

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.225

ПРИНЦИП МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА С ПОВЕРХНОСТИ

© 2023 г. Е. Б. Ланеев, Н. Ю. Черникова

Рассматривается некорректно поставленная задача продолжения потенциального поля в цилиндрическую область с поверхности в трёхмерном пространстве. Строится приближённое решение задачи, устойчивое по отношению к заданному полю. Продолжение поля потенциала осуществляется решением некорректно поставленной смешанной задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения. Для построения устойчивого решения задачи используется метод регуляризации Тихонова.

DOI: 10.31857/S0374064123060067, EDN: FFWQYC

Введение. Обратная задача потенциала [1] имеет широкий круг приложений, чем и обусловлена её актуальность. Трудности при её решении, в частности, связаны с тем, что решение единственно в достаточно узких классах функций плотности потенциала. Тем не менее в задачах геофизики эффективным способом исследования и локализации аномалий плотности является изучение поля силы тяжести, продолженного на глубину в сторону возмущающих масс [2] с земной поверхности. В данной работе предлагается метод продолжения потенциального поля с поверхности, вообще говоря, не плоской. Продолжение поля осуществляется на основе решения некоторой краевой задачи для системы уравнений потенциального поля. Рассматриваемая задача некорректно поставлена, т.е. малым погрешностям в заданном поле могут соответствовать существенные погрешности в решении задачи о продолжении поля. Для построения её устойчивого приближённого решения используется метод регуляризации Тихонова [3, гл. IV, § 3].

1. Постановка задачи. В бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < \infty\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

рассмотрим следующую модель ньютоновского потенциала:

$$\begin{aligned} \Delta v(M) &= -4\pi\rho(M), \quad M \in D^\infty, \\ v|_{x=0, l_x} &= 0, \quad v|_{y=0, l_y} = 0, \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что носитель функции ρ расположен в области

$$D(H, \infty) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad H < z < \infty, \quad H = \text{const}\}.$$

Пусть $\varphi(M, P)$ – функция источника задачи (2) в области D^∞ , которая может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}|z_P - z_M|\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (3)$$

$$k_{nm} = \pi \left(\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Если точка $P \in D(H + \varepsilon, \infty)$, где ε меньше расстояния от носителя функции плотности ρ до плоскости $z = H$, а точка M принадлежит области

$$D(-\infty, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < H\}, \quad (5)$$

то ряд (3) сходится равномерно.

В области $D(-\infty, H)$ решение задачи (2) может быть представлено в виде

$$v(M) = 4\pi \int_{\text{Supp } \rho} \rho(P) \varphi(M, P) dV_P = \frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\}}{k_{nm}} \times \\ \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (6)$$

При аналитическом продолжении на полупространство $z_M < H$ как гармонической функции такой потенциал соответствует ньютоновскому потенциалу с нечётно-периодической функцией плотности распределения источников ρ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

В области $D(-\infty, H)$ поле потенциала (6) имеет вид

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z = -\nabla v(M) = -\frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\} \times \\ \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} + \right. \\ \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \right). \quad (7)$$

Если в рамках модели (2) плотность потенциала ρ известна, то в области $D(-\infty, H)$ потенциал плотности ρ и поле потенциала могут быть найдены по формулам (6) и (7) соответственно.

Поставим следующую задачу.

Пусть в рамках модели (2) на расположенной внутри области D^∞ поверхности

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad z = F(x, y) < H\}, \quad (8)$$

где функция F непрерывно дифференцируема, поле $\mathbf{E}$ вида (7) потенциала (6) задано как векторная функция $\mathbf{E}^0$:

$$\mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, \quad (9)$$

а плотность ρ потенциала неизвестна.

В области $D(-\infty, H)$ поле (7) является решением задачи

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ \mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, \quad [\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{x=0, l_x} = 0, \quad [\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{y=0, l_y} = 0, \\ \mathbf{E} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

Будем считать, что каждая компонента поля $\mathbf{E}$ принадлежит по крайней мере классу функций $C^2(D(-\infty, H)) \cap C^1(\overline{D(-\infty, H)})$. Решение задачи (10), очевидно, существует, если $\mathbf{E}^0$ – поле потенциала вида (7) с плотностью ρ , носитель которой лежит в области $D(H, \infty)$.

Как следует из (7), z -компонента поля $\mathbf{E}$ может быть записана в виде равномерно сходящегося ряда Фурье

$$E_z(M) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \sum_{n,m=1}^{\infty} (E_z)_{nm}(z_M) \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad M \in D(-\infty, H). \quad (11)$$

При этом компоненты E_x и E_y поля в силу (7) выражаются через коэффициенты Фурье компоненты E_z :

$$E_x(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} (E_z)_{nm}(z_M) \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y},$$

$$E_y(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} (E_z)_{nm}(z_M) \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad M \in D(-\infty, H). \quad (12)$$

Таким образом, для решения задачи (10) достаточно, исходя из её условий, найти компоненту E_z поля.

2. Сведение поставленной задачи к краевой задаче для E_z . Отметим, что компонента E_z , как и каждая компонента поля в (10), есть гармоническая функция в области $D(-\infty, H)$. С учётом граничных условий в (10) E_z является решением задачи

$$\Delta E_z(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H),$$

$$E_z|_S = E_z^0,$$

$$E_z|_{x=0, l_x} = 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0,$$

$$E_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в области

$$D(-\infty, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < F(x, y)\}$$

компонента E_z является единственным решением задачи Дирихле, совпадает с z -компонентой поля (7) и как аналитическая функция единственным образом продолжается в область $D(-\infty, H)$, совпадая с z -компонентой поля (7). Таким образом, задача (13) имеет единственное решение, а имея в виду связь компонент поля (12), единственно и решение задачи (10).

Для получения явного выражения для E_z , как решения задачи (13), дополним граничные условия в (13) на поверхности S условием на нормальную производную, используя условие (9) и уравнения потенциального поля в (10).

В самом деле, в области $D(-\infty, H)$ поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнениям потенциального поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(M) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H).$$

Для нормальной производной компоненты E_z на поверхности S вида (8), задаваемой уравнением $z - F(x, y) = 0$, имеем

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = (\mathbf{n}_1, \nabla E_z)|_S = \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} F'_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} F'_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Big|_S, \quad (14)$$

где $\mathbf{n}_1 = (-F'_x, -F'_y, 1)$ – внешняя нормаль по отношению к области $D(-\infty, F)$, $n_1 = |\mathbf{n}_1|$. Тогда, выражая из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, имеющего место в точках поверхности $S \subset D(-\infty, H)$, производную по переменной z и подставляя её в (14), получаем

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = (\mathbf{n}_1, \nabla E_z)|_S = \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} F'_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} F'_y - \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Big|_S. \quad (15)$$

Из уравнений $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ в точках поверхности S , а именно

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_S = \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_S, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_S = \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_S,$$

и из (15) следует равенство

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Big|_S. \quad (16)$$

Далее будем рассматривать поле $\mathbf{E}^0$ в (9), заданное на поверхности S , как функцию переменных x и y на прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y\}. \quad (17)$$

Дифференцируя компоненты поля $\mathbf{E}^0$ по аргументам x и y , получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_x^0 &= \frac{\partial}{\partial x} E_x(x, y, F(x, y)) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x \right) \Big|_S, \\ \frac{\partial}{\partial y} E_y^0 &= \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, y, F(x, y)) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y \right) \Big|_S, \end{aligned}$$

подставив которые в (16), найдём выражение нормальной производной через производные компонент вектора $\mathbf{E}^0$:

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y \right) \Big|_S = - \frac{\partial}{\partial x} E_x^0 - \frac{\partial}{\partial y} E_y^0. \quad (18)$$

Добавив условие (18) в (13), видим, что компонента E_z поля (7) в области $D(-\infty, H)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta E_z(M) &= 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ E_z|_S &= E_z^0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} \right), \quad \mathbf{n}_1 = (-F'_x, -F'_y, -1), \\ E_z|_{x=0, l_x} &= 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0, \quad E_z \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как функция $\mathbf{E}^0$ в (10) задаётся как поле потенциала (7), то, таким образом, решение задачи (19) существует в классе $C^2(D(-\infty, H)) \cap C^1(\overline{D(-\infty, H)})$.

На границе $z = H$ области $D(-\infty, H)$ граничные условия не заданы, а значит, задача (19), как и задачи (11), не устойчива по отношению к погрешностям в данных, т.е. некорректно поставлена.

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Покажем, что, следуя методу [4], применённому для решения задачи Коши для уравнения Лапласа, задача (19) может быть сведена к интегральному уравнению.

Рассмотрим функцию источника $\varphi(M, P)$ задачи (2) в цилиндре D^∞ вида (1). Эта функция имеет вид

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M, P), \quad (20)$$

где r_{MP} – расстояние между точками $M \in D^\infty$ и $P \in D^\infty$, $W(M, P)$ – гармоническая по P функция. Функция источника, наряду с формулой (3), может быть получена методом отражений как сумма функций точечных источников с периодом $2l_x$ по переменной x и $2l_y$ по переменной y :

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{1,nm}} - \frac{1}{r_{2,nm}} - \frac{1}{r_{3,nm}} + \frac{1}{r_{4,nm}} \right),$$

где

$$r_{1,nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{2,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{3,nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{4,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

так что $r_{1,00} = r_{MP}$ – расстояние между точками $M \in D^\infty$ и $P \in D^\infty$.

Пусть точка M лежит в области

$$D(R, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad R < z < F(x, y), \quad R = \text{const}\}.$$

Применим формулы Грина в области $D(R, F)$ к решению $E_z(P)$ задачи (19) и к функциям $(4\pi r_{MP})^{-1}$ и $W(M, P)$ и получим

$$E_z(M) = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) \frac{1}{4\pi r_{MP}} - E_z(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{4\pi r_{MP}}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F), \quad (21)$$

$$0 = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) W(M, P) - E_z(P) \frac{\partial W}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F). \quad (22)$$

Здесь нормаль внешняя по отношению к области $D(R, F)$. Суммируя (21) и (22), учитывая (20), получаем

$$E_z(M) = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - E_z(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F).$$

С учётом граничных условий для E_z в задаче (19) и φ запишем представление компоненты E_z поля как сумму интегралов

$$\begin{aligned} E_z(M) = & \int_S \left[-\frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x}(P) + \frac{\partial E_y^0}{\partial y}(P) \right) \varphi(M, P) - E_z^0(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P + \\ & + \int_{\Pi(R)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n_P}(P) \varphi(M, P) - E_z(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F), \end{aligned} \quad (23)$$

где прямоугольник $\Pi(R)$ имеет вид

$$\Pi(R) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad z = R\}, \quad R < \min_{(x, y)} F(x, y). \quad (24)$$

Интеграл по прямоугольнику $\Pi(R)$, в силу представлений поля (7) и функции источника для фиксированной точки $z_M > z_P = R$ (в соответствии с (3))

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_M - R)\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y},$$

сходится к нулю при $R \rightarrow -\infty$.

Интеграл по поверхности S в (23) сводится к интегралу по переменным x_P и y_P , учитывая, что $\partial \varphi(M, P)/\partial n = (\mathbf{n}, \nabla_P \varphi(M, P))$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1/n_1$, и $d\sigma_P = n_1 dx_P dy_P$, т.е.

$$\begin{aligned} E_z(M) = & \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[-\left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x}(x_P, y_P) + \frac{\partial E_y^0}{\partial y}(x_P, y_P) \right) \varphi(M, P) - \right. \\ & \left. - E_z^0(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P)) \right]_{P \in S} dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, F). \end{aligned}$$

Интегрируя здесь по частям и учитывая граничные условия для φ , получаем

$$E_z(M) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[E_x^0(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi(M, P)}{\partial x_P} \Big|_{P \in S} + E_y^0(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi(M, P)}{\partial y_P} \Big|_{P \in S} - \right. \\ \left. - E_z^0(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P)) \Big|_{P \in S} \right] dx_P dy_P. \quad M \in D(-\infty, F). \quad (25)$$

Как уже обсуждалось при анализе задачи (13), в области $D(-\infty, F)$ компонента поля E_z вида (25) совпадает с представлением z -компоненты в (7) и, следовательно, может быть аналитически продолжена как z -компонента поля (7) в область $D(-\infty, H]$.

Введём обозначение

$$E_{z,H} = E_z|_{z=H}. \quad (26)$$

Компонента E_z в области $D(-\infty, H)$ может рассматриваться как решение задачи

$$\Delta E_z(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ E_z|_{z=H} = E_{z,H}, \\ E_z|_{x=0, l_x} = 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0, \\ E_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (27)$$

Тогда функция E_z может быть выражена через функцию $E_{z,H}$ с использованием функции Грина задачи (27):

$$E_z(M) = - \int_{\Pi(H)} \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) E_{z,H}(P) dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, H), \quad (28)$$

где нормальная производная функции Грина

$$\frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) \Big|_{P \in \Pi(H)} = \frac{\partial G}{\partial z_P}(M, P) \Big|_{P \in \Pi(H)} = \\ = -\frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(-H + z_M)\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \quad (29)$$

$\Pi(H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \ 0 < y < l_y, \ z = H\}$, а величина k_{nm} имеет вид (4).

Таким образом, если задача (19) имеет решение, то из (28) и (29) следует, что функция E_z в области $D(-\infty, H)$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$E_z(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (\tilde{E}_{z,H})_{nm} \exp\{k_{nm}(z - H)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \quad (30)$$

с коэффициентами

$$(\tilde{E}_{z,H})_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} E_{z,H}(x', y') \sin \frac{\pi n x'}{l_x} \sin \frac{\pi m y'}{l_y} dx' dy'$$

по полной системе функций $\{\sin(\pi n x/l_x) \sin(\pi m y/l_y)\}_{n,m=1}^{\infty}$. Ряд (30) сходится равномерно в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, так как справедлива оценка

$$\left| (\tilde{E}_{z,H})_{nm} \exp\{k_{nm}(z - H)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right| \leq |(\tilde{E}_{z,H})_{nm}| \exp\{-\varepsilon k_{nm}\}.$$

Из представления (28) решения задачи (19) и из (30) следует, что для получения явного выражения точного решения задачи (19) достаточно записать функцию (26) через вектор-функцию $\mathbf{E}^0$.

Покажем, что функция $E_{z,H}$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Введём обозначение

$$\Phi(x_M, y_M) = E_z(M)|_{\Pi(a)}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (31)$$

где

$$\Pi(a) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad z = a\}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (32)$$

а E_z – функция вида (25). Поскольку поле $\mathbf{E}^0$ задано, а функция источника $\varphi(M, P)$ при $M \in \Pi(a)$ и $P \in S$ вида (8) может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда (3):

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_P - a)\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \quad (33)$$

функцию Φ вида (31) можно также считать известной функцией. Тогда из (28) и (31) получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно искомой функции $E_{z,H}$

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} K(x_M, y_M, x, y) E_{z,H}(x, y) dx dy = \Phi(x_M, y_M), \quad (x_M, y_M) \in \Pi, \quad (34)$$

где ядро интегрального оператора, в соответствии с представлением (29), имеет вид

$$K(x_M, y_M, x, y) = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(H - a)\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}. \quad (35)$$

Из уравнения (34), используя разложение (35), получаем следующее соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения $E_{z,H}$ этого интегрального уравнения и коэффициентами Фурье правой части уравнения:

$$(E_{z,H})_{nm} \exp\{-k_{nm}(H - a)\} = \tilde{\Phi}_{nm}, \quad (36)$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}$ – коэффициенты Фурье функции Φ :

$$\tilde{\Phi}_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi} \Phi(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy.$$

Заметим, что формула (36) характеризует убывание коэффициентов $\tilde{\Phi}_{nm}$ с ростом n и m , если для функции $\mathbf{E}^0$ существует решение задачи (19) и, следовательно, существует $E_{z,H}$, определяемая формулой (26). Выражая коэффициенты Фурье $(E_{z,H})_{nm}$ из (36) и подставляя их в ряд (30), получаем функцию E_z в области $D(-\infty, H)$:

$$E_z(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z - a)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}, \quad M(x, y, z) \in D(-\infty, H). \quad (37)$$

Ряд (37), также как и ряд (30), сходится равномерно в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, если существует решение задачи (19) для заданной функции $\mathbf{E}^0$, соответствующей полю потенциала вида (7).

Формула (37) даёт представление точного решения задачи (19). Из этой формулы следует, что $(E_z)_{nm}(z) = \tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z - a)\}$. Подставив её в (12), получим компоненты E_x и E_y поля, которые вместе с (37) дают представление точного решения задачи (10).

4. Решение задачи в случае приближённо заданного поля $\mathbf{E}^0$. Пусть вместо точной вектор-функции $\mathbf{E}^0$ в условии (9) задачи (10) известна приближённая функция $\mathbf{E}^{0,\delta} = (E_x^{0,\delta}, E_y^{0,\delta}, E_z^{0,\delta})$, заданная как функция на прямоугольнике Π вида (17), так что

$$\|\mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0\|_{L_2(\Pi)} \leq \delta. \quad (38)$$

В этом случае правая часть $\Phi(M)$ вида (31) интегрального уравнения (34) будет вычисляться приближённо, в том числе на прямоугольнике (32) в соответствии с формулой (25) как функция

$$E_z^\delta(M) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[E_x^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + E_y^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} - \right. \\ \left. - E_z^{0,\delta}(x_P, y_P)(\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right] dx_P dy_P, \quad M \in \Pi(a), \quad (39)$$

где $\varphi(M, P)$ – функция источника вида (33) задачи (2).

Оценим погрешность в вычислении функции (39) по отношению к функции E_z вида (25) на прямоугольнике (32) – правой части интегрального уравнения (34), т.е. оценим разность

$$|E_z^\delta(M) - E_z(M)|_{M \in \Pi(a)} \leq \left| \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[(E_x^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_x^0(x_P, y_P)) \left(\frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (E_y^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_y^0(x_P, y_P)) \left(\frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (E_z^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_z^0(x_P, y_P))(\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right] dx_P dy_P \right|.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, а также (38), отсюда получаем неравенства

$$|E_z^\delta(M) - E_z(M)|_{M \in \Pi(a)} \leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P)|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_x^{0,\delta} - E_x^0\|_{L_2(\Pi)} \leq \\ \leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P)|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_y^{0,\delta} - E_y^0\|_{L_2(\Pi)} + \\ + \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[(\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_z^{0,\delta} - E_z^0\|_{L_2(\Pi)} \leq C_1 \|\mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0\| \leq C_1 \delta. \quad (40)$$

Обозначая аналогично (31) приближённую правую часть интегрального уравнения (34)

$$\Phi^\delta(x_M, y_M) = E_z^\delta(M)|_{M \in \Pi(a)}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (41)$$

отсюда и из (40) в пространстве L_2 погрешности приближённой правой части интегрального уравнения (34) будем иметь оценку $\|\Phi^\delta - \Phi\|_{L_2(\Pi)} \leq C_2 \delta$, где C_2 – константа.

Построим теперь приближённое решение интегрального уравнения (34) с правой частью (41), применяя метод регуляризации Тихонова [3, гл. IV, § 3]. В качестве приближённого решения будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова

$$M[w] = \|Kw - \Phi^\delta\|_{L_2(\Pi)}^2 + \alpha \|w\|_{L_2(\Pi)}^2, \quad \alpha > 0, \quad (42)$$

где K – ядро интегрального оператора в (34). Она может быть найдена с использованием методов минимизации [5, 6]. Экстремаль также может быть получена как решение уравнения Эйлера $K^*Kw + \alpha w = K^*\Phi^\delta$ для функционала (42) и в коэффициентах Фурье $\tilde{w}_{nm}$ искомой функции w имеет вид

$$\exp\{-2k_{nm}(H-a)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = \exp\{-k_{nm}(H-a)\}\tilde{\Phi}_{nm}^\delta.$$

Здесь $\tilde{\Phi}_{nm}^\delta$ – коэффициенты Фурье функции Φ^δ вида (41):

$$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Phi^\delta(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \quad (43)$$

Решая уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали w и подставляя их в (30) вместо $(\tilde{E}_{z,H})_{nm}$ в (28), найдём приближение $E_{z,\alpha}^\delta$ к функции E_z в области $D(-\infty, H)$:

$$E_{z,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta \exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (44)$$

С учётом формул (12) получаем приближённое решение векторной задачи (10):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha^\delta(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta \exp\{k_{nm}(z - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} & \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} + \right. \\ & \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right), \quad M(x, y, z) \in D(-\infty, H). \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что члены ряда (44) отличаются от членов ряда (37) регуляризирующим множителем $(1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\})^{-1}$, который обеспечивает сходимость ряда.

Видно, что при $\delta = 0$ и $\alpha = 0$ формула (45) переходит в явное представление точного решения (37), (12) задачи (10). При $\delta > 0$ и $\alpha = 0$ ряд (45), вообще говоря, может расходиться. Для $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ сходимость обеспечивается регуляризирующим множителем $(1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\})^{-1}$.

Теорема. Пусть решение задачи (10) существует. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ тако- го, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, функция $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta$ вида (45) сходится к точному решению задачи (10) равномерно при $\delta \rightarrow 0$ в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ вида (5) оценим разность

$$|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}| \leq |\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}| + |\mathbf{E}_{\alpha(\delta)} - \mathbf{E}|, \quad (46)$$

где $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}$ – функция (45) при точной функции $\mathbf{E}^0$ и, соответственно, точной функции Φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} & \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} + \right. \\ & \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Оценим, используя (47), разность $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}$ в (46) при $z_M < H - \varepsilon$:

$$|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta(M) - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}(M)| \leq 12 \left| \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \right| \max_{P \in \Pi} |\Phi^\delta(P) - \Phi(P)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 12C_1\delta \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{k_{nm}(H-\varepsilon-a)\}}{1+\alpha\exp\{2k_{nm}(H-a)\}} \leq 12C_1\delta \max_x \left[\frac{e^x}{1+\alpha e^{2x}} \right] \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}\varepsilon\} \leq \\ &\leq C_3 \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Оценим теперь разность $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)} - \mathbf{E}$ в (46) при $z_M < H - \varepsilon$, учитывая (47) и (37), (12):

$$|\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| \leq 3 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\} \exp\{k_{nm}(H-\varepsilon-a)\}}{1+\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\}} |\tilde{\Phi}_{nm}|.$$

Используя (36) и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| &\leq 3 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\} \exp\{-k_{nm}\varepsilon\}}{1+\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\}} |(E_{z,H})_{nm}| \leq \\ &\leq \frac{6}{\sqrt{l_x l_y}} \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\}}{1+\alpha \exp\{2k_{nm}(H-a)\}} \right)^2 \exp\{-2k_{nm}\varepsilon\} \right]^{1/2} \|E_{z,H}\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Так как ряд, зависящий от параметра α , мажорируется сходящимся числовым рядом с коэффициентами $\exp\{-2\varepsilon k_{nm}\}$, то возможен предельный переход по α и, таким образом,

$$|\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (49)$$

Из (46), (48) и (49) и условий теоремы следует, что $|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^{\delta} - \mathbf{E}| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Таким образом, построенное приближённое решение (45) задачи (10) устойчиво к погрешностям в задании функции $\mathbf{E}^0$.

5. Вычислительный эксперимент. Покажем практическую значимость и эффективность предложенного метода устойчивого приближённого решения задачи (10) на следующем модельном примере. Пусть в задаче (10) поверхность S – плоскость $\Pi(0)$. В этом случае для решения задачи (10) достаточно задать на плоскости $\Pi(0)$ одну компоненту E_z^0 , которая может непосредственно рассматриваться в качестве правой части интегрального уравнения (34). Значения параметров области задачи:

$$l_x = 60, \quad l_y = 30, \quad H = 1.68.$$

В качестве заданного будем рассматривать поле, соответствующее трём точечным источникам в точках плоскости $z = H + 0.02$: $(x_1, y_1) = (17.7, 8)$, $(x_2, y_2) = (19.7, 8)$, $(x_3, y_3) = (19.7, 9.7)$ мощности $q_1 = 200$, $q_2 = 100$, $q_3 = 100$ соответственно:

$$E_z^0(x, y) = \sum_{i=1}^4 q_i \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(H+0.02)\} \sin \frac{\pi n x_i}{l_x} \sin \frac{\pi m y_i}{l_y} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}, \quad (50)$$

где k_{nm} вычисляется по формуле (4).

При решении задачи (10) считаем функцию E_z^0 заданной как функцию переменных x и y при неизвестной функции плотности распределения источников. Для построения решения используются формулы (44) при $\Phi = E_z^0$.

Для получения численного результата проведена дискретизация задачи. На прямоугольниках $\Pi(0)$ и $\Pi(H)$ введена равномерная сетка из 181×91 точек. Для суммирования дискретных рядов Фурье используется алгоритм Хемминга [7, с. 83]. Результаты расчётов представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 приведены исходные данные, т.е. заданная компонента поля E_z^0 вида

(50) при добавленной относительной погрешности 2.8% в норме L_2 . Три источника поля воспринимаются как единое целое. На рис. 2 показан результат восстановления функции $E_{z,H}$ по формуле (44) при $z = H$. Отчетливо видны три источника. Поле вычислено при значении параметра регуляризации $\alpha = 10^{-8}$. При параметре регуляризации $\alpha = 0$ решение разрушается.

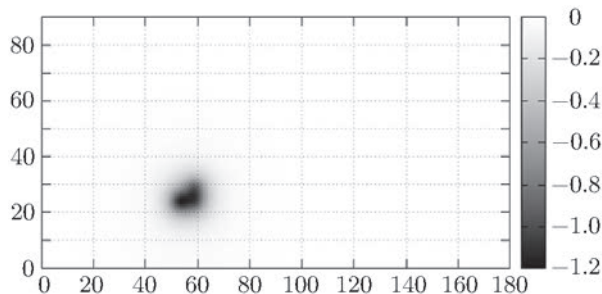


Рис. 1. Исходное поле E_z^0 на поверхности $z = 0$.

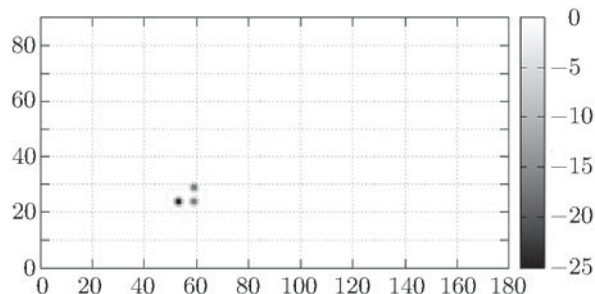


Рис. 2. Продолженное поле E_z .

Заключение. Устойчивое решение задачи (10), как показывает модельный пример, может быть использовано для решения обратной задачи потенциала продолжением поля потенциала в сторону носителя функции плотности источников и может применяться при решении различных прикладных задач, в частности, задач геофизики [2]. Так как функция $E_{z,H}$ представляет собой поле на плоскости более близкой к исследуемым источникам поля, чем исходная поверхность S , можно ожидать более точного воспроизведения изображения источников компонентой поля $E_{z,H}$. Аналогичный метод продолжения гармонической функции с поверхности может быть применён для математической обработки термографических изображений [8].

Результаты расчётов, проведённых на модельном примере, подтверждают эффективность предлагаемого метода, основанного на формулах (45), (43), (41) и (39).

Очевидно, что предложенный метод продолжения поля потенциала переносится и на случай потенциалов простого и двойного слоя и их комбинаций с объёмным потенциалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
2. Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 30–48.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
4. Ланеев Е.Б. О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 483–491.
5. Арутюнов А.В. Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67. № 3. С. 3–62.
6. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Нелокальные обобщённые теоремы о неявной функции в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1571–1584.
7. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. М., 1968.
8. Laneev E.B., Chernikova N.Y., Obaida Baa. Application of the minimum principle of a Tikhonov smoothing functional in the problem of processing thermographic data // Adv. in Syst. Sci. Appl. 2021. № 1. P. 139–149.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.
После доработки 17.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.