
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ЗАДАЧА О НЕИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ

© 2023 г. М. П. Галанин, А. С. Родин

Рассмотрена задача определения термомеханического состояния твэла в ядерном реакторе. Описан конечно-элементный алгоритм решения тепловой задачи совместно с задачей о механическом контакте, для выяснения основных особенностей и численного алгоритма решения которой исследована модельная одномерная задача. Построены главный член асимптотического разложения решения такой задачи и разностная схема для её решения, в том числе итерационные методы. Выполнен цикл тестовых расчётов, подтверждающих теоретические оценки. Сопоставление расчётов реальных задач с теоретическими предсказаниями показало, что алгоритм решения многомерной нелинейной задачи качественно соответствует поведению одномерных вычислений.

DOI: 10.31857/S0374064123060092, EDN: FHVDJZ

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим в многомерном пространстве конструкцию из N тел, занимающую область $G = \bigcup_{\alpha=1}^N G_{\alpha}$ с границей ∂G ($\bar{G} = G \cup \partial G$). Нас интересует температура этих тел.

Начально-краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности задана следующими соотношениями [1, с. 159]:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial t} &= (\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j})_{,i} + \phi(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in G \times (0, t_M], \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G}, \\ T(\mathbf{x}, t)|_{S_1} &= T_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_1 \subset \partial G, \quad t > 0, \\ -n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_2} &= q_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_2 \subset \partial G, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x_i – компоненты радиус-вектора $\mathbf{x}$, t – время, $T(\mathbf{x}, t)$ – температура, $T_{,j} = \partial T / \partial x_j$, $T_0(\mathbf{x})$ – начальная температура, $\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T)$ – компоненты тензора теплопроводности среды (для изотропного случая $\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T) \delta_{ij}$), $\phi(\mathbf{x}, t)$ – мощность внутренних источников (стоков) тепла, $c(\mathbf{x}, T)$ – объёмная теплоёмкость среды, $T_w(\mathbf{x}, t)$ – температура поверхности S_1 , на которой задано условие первого рода, $q_w(\mathbf{x}, t)$ – плотность теплового потока на поверхности S_2 , на которой задано условие второго рода, n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ к границе ∂G .

На поверхности S_3 заданы условия третьего рода

$$-n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_3} = \alpha(\mathbf{x}, T, \chi)(T(\mathbf{x}, t) - T_f(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, \quad t > 0, \quad (2)$$

где $\alpha(\mathbf{x}, T, \chi)$ – коэффициент теплоотдачи, $T_f(\mathbf{x}, t)$ – температура среды у поверхности S_3 .

При решении тепловой контактной задачи в качестве температуры среды $T_f(\mathbf{x}, t)$ будем рассматривать температуру в противолежащей точке $\bar{\mathbf{x}}$ соседнего контактирующего тела. Коэффициент теплоотдачи α может зависеть от ряда дополнительных параметров, обозначенных χ (в роли подобных параметров выступают величина зазора между телами, контактное давление, размер шероховатости поверхности и т.д.).

Наряду с неидеальным тепловым контактом между телами, также рассмотрим ситуацию идеального теплового контакта на поверхности, когда в противолежащих точках контактирующих поверхностей должны совпадать и температуры, и тепловые потоки [2]:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= T(\bar{\mathbf{x}}, t) = T_{\text{cont}}(\mathbf{x}, t), \\ -n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_3} &= n_i \lambda_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, T) T_{,j}|_{S_3} = q_{\text{cont}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины T_{cont} и q_{cont} в условиях (3) заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи. В случае неидеального контакта неизвестны температуры на обеих контактных поверхностях, а тепловой поток связан с температурами соотношением (2).

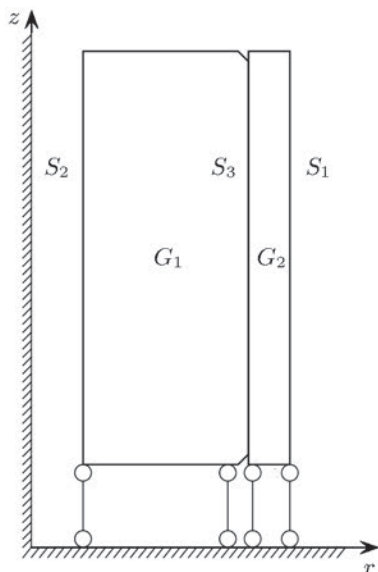


Рис. 1. Схема участка твэла с одной таблеткой.

В дальнейшем нас будет интересовать задача моделирования термомеханического состояния участка тепловыделяющего элемента (твэла). Область моделирования представляет собой участок цилиндрической оболочки G_N , внутри которой расположен столб из одинаковых цилиндрических топливных таблеток $G_1, \dots, G_{N-1}$, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Задача часто решается в осесимметричной постановке. Пример расчётной области для случая $N = 2$ (половина продольного сечения) показан на рис. 1. При моделировании твэла важную роль играет учёт тепловыделения в топливных таблетках и процесс теплообмена между таблетками и оболочкой (на рис. 1 соответствующие поверхности обозначены S_3), а также между оболочкой и теплоносителем, находящимся снаружи элемента. Теплофизические характеристики материалов топливной таблетки и оболочки существенно зависят от температуры. При определённых допущениях можно считать, что температура теплоносителя является постоянной (и известной) и совпадает с температурой внешней поверхности оболочки (обозначена S_1 на рис. 1). На других поверхностях таблеток, кроме внешней, обычно ставятся условия теплоизоляции (нулевого потока).

В начальной конфигурации твэла между таблетками и оболочкой, как правило, существует зазор. При нагревании таблетки расширяются, зазор уменьшается, а затем чаще всего происходит механический контакт между таблетками и оболочкой. Значения коэффициента теплоотдачи для случая, когда механического контакта нет, и случая, когда он есть, могут отличаться на два порядка. Поэтому тепловая и механическая задачи являются связанными и их нужно решать вместе. В данной работе основное внимание будет уделено решению тепловой задачи. Постановка механической задачи контактного взаимодействия элементов твэла и описание различных численных методов решения поставленной задачи приведены в статьях [3, 4].

Целью работы является исследование решения задачи о неидеальном тепловом контакте, разработка и применение методов её численного решения.

2. Численная модель. Для дискретизации задачи (1), (2) по пространству используем метод конечных элементов (МКЭ) [5]. Построим в расчётной области четырёхугольную сетку и каждому узлу p (в глобальной нумерации) поставим в соответствие финитную функцию N_p , $p = \overline{1, K_u}$, K_u – глобальное число узлов сетки конечно-элементной модели. Тогда температуру и её производные по координатам и времени ($\tilde{T}$, $\tilde{T}_i$, $\dot{\tilde{T}}$) на сетке можно интерполировать с помощью следующих соотношений:

$$\tilde{T} = [N]\{T\}, \quad \tilde{T}_i = [N_i]\{T\}, \quad \dot{\tilde{T}} = [N]\{\dot{T}\}.$$

Здесь $[N]$ – матрица-строка, составленная из финитных функций N_p , $p = \overline{1, K_u}$; $\{T\}$ – вектор-столбец, составленный из узловых значений температуры T_p ; $\{\dot{T}\}$ – вектор-столбец, составленный из узловых значений производных температуры по времени $\dot{T}_p$, $p = \overline{1, K_u}$.

После дискретизации по пространству задачу (1) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [5]

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{R\} \quad (4)$$

с начальным условием

$$\{T\}|_{t=0} = \{T_0\}.$$

Здесь использованы следующие стандартные обозначения [5]: $[C]$ – глобальная матрица теплоёмкости, $[K]$ – глобальная матрица теплопроводности, $\{R\}$ – глобальный вектор узловых тепловых усилий.

Для решения системы (4) выберем неявную схему дискретизации по времени:

$$[\hat{C}]\left\{\frac{\hat{T} - T}{\tau}\right\} + [\hat{K}]\{\hat{T}\} = \{\hat{R}\}, \quad (5)$$

где величины с “крышкой” относятся к новому шагу по времени, а величины без “крышки” – к предыдущему.

Система уравнений (5) является нелинейной из-за зависимости характеристик материала от температуры. Для линеаризации применим метод простой итерации [6, с. 88].

При наличии теплового контакта значения величины T_f в точках численного интегрирования поверхностного элемента соответствуют значениям температуры в противоположащих точках, относящихся к другим телам. Возможны два алгоритма учёта теплового контакта. В первом алгоритме значения T_f берутся из новой итерации, поэтому соответствующие слагаемые войдут в матрицу системы (5), при этом получается одна система линейных уравнений для всей конструкции (блоки, относящиеся к разным телам, будут взаимно связаны). Во втором алгоритме значения T_f берутся из предыдущей итерации, тогда итоговая система линейных уравнений на $(s + 1)$ -й итерации принимает вид

$$[\hat{C}]^{(s)}\left\{\frac{\hat{T}^{(s+1)} - T}{\tau}\right\} + [\hat{K}]^{(s)}\{\hat{T}\}^{(s+1)} = \{\hat{R}\}^{(s)}. \quad (6)$$

Система (6) разбивается на N независимых подсистем уравнений (для каждого тела), которые можно решать отдельно друг от друга. Для конструкций, которые включают в себя большое количество тел (например, для твэла количество топливных таблеток достигает нескольких сотен), данное свойство второго алгоритма представляется весьма перспективным, но эффективность его применения зависит от особенностей сходимости итерационного процесса.

При численном решении задачи с идеальным тепловым контактом (1), (3) можно использовать итерационные алгоритмы, являющиеся аналогами методов декомпозиции области (МДО) [7]. В МДО единое тело разбивается на ряд непересекающихся подобластей (есть варианты и для случаев пересекающихся подобластей), исходное уравнение в частных производных решается отдельно в каждой подобласти, а граничные условия на внутренних границах подобластей корректируются на каждой итерации таким образом, чтобы общее решение задачи и его производные по нормали к данным границам менялись непрерывным образом при переходе из одной подобласти в другую.

В качестве подобного метода используем аналог метода Дирихле–Неймана, который заключается в том, что на $(s + 1)$ -й итерации для пары контактирующих тел последовательно решаются следующие задачи:

а) для первого тела

$$[\hat{C}_1]^{(s)}\left\{\frac{\hat{T}_1^{(s+1)} - T_1}{\tau}\right\} + [\hat{K}_1]^{(s)}\{\hat{T}_1\}^{(s+1)} = \{\hat{R}_1\}^{(s)} \quad (7)$$

с условием, что в узлах на поверхности S_3 первого тела выполнены равенства $(\bar{T}_{2,i}^{(s)})$ – температура второго тела в точке, противоположащей узлу с номером i)

$$\hat{T}_{1,i}^{(s+1)} = \bar{T}_{2,i}^{(s)}; \quad (8)$$

б) для второго тела

$$[\hat{C}_2]^{(s)}\left\{\frac{\hat{T}_2^{(s+1)} - T_2}{\tau}\right\} + [\hat{K}_2]^{(s)}\{\hat{T}_2\}^{(s+1)} = \{\hat{R}_2\}^{(s)} + \{\hat{R}_{\text{cont}}\}^{(s+1)}, \quad (9)$$

где $\{\hat{R}_{\text{cont}}\}^{(s+1)}$ – глобальный вектор узловых контактных тепловых усилий, учитывающий интеграл от теплового потока $\hat{q}_{\text{cont}}^{(s+1)}$ по поверхностным элементам, относящимся к контактной поверхности S_3 второго тела.

В узлах численного интегрирования поверхностного элемента с номером (e) тепловой поток равен (с обратным знаком) значению теплового потока в противолежащей точке первого тела:

$$\hat{q}_{\text{cont},i}^{(e),(s+1)} = -\hat{q}_{1,i}^{(s+1)}. \quad (10)$$

Таким образом, на поверхности S_3 всегда выполнено второе условие (3), а в ходе итерационного процесса с нужной точностью достигается и выполнение первого условия (3) (равенство температур).

Аналогичный итерационный алгоритм применён в статье [2] для решения задачи об идеальном тепловом контакте между летательным аппаратом и газовой средой. В расчётах использовались линейные конечные элементы на четырёхугольной сетке.

Для изучения особенностей задачи (1), (2) рассмотрим более простую модельную задачу.

3. Модельная одномерная задача. Рассмотрим следующую одномерную задачу о теплообмене между двумя областями:

$$\begin{aligned} c_1 T_{1,t} &= \lambda_1 T_{1,xx}, & -l < x < 0, & \quad t > 0, \\ T_1(x, 0) &= T_{10}(x), & T_{1,x}(-l, t) &= 0, \\ c_2 T_{2,t} &= \lambda_2 T_{2,xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ T_2(x, 0) &= T_{20}(x), & T_{2,x}(L, t) &= 0, \\ \lambda_1 T_{1,x}(0, t) &= \lambda_2 T_{2,x}(0, t) = \alpha(T_2(0, t) - T_1(0, t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Далее участок $x \in (-l, 0)$ будем называть *областью 1*, а участок $x \in (0, L)$ – *областью 2*. Все теплофизические параметры $(c_i, \lambda_i, i = 1, 2, \alpha)$ постоянны. Делаем допущение, что коэффициент теплообмена $\alpha = 1/\varepsilon$ велик, т.е. ε мало. Все величины считаем безразмерными.

Решение задачи (11) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье в виде бесконечных рядов по системе собственных функций. Однако анализ этого решения и его применение для численного решения более сложных задач представляется затруднительным, поэтому воспользуемся асимптотическими методами [8] с учётом малости ε .

Дальнейшее изложение будем вести в основном (по возможности) в терминах задачи (11) в области 1.

Введём новые переменные:

$$\tau = t/\varepsilon^2, \quad \xi = x/\varepsilon, \quad \xi_l = (l+x)/\varepsilon, \quad \xi_L = (L-x)/\varepsilon.$$

Будем искать T_1 – часть решения задачи (11) в области 1 – в виде

$$T_1(x, t) = U_1(x, \tau) + \Pi_1(\xi, \tau) + P_1(\xi_l, \tau). \quad (12)$$

Аналогичное представление будем использовать для части решения T_2 с заменой индекса 1 на 2 и ξ_l на ξ_L .

Подставив такие решения в (11) и разделив соответствующие выражения по переменным, от которых зависят части решения (12), получим задачу

$$\begin{aligned} c_1 U_{1,\tau} &= \varepsilon^2 \lambda_1 U_{1,xx}, & -l < x < 0, & \quad \tau > 0, \\ U_1(x, 0) &= T_{10}(x); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c_1 \Pi_{1,\tau} &= \lambda_1 \Pi_{1,\xi\xi}, & -\infty < \xi < 0, & \quad \tau > 0, \\ \Pi_1(\xi, 0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\varepsilon \lambda_1 U_{1,x}(0, \tau) + \lambda_1 \Pi_{1,\xi}(0, \tau) = U_2(0, \tau) + \Pi_2(0, \tau) - U_1(0, \tau) - \Pi_1(0, \tau); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_1 P_{1,\tau} &= \lambda_1 P_{1,\xi_l \xi_l}, & 0 < \xi_l < \infty, & \quad \tau > 0, \\ P_1(\xi_l, 0) &= 0, & \varepsilon U_{1,x}(-l, \tau) + P_{1,\xi_l}(0, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Погранслойные функции Π_1 и P_1 появились в (12) вследствие необходимости обеспечить условия (11) на границах $x = -l$ и $x = 0$. Задача (14) должна решаться одновременно с соответствующей задачей в области 2, поскольку функции $\Pi_1(0, \tau)$ и $\Pi_2(0, \tau)$ фигурируют в условии теплообмена на границе $\xi = 0$.

Будем далее искать решения задач (13)–(15) в виде

$$U_1 = \sum_{i=0}^{\infty} U_1^i \varepsilon^i, \quad \Pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_1^i \varepsilon^i, \quad P_1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_1^i \varepsilon^i. \quad (16)$$

Решение в области 2 представим аналогичным образом.

Как и в работе [8], от погранслойных функций потребуем стремления к нулю на бесконечности (по ξ , ξ_l и ξ_L).

Для коэффициентов при $i = 0$ из (13)–(16) получим

$$U_1^0(x, \tau) = T_{10}(x), \quad P_1^0(\xi_l, \tau) = 0.$$

Условие на границе раздела областей 1 и 2 из (14) запишется в виде

$$\lambda_1 \Pi_{1,\xi}^0(0, \tau) = T_{20}(0) + \Pi_2^0(0, \tau) - T_{10}(0) - \Pi_1^0(0, \tau). \quad (17)$$

Аналогичное условие можно записать и для Π_2^0 .

Обе функции Π_1^0 и Π_2^0 удовлетворяют однородным уравнениям теплопроводности с нулевыми начальными условиями. Решения этих задач могут быть получены, например, с помощью преобразования Лапласа либо взяты в готовом виде из [9, с. 27]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_1^0(\xi, \tau) &= \frac{T_{20}(0) - T_{10}(0)}{1 + \kappa} \left[\operatorname{erfc} \left(-\frac{k_1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) - \exp(-\beta k_1 \xi + \beta^2 \tau) \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} - \frac{k_1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \right], \\ \Pi_2^0(\xi, \tau) &= -\kappa \frac{T_{20}(0) - T_{10}(0)}{1 + \kappa} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{k_2}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) - \exp(-\beta k_2 \xi + \beta^2 \tau) \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} + \frac{k_2}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь использованы обозначения функции из [10] и

$$\kappa = \sqrt{\frac{c_1 \lambda_1}{c_2 \lambda_2}}, \quad \beta = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{c_1 \lambda_1}}, \quad k_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Для коэффициентов при $i = 1$ из (16) получим, что $U_1^1(x, \tau) = 0$, $P_1^1(\xi_l, \tau)$ – решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечном участке. Оно определяется значением $T_{10,x}(-l)$ и может быть легко получено. Коэффициенты Π_1^1 и Π_2^1 находятся совместно из решения задач на бесконечном участке. При этом на границе областей будет выполнено условие типа (17). Решение этой задачи весьма громоздко, поэтому мы его не приводим.

Справедливо следующее

Утверждение 1. Для задачи теплообмена между двумя полубесконечными участками ($l \rightarrow +\infty$, $L \rightarrow +\infty$) с постоянными начальными данными ($T_{10}(x) = T_1^0$, $T_{20}(x) = T_2^0$) точное решение задачи (11) задаётся формулами

$$T_1(x, t) = T_1^0 + \Pi_1^0(\xi, \tau), \quad T_2(x, t) = T_2^0 + \Pi_2^0(\xi, \tau). \quad (19)$$

Как упоминалось ранее, решение задачи (11) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье в виде бесконечных рядов по системе собственных функций. Для специально подобранных начальных условий решение можно представить в компактной форме.

Утверждение 2. Для задачи (11) с начальными условиями

$$T_{10}(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega(x+l)\right), \quad T_{20}(x) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega(L-x)\right)$$

точное решение задаётся формулами

$$T_1(x, t) = A_1 e^{-\omega^2 t} \cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega(x+l)\right), \quad T_2(x, t) = A_2 e^{-\omega^2 t} \cos\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega(L-x)\right). \quad (20)$$

В (20) коэффициенты A_1 и A_2 связаны соотношением

$$A_2 = -A_1 \sqrt{\lambda_1} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega l\right) / \sin\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega L\right),$$

а ω – это решение уравнения, являющегося условием нетривиальности решения (20). Оно есть следствие подстановки (20) в граничное условие (11) в точке контакта.

Исследуем алгоритм численного решения модельной задачи, чтобы оценить его особенности. Применим метод конечных разностей [11]. Используем следующие обозначения для i -го тела [8]: τ – шаг сетки по времени, h_i – постоянный шаг пространственной сетки, $\hat{y}_{i,0}$ – значение сеточной функции для температуры в узле с номером 0, относящееся к новому временному слою, $y_{i,0}$ – аналогичное значение сеточной функции, относящееся к предыдущему временному слою. Обозначения сеточных функций и операторов соответствуют [11].

Возьмём полностью неявную разностную схему, записав её интегро-интерполяционным способом в граничных точках. Уравнения в нулевых точках областей 1 и 2 имеют вид

$$\begin{aligned} 0.5h_1 c_1 y_{1,0,t} &= \alpha(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{1,0}) - \lambda_1(\hat{y}_{1,0} - \hat{y}_{1,1})/h_1, \\ 0.5h_2 c_2 y_{2,0,t} &= -\alpha(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{1,0}) + \lambda_2(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{2,1})/h_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Справедливо следующее

Утверждение 3. Построенная разностная схема (21) удовлетворяет условиям принципа максимума [11, с. 226] со строгим диагональным преобладанием коэффициентов. Её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных.

В ситуации, когда численное решение для каждого тела находится по отдельности, необходимо проводить итерационный учёт условия неидеального теплового контакта (21). Обозначим индексом s сверху итерационные приближения для $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ на s -й итерации. Во всех уравнениях разностной схемы (21), кроме граничных условий, будем разыскивать y_1^{s+1} , y_2^{s+1} . Первое уравнение (21) заменим на следующее:

$$0.5h_1 c_1 (y_{1,0}^{s+1} - y_{1,0})/\tau = \alpha(y_{2,0}^s - y_{1,0}^{s+1}) - \lambda_1(y_{1,0}^{s+1} - y_{1,1}^{s+1})/h_1. \quad (22)$$

Аналогичным образом заменим второе уравнение в (21).

Введём обозначения:

$$\delta y_i^s = \hat{y}_i - y_i^s, \quad \|\delta y_i^s\|_c = \max_{0 \leq j \leq n_i} \{|\delta y_{i,j}^s|\}, \quad \|\delta y^s\|_c = \max\{\|\delta y_1^s\|_c, \|\delta y_2^s\|_c\}.$$

Вычитая из (21) уравнение (22) (и так же для второго тела) и поступая аналогично с другими уравнениями схемы, получаем следующее

Утверждение 4. Имеет место оценка

$$\|\delta y^{s+1}\|_c \leq q_1 \|\delta y^s\|_c, \quad q_1 = \max\left\{\frac{\alpha}{\alpha + 0.5h_1 c_1/\tau}, \frac{\alpha}{\alpha + 0.5h_2 c_2/\tau}\right\}. \quad (23)$$

Из данной оценки следует сходимость алгоритма для любых значений параметров. Однако для больших значений α сходимость будет медленной, если только τ не берётся достаточно малым.

Можно рассмотреть ситуацию, когда тепловой поток между телами в уравнении (22) полностью берётся из предыдущей итерации. Тогда (22) принимает вид (для второго тела аналогично)

$$0.5h_1c_1(\overset{s+1}{y}_{1,0} - y_{1,0})/\tau = \alpha(\overset{s}{y}_{2,0} - \overset{s}{y}_{1,0}) - \lambda_1(\overset{s+1}{y}_{1,0} - \overset{s+1}{y}_{1,1})/h_1. \quad (24)$$

Для подобного алгоритма справедливо

Утверждение 5. *Имеет место оценка*

$$\|\delta \overset{s+1}{y}\|_c \leq q_2 \|\delta \overset{s}{y}\|_c, \quad q_2 = \max \left\{ \frac{4\alpha\tau}{h_1c_1}, \frac{4\alpha\tau}{h_2c_2} \right\}. \quad (25)$$

Из этой оценки следует очень жёсткое условие на сходимость итерационного процесса ($q_2 < 1$), которое при больших значениях α , скорее всего, не позволит проводить расчёт с желаемыми значениями шагов по времени.

В [6] отмечено, что для случаев простых областей и регулярных сеток численные схемы, полученные на основе применения МКЭ, аналогичны соответствующим численным схемам, полученным на основе конечно-разностного подхода. Можно ожидать, что на качественном уровне утверждения о сходимости итерационных алгоритмов (23) и (25) будут справедливы и для конечно-элементного алгоритма, изложенного в п. 2.

4. Результаты расчётов.

4.1. Решение тестовых задач. Рассмотрим решение задачи теплообмена между одной топливной таблеткой (тело 1) и участком оболочки (тело 2), имеющим такую же высоту, что и таблетка (см. рис. 1). Считаем, что на всех участках поверхности задан нулевой поток, кроме внешней поверхности таблетки и внутренней поверхности оболочки, на которых поставлено условие теплообмена (2). Для сравнения с аналитическими решениями, полученными в п. 3, полагаем, что у таблетки нет фасок, мощность тепловыделения равна нулю, тепловые характеристики не зависят от температуры ($c_i(T) = c_i(T_0)$, $\lambda_i(T) = \lambda_i(T_0)$), коэффициент теплоотдачи является постоянным, а вся задача рассматривается в плоской постановке. С принятыми допущениями полученное численное решение не зависит от второй координаты и соответствует модельной одномерной задаче (11).

Тест 1. Выполним серию расчётов на различных сетках, чтобы исследовать поведение погрешности численного решения относительно аналитического решения, заданного в (18), (19). Значения параметров, использованных в расчётах (в безразмерных величинах): протяжённость первого тела $l = 3.0$, протяжённость второго тела $L = 0.7$, $c_1 = 2467$, $\lambda_1 = 8380$, $c_2 = 20960$, $\lambda_2 = 17600$, начальные температуры $T_0^1 = 300$, $T_0^2 = 623$. Моделировался интервал времени продолжительностью 0.02, существенно меньший, чем характерное время, за которое изменение температуры доходит от левого края оболочки до правого ($L^2c_2/\lambda_2 \approx 0.58$). Можно считать, что задача для областей конечных размеров на рассматриваемых временах соответствует задаче о теплообмене между двумя полубесконечными областями.

Были использованы сетки:

расчёт 1 ($h_1 = h_2 = 0.1$, $\tau = 10^{-3}$);

расчёт 2 ($h_1 = h_2 = 0.05$, $\tau = 2.5 \cdot 10^{-4}$);

расчёт 3 ($h_1 = h_2 = 0.025$, $\tau = 6.25 \cdot 10^{-5}$).

В табл. 1 приведены абсолютные погрешности решения в момент времени $t = 0.02$ для разных сеток и разных значений коэффициента теплоотдачи α .

Таблица 1. Погрешности численного решения. Тест 1

α	Расчёт 1 (error ₁)	Расчёт 2 (error ₂)	Расчёт 3 (error ₃)	error ₁ /error ₂	error ₂ /error ₃
$2.5 \cdot 10^4$	1.050	0.245	0.062	4.28	3.95
$2.5 \cdot 10^6$	1.502	0.330	0.085	4.54	3.88

Из приведённых в табл. 1 ошибок для разных расчётов видно, что погрешность численного решения убывает по зависимости, близкой к $O(h^2 + \tau)$. Это соответствует теоретическим представлениям о схеме с использованием линейных конечных элементов для дискретизации по пространству и схеме 1 порядка для дискретизации по времени.

Тест 2. Выполним серию расчётов на различных сетках, чтобы исследовать поведение погрешности численного решения относительно аналитического решения, заданного (20). Параметры расчётов и использованные сетки соответствуют тесту 1. В аналитическом решении выбрано значение свободного параметра $A_1 = 1$. Моделировался интервал времени продолжительностью 0.05, за это время максимальное значение температуры в областях уменьшилось примерно в 7 раз. В табл. 2 приведены абсолютные погрешности решения в момент времени $t = 0.05$ для разных сеток и разных значений α .

Из приведённых в табл. 2 соотношений ошибок для разных расчётов видно, что для значения $\alpha = 2.5 \cdot 10^4$ погрешность численного решения по-прежнему убывает по зависимости, близкой к $O(h^2 + \tau)$, но для $\alpha = 2.5 \cdot 10^6$ скорость уменьшения ошибки замедляется.

Таблица 2. Погрешности численного решения. Тест 2

α	Расчёт 1 (error ₁)	Расчёт 2 (error ₂)	Расчёт 3 (error ₃)	error ₁ /error ₂	error ₂ /error ₃
$2.5 \cdot 10^4$	$8.07 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^{-4}$	3.97	3.99
$2.5 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-3}$	2.39	1.41

Тест 3. Выполним серию расчётов, чтобы исследовать характер сходимости итерационного процесса, учитывающего условия неидеального теплового контакта между двумя телами. Считаем, что на внешней поверхности оболочки поставлено условие первого рода ($T = 623$), мощность тепловыделения в таблетке постоянна по пространству, по времени меняется по линейному закону от нуля до номинального значения за интервал времени, равный 3600, а затем остаётся постоянной. Моделировался интервал времени продолжительностью 3600. Задача решалась в осесимметричной постановке, все остальные параметры такие же, как в тесте 1.

В расчётах применялась сетка с шагами $h_1 = h_2 = 0.1$, $\tau = 360$. Для контроля сходимости использовалась оценка $\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c \leq \varepsilon_0$.

В табл. 3 приведено характерное количество итераций за один шаг по времени для различных значений ε_0 и α .

Таблица 3. Количество итераций в тепловой задаче за один шаг по времени. Тест 3

ε_0	$\alpha = 10^4$	$\alpha = 10^5$	$\alpha = 10^6$
10^{-2}	12	46	236
10^{-3}	16	66	414
10^{-4}	20	86	594

Выясним, как в проведённых расчётах при увеличении α меняется количество итераций, необходимых для уменьшения величины $\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c$ в 10 раз. Сравним полученный результат с теоретической оценкой, приведённой в (23). Согласно (23) нас интересует количество итераций k такое, что $q_1^k = 10^{-1}$, т.е. $k = -(\lg q_1)^{-1}$. Для использованных параметров задачи при увеличении коэффициента α от 10^4 до 10^5 количество итераций из оценки (23) должно возрасти примерно в 10 раз. Аналогичная ситуация наблюдается при увеличении коэффициента α от 10^5 до 10^6 . В проведённых расчётах при повышении коэффициента α от 10^4 до 10^5 количество итераций изменилось с 4 до 20, т.е. возросло в 5 раз. При изменении коэффициента α от 10^5 до 10^6 количество итераций увеличилось в 9 раз – с 20 до 180. Таким образом, на качественном уровне зависимость скорости сходимости алгоритма от коэффициента α соответствует формуле (23), полученной для тестовой одномерной задачи.

При попытке решить задачу по алгоритму, в котором тепловой поток целиком брался из предыдущей итерации (аналогично (24)), численное решение разваливалось. Это соответствует оценке сходимости (25), поскольку в таком случае коэффициент q_2 значительно больше единицы.

Если решать задачу с условием идеального теплового контакта с использованием итерационного алгоритма (7)–(10), то для достижения точности, соответствующей величине $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, требовалось 6 итераций.

В табл. 4 приведены значения следующих характеристик расчётов с неидеальным тепловым контактом (для различных α) и с идеальным тепловым контактом в момент времени $t = 3600$: температура на внешней поверхности таблетки (T_p), температура на внутренней поверхности оболочки (T_c), значение модуля теплового потока (для неидеального контакта он равен $\alpha|T_p - T_c|$). Из табл. 4 следует, что для рассмотренного интервала времени при условии неидеального теплового контакта значение теплового потока между таблеткой и оболочкой, а также значение температуры на внутренней поверхности оболочки практически не зависят от коэффициента α и отличаются от соответствующих значений, полученных для условия идеального теплового контакта, не более чем на 0.013 % (для потока) и на 0.0016 % (для температуры). В то же время температура внешней поверхности таблетки при уменьшении значения α может существенно отличаться от температуры оболочки.

Таблица 4. Результаты расчётов с неидеальными и с идеальными тепловыми контактами

Тепловой контакт	α	T_p	T_c	$ q_{\text{cont}} $
Неидеальный	10^4	884.6825	696.2676	$1.88416 \cdot 10^6$
Неидеальный	10^5	715.1190	696.2754	$1.88436 \cdot 10^6$
Неидеальный	10^6	698.1606	696.2762	$1.88438 \cdot 10^6$
Идеальный	–	696.2767	696.2767	$1.88439 \cdot 10^6$

Выполненный анализ позволяет сделать вывод, что при моделировании твэла в определённых ситуациях для больших значений коэффициента α с вычислительной точки зрения более предпочтительным является расчёт с идеальным тепловым контактом по алгоритму (7)–(10), чем расчёт с неидеальным тепловым контактом по алгоритму (5).

4.2. Результаты моделирования участка твэла. Рассмотрим решение связанной термомеханической задачи взаимодействия элементов твэла. В расчётную область (см. рис. 1) входят M топливных таблеток с фасками и находящийся напротив них участок оболочки ($N = M + 1$). Считаем, что между внешними поверхностями таблеток и внутренней поверхностью оболочки происходит теплообмен. Коэффициент теплоотдачи α зависит от величины зазора, разности температур в двух противолежащих точках, контактного давления и ряда иных факторов. Другие тепловые характеристики зависят от температуры ($c_i(T), \lambda_i(T)$). Соответствующие зависимости взяты из библиотеки MATPRO [12]. Остальные тепловые условия задачи такие же, как в тесте 3. Моделировался интервал времени продолжительностью 3600.

Для решения механической задачи контактного взаимодействия таблеток друг с другом и с оболочкой использован метод Дирихле–Неймана [3].

В первой серии расчётов полагалось, что в начальный момент времени между таблетками и оболочкой существует зазор $\delta_0 = 0.04$. В результате нагрева в таблетках образуются тепловые деформации и зазор уменьшается (это происходит неравномерно относительно оси z), но механического контакта между таблетками и оболочкой нет (в расчётах учитывается механический контакт между таблетками). Выполнены расчёты для случаев $M = 1, 4, 10$. На каждом шаге по времени итерационный процесс продолжался до выполнения критерия

$$\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c \leq 10^{-2}.$$

В табл. 5 приведены значения следующих характеристик расчёта с одной таблеткой в четыре момента времени: количество итераций в тепловой задаче (в скобках указано количество итераций для расчёта с десятью таблетками), величина зазора, коэффициент теплоотдачи и разность температур между двумя противолежащими точками на двух поверхностях для узла сетки, расположенного вблизи центра боковой поверхности таблетки.

Видно, что с уменьшением зазора значение коэффициента теплоотдачи увеличивается, но температуры в противолежащих точках могут значительно отличаться. Таким образом, тепловой контакт остаётся существенно неидеальным. Количество итераций в тепловой задаче для различного количества таблеток изменялось незначительно.

Таблица 5. Характеристики первой серии расчётов

Время	Количество итераций	Величина зазора	Коэффициент теплоотдачи	Разность температур
720	10(10)	0.029	$7.61 \cdot 10^3$	48.83
1800	12(12)	0.022	$9.93 \cdot 10^3$	93.37
2880	13(13)	0.014	$1.39 \cdot 10^4$	106.14
3600	17(18)	0.009	$1.90 \cdot 10^4$	97.44

На рис. 2 приведены графики изменения температуры вдоль поперечного сечения, соответствующего половине высоты таблетки: три для таблетки (T_p , область $r < 3.9$) и три для оболочки (T_c , область $r \geq 3.9$). Хорошо заметен разрыв по температуре между внешней поверхностью таблетки и внутренней поверхностью оболочки вследствие использования условий неидеального теплового контакта между телами.

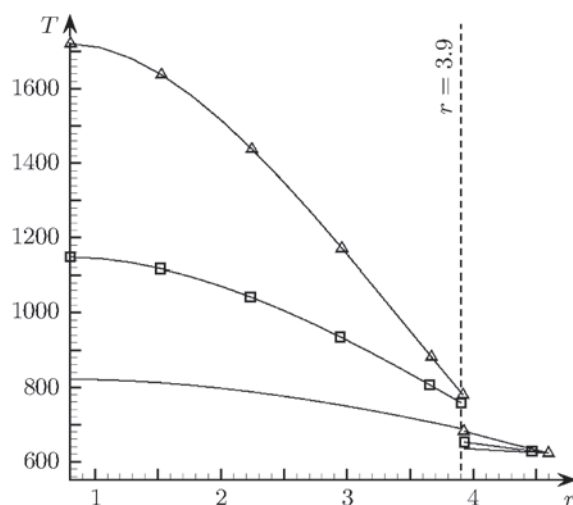


Рис. 2. Изменение температуры таблеток T_p (в области $r < 3.9$) и оболочек T_c (в области $r \geq 3.9$) вдоль поперечного сечения для разных моментов времени: $t = 720$ (графики без маркера), $t = 1800$ (графики с квадратным маркером) и $t = 3600$ (графики с треугольным маркером).

Во второй серии расчётов полагалось, что в начальный момент времени зазор между таблетками и оболочкой равен нулю. В результате нагрева таблетки вступают в механический контакт с оболочкой. Выполнены расчёты для случаев $M = 1, 4, 10$.

В табл. 6 приведены значения следующих характеристик расчёта с одной таблеткой в четыре момента времени: количество итераций в тепловой задаче (в скобках указаны количества итераций для расчётов с четырьмя и десятью таблетками), контактное давление, коэффициент теплоотдачи и разность температур между двумя противоположными точками на двух поверхностях для узла сетки, расположенного вблизи центра боковой поверхности таблетки.

Таблица 6. Характеристики второй серии расчётов

Время	Количество итераций	Контактное давление	Коэффициент теплоотдачи	Разность температур
720	387(393, 393)	26.43	$1.04 \cdot 10^6$	0.36
1800	196(262, 498)	38.07	$1.44 \cdot 10^6$	0.64
2880	249(398, 701)	52.47	$1.94 \cdot 10^6$	0.75
3600	297(438, 499)	64.02	$2.33 \cdot 10^6$	0.78

Из проведённых расчётов следует, что с увеличением контактного давления значение коэффициента теплоотдачи возрастает, при этом температуры в противолежащих точках поверхностей практически не отличаются друг от друга, т.е. фактически реализуется случай идеального теплового контакта. Количество итераций в тепловой задаче в расчётах для одной таблетки и для десяти таблеток отличалось в среднем в 2–2.5 раза.

Если решать задачу с условием идеального теплового контакта с использованием итерационного алгоритма (7)–(10), то для достижения точности, соответствующей величине $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, в расчётах с $M = 1, 4, 10$ требовалось от 14 до 16 итераций на каждом шаге по времени. Значения температур в узлах на внутренней поверхности оболочки и тепловых потоков между таблетками и оболочкой в расчётах с разными условиями теплового контакта практически не отличаются друг от друга на участках вблизи центров поверхностей таблеток. На участках, расположенных ближе к фаскам таблеток, температуры в разных расчётах отличаются на 2–3 %.

Приведённые в табл. 5 и 6 данные свидетельствуют, что и для более сложной задачи характер зависимости сходимости итерационного процесса от величины коэффициента теплоотдачи качественно соответствует оценке (23).

Заключение. Представлена нелинейная задача о тепловом взаимодействии системы тел. В качестве граничных условий на противолежащих поверхностях контактирующих тел рассмотрены условия как неидеального, так и идеального теплового контакта. Для дискретизации задачи по пространству использован метод конечных элементов, для дискретизации по времени применена полностью неявная конечно-разностная схема. Представлены итерационные алгоритмы, позволяющие свести решение общей задачи к решению систем линейных уравнений для каждого тела по отдельности. Для выяснения основных особенностей решения и численного алгоритма для случая неидеального теплового контакта рассмотрена модельная одномерная задача, для которой построен главный член асимптотического разложения и исследована разностная схема, в том числе получены оценки скорости сходимости различных итерационных алгоритмов. Выполнена серия тестовых расчётов на сгущающихся сетках по пространству и времени. Полученные результаты подтвердили, что численное решение сходится к выведенным точным решениям с ожидаемой скоростью. При увеличении значения коэффициента теплоотдачи наблюдается кратное увеличение количества итераций, нужное для достижения требуемой точности. В то же время значения температур и тепловых потоков на контактирующих поверхностях стремятся к значениям соответствующих величин в задаче с идеальным тепловым контактом.

С помощью построенных численных алгоритмов решена связанная термомеханическая задача взаимодействия элементов в участке твэла в ядерном реакторе в осесимметричной постановке с использованием реалистичных зависимостей для теплофизических характеристик материалов топливной таблетки и оболочки, взятых из библиотеки MATPRO. Проведена серия расчётов, в которых рассматривался участок, включающий в себя от одной до десяти таблеток. Сопоставление расчётов реальных задач с теоретическими предсказаниями показало, что алгоритм решения многомерной нелинейной задачи качественно соответствует поведению одномерных вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., 2008.
2. Galanin M.P., Zhurkov V.T., Klyushev N.N. Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // Computers and Fluids. 2018. V. 172. P. 483–491.
3. Галанин М.П., Родин А.С. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 4. С. 659–676.

4. Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 3. С. 4–22.
5. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М., 2010.
6. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М., 2010.
7. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Berlin; Heidelberg, 2005.
8. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы теории сингулярных возмущений. М., 1990.
9. Беляков Н.С., Носко А.П. Неидеальный тепловой контакт тел при трении. М., 2010.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М., 1979.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
12. Hagrman D.L., Reymann G.A. A Handbook of Materials Properties for Use in the Analysis of Lightwater Reactor Fuel Rod Behavior. Idaho, 1979.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.02.2023 г.
После доработки 22.02.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.