$, *принадлежит этим классам тогда и только тогда, когда функции* σ *и* τ *принадлежат классу* $(*, G_\delta)$, *а функция* σ *имеет непрерывную мажоранту.*

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Богданов Ю.С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814. 3. Виноград Р.Э. Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. № 6. С. 645–650. 4. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 5. Барабанов Е.А., Быков В.В. Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1587–1599. 6. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1338. 7. Войделевич А.С. Полное описание коэффициентов неправильности Ляпунова и Перрона линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 322–327. 8. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. 9. Миллионщиков В.М. Указатели и символы условной устойчивости линейных систем // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464.

А. Н. Ветохин (Москва) "О некоторых свойствах топологической энтропии на пространстве непрерывных отображений множества Кантора" (24 марта 2023 г.).

Пусть на компактном метрическом пространстве X задано непрерывное отображение

$$f : X \to X. \tag{1}$$

Тогда, наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) \equiv \max_{0\leqslant i<n} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x,y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f^0 \equiv \mathrm{id}_X$, а если $i \in \mathbb{N}$, то f^i – i-я итерация отображения f. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше ε. *Топологическую энтропию* отображения f определяем [1] формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f,\varepsilon,n) \tag{2}$$

(отметим, что величина (2) не изменится, если в её определении метрику d заменить любой другой, задающей на X ту же, что и d, топологию).

На пространстве $C(X,X)$ непрерывных отображений (1) с равномерной метрикой

$$\rho(f,g) \equiv \max_{x\in X} d(f(x), g(x))$$

рассмотрим функцию

$$f \mapsto h_{\mathrm{top}}(f). \tag{3}$$

Известно [2, 3], что функция (3) принадлежит второму классу Бэра, а точки пространства $C(X,X)$, в которых она полунепрерывна снизу, образуют в нём всюду плотное множество типа G_δ. Кроме того [3], если X – канторово совершенное множество на отрезке $[0,1]$ (здесь и ниже – с естественной метрикой вещественной прямой), то функция (3) всюду разрывна, а полунепрерывна снизу она только в тех точках, где равна нулю. Более того [4], функция (3) не принадлежит первому классу Бэра даже на подпространстве гомеоморфизмов, удовлетворяющих условию Липшица. Точки же полунепрерывности сверху функции (3) образуют множество типа $F_{\sigma\delta}$ [3], а сужение $h_{\mathrm{top}}|_K$ на некоторое совершенное множество $K \subset C(X,X)$ не имеет таких точек совсем [5].

Рассмотрим множество *предельно реализуемых* значений топологической энтропии

$$E_h(f) \equiv \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{h_{\mathrm{top}}(g) : \rho(f,g) < 1/n\},$$

т.е. принимаемых ею при равномерно сколь угодно малых возмущениях отображения f.

Теорема 1. *Если* X *– канторово совершенное множество на отрезке* $[0,1]$, *то для любого отображения* $f \in C(X,X)$ *выполнено равенство* $E_h(f) = [0,+\infty]$.

Теорема 2. *Если* X *– канторово совершенное множество на отрезке* $[0,1]$, *то множество точек полунепрерывности сверху функции (3) совпадает с множеством тех отображений* f, *для которых* $h_{\mathrm{top}}(f) = +\infty$.

Литература. 1. Динабург Е.И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35. № 2. С. 324–366. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 4. С. 69–72. 4. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 64–67. 5. Ветохин А.Н. Пустота множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии одного семейства динамических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1152–1153.

И. Н. Сергеев, К. В. Уманский (Москва) “Совпадающие критерии ляпуновской и периодической приводимости линейной автономной системы к линейному автономному уравнению” (24 марта 2023 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и евклидова координатного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим множество $\mathcal{M}^n$ линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

задаваемых каждая своей непрерывной ограниченной матричной функцией

$$A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \|A\| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{|x|=1} |A(t)x| < +\infty,$$

с которой в дальнейшем и будем отождествлять саму систему.

Определение 1. В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим:

1) подмножество $\mathcal{C}^n$ *автономных* систем, т.е. систем $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянными коэффициентами или, что то же, задаваемых постоянными матричными функциями $A(\cdot) = \mathrm{const}$;

2) подмножество $\mathcal{E}^n$ систем, *отвечающих уравнению*, т.е. задаваемых матричными функциями A специального вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

называемого *клеткой Фробениуса* и обеспечивающего возможность однозначно записывать каждую из таких систем всего лишь одним линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка для первой координаты $y \equiv x_1$ её решения x

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с которым в дальнейшем также будем отождествлять такую систему.

Определение 2. Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^n$:

а) *ляпуновски приводима* к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует линейное невырожденное преобразование координат $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, которое, во-первых, является *ляпуновским*, т.е.

удовлетворяет условиям $L \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $\|L\| + \|L^{-1}\| + \|\dot{L}\| < +\infty$, а во-вторых, *приводит* систему A к системе

$$B(t) = A_L(t) \equiv L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

б) T*-периодически приводима* к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если она приводима к системе B некоторым периодическим преобразованием L с периодом $T > 0$.

Приводимость линейной дифференциальной системы к более простому виду с сохранением существенных свойств её решений изучалась уже давно [1, § 8; 2, гл. III, § 8]. Для приложений, в частности, интересна задача о ляпуновской приводимости системы именно к одному уравнению [3] – серьёзное продвижение в ней получено в работах [4, 5].

Однако вопрос о возможности сохранить при указанном переходе ещё и свойство автономности, при его наличии, у исходной системы оставался открытым. Известно [5], что любая система (1) ляпуновски приводима к некоторому уравнению, причём T-периодическая система T-периодически же приводима к T-периодическому уравнению, а если расширить фазовое пространство до комплексного, то к таким автономным уравнениям периодически (с произвольным периодом) приводима уже всякая автономная система (1). Вопрос о ляпуновской приводимости автономной системы (1) именно к действительному автономному уравнению оказался сложнее, хотя в маломерных случаях, т.е. при $n \leqslant 2$, он решается положительно, но в случаях большей размерности, вообще говоря, отрицательно.

Для упрощения формулировки основного результата, опирающегося на специфическое свойство жордановой нормальной формы матрицы системы, дадим следующее

Определение 3. Матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ назовём *жорданово почти парной*, если каждому её действительному собственному значению отвечает такой набор жордановых клеток, что все они, кроме, быть может, одной, разбиваются на пары клеток одинакового порядка.

Критерий приводимости автономной системы к автономному уравнению представляет

Теорема [6]. *Для любой автономной системы следующие четыре свойства равносильны:*
1) система ляпуновски приводима к автономному уравнению;
2) для некоторого $T > 0$ система T-периодически приводима к автономному уравнению;
3) для любого $T > 0$ система T-периодически приводима к автономному уравнению;
4) матрица системы жорданово почти парна.

Литература. 1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950. 2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 3. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. 2003. № 1. С. 31–62. 4. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. 5. Сергеев И.Н. О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 39–44. 6. Сергеев И.Н., Уманский К.В. Критерий ляпуновской приводимости линейной автономной дифференциальной системы к линейному автономному уравнению // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2022. № 5. С. 41–44.

И. В. Асташова, В. А. Никишов (Москва) "О продолжаемости и асимптотике решений уравнения Риккати с вещественными корнями правой части" (31 марта 2023 г.).

Уравнение Риккати с непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$y' = P(x) + Q(x)y + y^2 \tag{1}$$

изучалось в многочисленных работах (см., например, [1–3; 4, гл. XI, § 7]). Ниже предполагаем, что $Q^2 - 4P \geqslant 0$, поэтому правая часть уравнения (1) как функция от y имеет при всех $x \in \mathbb{R}$ вещественные нули $\alpha_1(x) \leqslant \alpha_2(x)$, а уравнение записывается в виде

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)), \quad -\infty < m \leqslant \alpha_1(x) \leqslant \alpha_2(x) \leqslant M < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Считаем, что либо $\alpha_1 < \alpha_2$, либо $\alpha_1 = \alpha_2$, а также всюду (за исключением теорем 2 и 3) дополнительно предполагаем, что $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(\mathbb{R})$. Исследуем продолжаемость и асимптотику решений уравнения (2) в зависимости от начальных значений и свойств функций α_1, α_2.

Лемма [5]. *Если некоторое решение уравнения (2) определено на интервале* (α, ω), *где* $\omega \leqslant +\infty$, *то существует такое решение* y_* *уравнения (2), определённое на некотором интервале* (S_*, ω), *что для любого решения* $y(\cdot)$ *уравнения (2), определённого на каком-либо интервале* (S, ω), *выполнены неравенства* $S \geqslant S_*$, $y \leqslant y_*$.

Определение 1. Решение y_* уравнения (2) из леммы выше назовём *главным на* (x_0, ω).

Определение 2. Решение y уравнения (2) назовём *стабилизирующимся* [1], если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \equiv y_+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) \equiv y_- \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Если* $Q'(x) < Q^2(x)/2 - 2P(x)$ *при* $x \geqslant x_0$, *а решение* y *уравнения (2) удовлетворяет условию* $y(x_0) \leqslant -Q(x_0)/2$, *то* $y(x) < -Q(x)/2$ *при* $x > x_0$.

Следствие. *Если* $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) \equiv \alpha(x)$ *и* $\alpha'(x) > 0$ *при* $x \geqslant x_0$, *а решение* y *уравнения (2) удовлетворяет условию* $y(x_0) \leqslant \alpha(x_0)$, *то* $y(x) < \alpha(x)$ *при* $x > x_0$.

Теорема 2. *Если решение* y *уравнения (2) определено в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, *то оно ограничено снизу при* $x \geqslant x_0$.

Теорема 3. *Если решение* y *уравнения (2) удовлетворяет условию* $y(x_0) > M$, *то при* $x > x_0$ *оно возрастает и существует такое* x^*, *что*

$$x_0 < x^* < x_0 + \frac{1}{y(x_0) - M}, \quad \lim_{x\to x^*-0} y(x) = +\infty,$$

а если – условию $y(x_0) < m$, *то при* $x < x_0$ *оно возрастает и существует такое* x_*, *что*

$$x_0 - \frac{1}{m - y(x_0)} < x_* < x_0, \quad \lim_{x\to x_*+0} y(x) = -\infty.$$

Теорема 4. *Если решения* $y_3 < y_2 < y_1$ *уравнения (2) определены в точке* x_0, *а решение* y_1 *продолжается на луч* $[x_0, +\infty)$, *то и решения* y_3, y_2 *продолжаются на тот же луч, причём на нём функция* $(y_1(x) - y_3(x))/(y_1(x) - y_2(x)) \geqslant 1$ *убывает и имеет при* $x \to +\infty$ *конечный предел, который в случае когда решение* y_1 *главное на* $(x_0, +\infty)$ *равен единице.*

Теорема 5. *Если два решения уравнения (2) определены на луче* $[x_0, +\infty)$ *и имеют разные конечные пределы при* $x \to +\infty$, *то любое решение, определённое на том же луче, также имеет конечный предел при* $x \to +\infty$.

Теорема 6. *Если решения* $y_2 < y_1$ *уравнения (2) определены на луче* $[x_0, +\infty)$ *и имеют конечные (возможно, совпадающие) пределы при* $x \to +\infty$, *то любое решение* y *со значением* $y(x_0) \leqslant y_1(x_0)$ *продолжается на тот же луч и имеет конечный предел при* $x \to +\infty$.

Теорема 7. *Если решения* $y_2 < y_1$ *уравнения (2) определены на луче* $[x_0, +\infty)$ *и имеют конечные пределы при* $x \to +\infty$, *причём решение* y_1 *главное на* $(x_0, +\infty)$, *то всякое решение* $y \neq y_1$, *определённое на* $[x_0, +\infty)$, *имеет при* $x \to +\infty$ *тот же предел, что и* y_2.

Пусть далее $\alpha_1 < \alpha_2$ и для некоторого $a > 0$ выполнены дополнительные условия

$$\lim_{x\to\pm\infty} \alpha_j(x) \equiv \alpha_j^{\pm} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha_1'(x) \neq 0 \neq \alpha_2'(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \tag{3}$$

Тогда [1] все ограниченные решения – стабилизирующиеся, а все стабилизирующиеся решения в окрестности ∞ имеют ненулевую производную и разбиваются на следующие четыре типа:

I тип: $y_- = \alpha_1^-$, $y_+ = \alpha_1^+$; II тип: $y_- = \alpha_2^-$, $y_+ = \alpha_1^+$;
III тип: $y_- = \alpha_2^-$, $y_+ = \alpha_2^+$; IV тип: $y_- = \alpha_1^-$, $y_+ = \alpha_2^+$.

Теорема 8. *Если при условиях (3) уравнение (2) имеет стабилизирующееся решение II типа, то существуют и единственны решения* y_I *и* y_{III}, *соответственно, I и III типов, причём для любого решения* y *имеем:*

1) если $y_I < y < y_{III}$, *то* y *– стабилизирующееся решение II типа;*

2) если $y > y_{III}$, то для некоторого $x^* \in \mathbb{R}$ решение y продолжаемо на луч $(-\infty, x^*)$, причём $y_- = \alpha_2^-$ и $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) = +\infty$;

3) если $y < y_I$, то для некоторого $x_* \in \mathbb{R}$ решение y продолжаемо на луч $(x_*, +\infty)$, причём $y_+ = \alpha_1^+$ и $\lim\limits_{x\to x_*+0} y(x) = -\infty$.

Теорема 9. *При условиях (3) уравнение (2) имеет стабилизирующееся решение II типа, если и только если оно имеет стабилизирующиеся решения I и III типов.*

Теорема 10. *При условиях (3) для уравнения (2) верно ровно одно из следующих взаимно исключающих друг друга утверждений:*

1) существует стабилизирующееся решение II типа;

2) существует единственное стабилизирующееся решение и оно относится к IV типу;

3) стабилизирующихся решений нет.

Замечание. Теоремы 1–3 дополняют результаты работы [2]. Более того, теорема 3 опровергает утверждение теоремы 5.7 [2, с. 150] об ограниченности решения на всей числовой прямой. Теоремы 8–10 дополняют теоремы 2.1–2.4 [1].

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Палин В.В., Радкевич Е.В. О поведении стабилизирующихся решений для уравнения Риккати // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 110–133. 2. Егоров А.И. Уравнение Риккати. М., 2001. 3. Astashova I. Remark on continuous dependence of solutions to the Riccati equation on its righthand side // Int. Workshop QUALITDE–2021. Tbilisi, Georgia, 2021. P. 1–4. 4. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York, 1964. 5. Hartman P. On an ordinary differential equation envolving a convex function // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1969. V. 146. P. 179–202.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (7 апреля 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \ni 0$ пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ и метрикой $d(\cdot,\cdot)$ рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \tag{1}$$

Через $S_*(f)$ и $S_\delta(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых решений системы (1) с начальными условиями $|x(0)| > 0$ и $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *полной неустойчивостью* [1, 2], если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| > \varepsilon \quad \text{или} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| > \varepsilon, \tag{2}$$

причём в случае $D(x) \ne \mathbb{R}_+$ требование (2) (как и (3) ниже) также считаем выполненным;

2) *глобальной неустойчивостью* [1, 2], если существует такое $\varepsilon > 0$, что любое решение $x \in S_*(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию (2);

3) *крайней неустойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1}, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1} \quad \text{или} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1}, \tag{3}$$

где для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначено

$$|x|_G \equiv \max\{|x|, d^{-1}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)\} \quad (\text{здесь } 0^{-1} \equiv +\infty, \quad +\infty^{-1} \equiv 0).$$

Для решения $x \in S_*(f)$ с ограниченной областью определения $D(x) \equiv [0,T)$, в силу асимптотической продолжаемости его графика до границы области $\mathbb{R}_+ \times G$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to T-0} |x(t)|_G = +\infty.$$

Если же, к примеру, $G = \mathbb{R}^n$, то справедливы равенства

$$|x|_{\mathbb{R}^n} = \max\{|x|, d^{-1}(x, \varnothing)\} = \max\{|x|, 0\} = |x|.$$

Из определения следует, что не только глобальная, но и крайняя неустойчивость влечёт за собой полную неустойчивость того же типа (причём ляпуновская глобальная неустойчивость даже неразличима с полной [3]), а любая верхнепредельная неустойчивость влечёт за собой одноимённую ляпуновскую, но вытекает из перроновской. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Если система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и полной неустойчивостью того же типа (и обязательно ляпуновской, причём глобальной).*

Сузив фазовую область, можно превратить полную неустойчивость в крайнюю, т.е. верна

Теорема 2. *Если система (1) обладает полной неустойчивостью какого-либо типа, то её сужение на некоторую фазовую подобласть $G' \subset G$ обладает крайней (а также глобальной) неустойчивостью всех трёх типов сразу.*

В одномерном случае полные и глобальные (одного типа), а также ляпуновские и верхнепредельные (одноимённые) неустойчивости неразличимы, поэтому из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *Если при $n = 1$ система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и глобальной неустойчивостью того же типа (и обязательно верхнепредельной).*

В автономном же случае неразличимыми являются вообще все шесть видов неустойчивости [3]: ляпуновской, перроновской и верхнепредельной – полной и глобальной.

Теорема 4. *Если автономная система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и глобальной неустойчивостью всех трёх типов сразу.*

Заключение теоремы 1 не распространяется на глобальную неустойчивость, отличную от ляпуновской, а именно, из теоремы 2 (и доказательства теоремы 1 [4]; см. её усиление в докладе [5]) следует

Теорема 5. *При $n = 2$ существует система (1), обладающая крайней неустойчивостью всех трёх типов сразу, но не обладающая ни верхнепредельной, ни перроновской глобальной неустойчивостью.*

Ни полная, ни глобальная неустойчивости не влекут за собой крайнюю, причём даже в автономном случае, как показывает

Теорема 6. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $G = \mathbb{R}^n$ существует автономная система (1), обладающая глобальной неустойчивостью всех трёх типов сразу, но не обладающая крайней неустойчивостью никакого типа.*

Наконец, верхнепредельная крайняя неустойчивость не влечёт за собой никакую перроновскую неустойчивость вообще – ни даже самую слабую, *частную*, представляющую собой отрицание *глобальной устойчивости* [2], причём даже в линейном случае, что и подтверждает

Теорема 7. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $G = \mathbb{R}^n$ существует ограниченная (на $\mathbb{R}_+$) линейная система (1), обладающая ляпуновской и верхнепредельной крайней неустойчивостью, но не обладающая частной (а тем более крайней) перроновской неустойчивостью.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831. 4. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 5. Бондарев А.А. Два примера неодномерных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 859–861.

А. А. Бондарев (Москва) “Два примера неодномерных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью” (7 апреля 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$) рассматриваем системы вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n), \quad f(t,0)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f)\subset\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) и, соответственно, удовлетворяющих начальному условию $|x(0)|\leqslant\delta$.

В дополнение к определению ляпуновской, перроновской и верхнепредельной полной, глобальной и крайней неустойчивости системы (1), содержащемуся в докладе [1], дадим

Определение [2–4]. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает *перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *глобальной устойчивостью*, если любое решение $x\in\mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty}|x(t)|=0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty}|x(t)|=0; \tag{3}$$

2) *массивной частной устойчивостью*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in\mathcal{S}_*(f)\setminus\mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию (3).

Ниже приводятся усиленные варианты первых двух результатов работы [4], а именно утверждается существование неодномерных систем (1) произвольной размерности теперь уже не только двумерных, с нулевым первым приближением, обладающих перроновскими и верхнепредельными свойствами, контрастирующими с ляпуновскими, а ещё и с ляпуновской крайней неустойчивостью. Так, в следующей теореме 1 система обладает одновременно:

– и крайней, и глобальной ляпуновской неустойчивостью (первое свойство);

– и перроновской, и верхнепредельной полной неустойчивостью (первое свойство);

– и перроновской, и верхнепредельной массивной частной устойчивостью (второе свойство).

Теорема 1. *Для каждого $n>1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и*

$$f'_x(t,0)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{4}$$

а также обладает следующими двумя свойствами:

1) все решения $x\in\mathcal{S}_1(f)$ удовлетворяют равенству

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)|=+\infty;$$

2) для всех решений $x\in\mathcal{S}_*(f)\setminus\mathcal{S}_1(f)$ верно второе (а значит, и первое) равенство (3).

В следующей теореме 2 система обладает одновременно:

– и крайней, и глобальной ляпуновской неустойчивостью (первое свойство, с учётом теоремы 1 из [1]);

– и перроновской, и верхнепредельной глобальной устойчивостью (второе свойство).

Теорема 2. *Для каждого $n>1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и (4), а также обладает следующими двумя свойствами:*

1) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что все решения $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяют неравенству

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|>\varepsilon^{-1};$$

2) для всех решений $x\in\mathcal{S}_*(f)$ верно второе (а значит, и первое) равенство (3).

Замечание. Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неодномерны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяются на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [5];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [2].

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 858–859. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578. 4. Бондарев А.А., Сергеев И.Н. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29. 5. Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

А. Х. Сташ (Майкоп) “О нулевых спектрах показателей колеблемости и вращаемости треугольных дифференциальных систем” (14 апреля 2023 г.).

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),$$

с *непрерывными* матричными функциями $A:\mathbb{R}_+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящее из *треугольных* систем, обозначим через $\mathcal{T}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A\in\tilde{\mathcal{M}}^n$ и положим $\mathcal{S}_*^n=\bigcup_{A\in\tilde{\mathcal{M}}^n}\mathcal{S}_*(A)$ (далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль).

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t>0$ и функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ – число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ – число точек её *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ – число её *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ – число её *гиперкорней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчёте каждый некратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз.

Далее для ненулевого вектора $m\in\mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x\in\mathcal{S}^n_*$ введём обозначение $\nu^\alpha(x,m,t)\equiv\nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [2, 3]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x\in\mathcal{S}^n_*$ при $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\left(\check{\nu}^\alpha_\circ(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

Определение 4 [4]. Для функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t>0$ определим функционал $\Theta(x,t)$ как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x,0)=0$, но если в некоторый момент $\tau\in[0,t]$ выполнено равенство $x(\tau)=0$, то по определению (в ущерб непрерывности) считаем $\Theta(x,t)=+\infty$.

Определение 5 [4]. Нижние (верхние) сильный и слабый показатели ориентированной вращаемости вектор-функции $x\in\mathcal{S}^n_*$ зададим соответственно формулами

$$\check{\theta}^\bullet(x)=\inf_{L\in\operatorname{End}_2\mathbb{R}^n}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\quad\left(\hat{\theta}^\bullet(x)=\inf_{L\in\operatorname{End}_2\mathbb{R}^n}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$

$$\check{\theta}^{\circ}(x)=\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\quad\left(\hat{\theta}^{\circ}(x)=\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$

где $\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n$ – подмножество множества $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2.

В тезисах доклада [5] анонсирована теорема о нулевом спектре показателей колеблемости нулей решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами. Подобный результат для показателей блуждаемости (отличных от верхнего сильного) двумерных треугольных систем с ограниченными коэффициентами установлен в статье [6], а спектры показателей вращаемости треугольных систем не исследованы вовсе.

Ниже полностью описаны спектры всех показателей колеблемости и вращаемости треугольных систем (состоящие, как оказалось, только из одного нулевого значения).

Теорема. *Для любого решения* $x\in\mathcal{S}_*(A)$ *любой системы* $A\in\mathcal{T}^n$ *верны равенства*

$$\check{\theta}^{\bullet}(x)=\hat{\theta}^{\bullet}(x)=\check{\theta}^{\circ}(x)=\hat{\theta}^{\circ}(x)=\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x)=\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x)=\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x)=\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x)=0,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}.$$

Следствие. *Спектры всех показателей ориентированной вращаемости и показателей колеблемости треугольных дифференциальных систем состоят из одного нулевого значения.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 908. 3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. 4. Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1501–1503. 5. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных систем // Мат. моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: матер. Второй междунар. конф. молодых учёных. Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г. Нальчик, 2012. С. 211–212. 6. Миценко В.В. Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 907–908.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем” (14 апреля 2023 г.).

Для заданного натурального n обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A:\mathbb{R}_+\to\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A\in\mathcal{M}^n$ и положим $\mathcal{S}^n_*\equiv\bigcup_{A\in\mathcal{M}^n}\mathcal{S}_*(A)$. Для ненулевого вектора $m\in\mathbb{R}^n$, вектор-функции $x\in\mathcal{S}^n_*$ и момента времени $t>0$ через $\nu^*(x,m,t)$ обозначим число *гиперкорней* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$: при его подсчёте каждый некратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз.

Определение 1 [1]. *Верхние сильный* и *слабый показатели колеблемости* функции $x\in\mathcal{S}^n_*$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_{\bullet}(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu(x,m,t),\quad \hat{\nu}_{\circ}(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\frac{\pi}{t}\nu(x,m,t),$$

а соответствующие *нижние* – теми же формулами с заменой в них верхних пределов нижними.

Определение 2. Множество $\mathrm{Spec}_{\varkappa}(A)$ всех значений показателя $\varkappa\colon\mathcal{S}_*(A)\to\mathbb{R}$ назовём *спектром* этого показателя системы $A\in\mathcal{M}^n$, а значение показателя $\varkappa$, принадлежащее спектру системы A, назовём:

а) *метрически существенным* [2], если оно принимается на решениях $x\in\mathcal{S}_*(A)$, начальные значения $x(0)\in\mathbb{R}^n$ которых заполняют множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) *топологически существенным* [3], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество начальных значений $x(0) \in \mathbb{R}^n$ которых, пересечённое с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Через $\operatorname{ess}\operatorname{Spec}_\varkappa(A)$ обозначим множество всех метрически и топологически существенных значений показателя $\varkappa$ для системы A.

В работе [4] доказано существование двумерной периодической системы (1), спектры показателей колеблемости нулей которой содержат любое наперёд заданное число метрически и топологически существенных значений. Известно [5], что для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная система (1) (периодическая, если все эти числа попарно соизмеримы), у которой все значения спектров показателей блуждаемости метрически существенны и заполняют в точности это множество. Оказалось, что все эти свойства переносятся и на показатели колеблемости гиперкорней.

Теорема. *Для любого конечного множества неотрицательных чисел X, содержащего нуль, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодическая, если все элементы множества X попарно соизмеримы), что при любом $\varkappa = \hat{\nu}_\bullet, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\circ, \check{\nu}_\circ$ справедливы равенства*

$$\operatorname{Spec}_\varkappa(A) = \operatorname{ess}\operatorname{Spec}_\varkappa(A) = X.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. 204. № 1. С. 119–138. 2. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1661–1662. 3. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1567–1568. 4. Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2014. Вып. 1 (133). С. 30–36. 5. Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 5. С. 14–21.

А. Е. Троскина (Кострома) “О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы” (21 апреля 2023 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \operatorname{End}\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

старший показатель Ляпунова [1, гл. 3, § 4] задаётся формулой

$$\lambda_1(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \|X_A(t,0)\|,$$

а верхние центральный и особый показатели определяются дискретным способом [2, гл. 3, § 8] соответственно как

$$\Omega(A) = \inf_{T>0} \varlimsup_{k\to+\infty} (kT)^{-1} \sum_{j=1}^{k} \ln \|X_A(jT,(j-1)T)\|, \tag{2}$$

$$\Omega^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{k\in\mathbb{N}} T^{-1} \ln \|X_A(kT,(k-1)T)\|, \tag{3}$$

где X_A – оператор Коши системы (1). Из формул (2) и (3) сразу следует, что $\Omega(A) \leqslant \Omega^0(A)$. Кроме того [2, гл. 3, §§ 7, 8], для систем с ограниченными коэффициентами справедлива цепочка неравенств

$$\lambda_1(A) \leqslant \Omega(A) \leqslant \Omega^0(A),$$

в которой любая комбинация равенств и строгих неравенств (вместо нестрогих) реализуется на некоторой ограниченной системе (1).

Теорема. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует система (1), удовлетворяющая неравенствам*

$$\Omega(A) < \Omega^0(A) < \lambda_1(A).$$

Литература. 1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

Р. Г. Алимурадов, Н. Л. Марголина, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев (Кострома) "Об отношении порядка между ляпуновским старшим, центральным и особым верхними показателями неограниченной системы" (21 апреля 2023 г.).

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \operatorname{End} \mathbb{R}^n). \tag{1}$$

В докладе [1] приведены формулы, задающие старший показатель Ляпунова и определяемые дискретно верхние центральный и особый показатели, а также приведены соотношения между этими показателями при условии ограниченности системы и установлено существование системы любой размерности вида (1) с неограниченными коэффициентами, особый показатель которой строго меньше старшего показателя Ляпунова, но больше центрального.

Теорема. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует система (1), удовлетворяющая неравенствам*

$$\Omega(A) < \lambda_1(A) < \Omega^0(A).$$

Литература. 1. Троскина А.Е. О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 863–864.