ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 746–751

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

 А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного начального условия по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказывается, что на основе использования разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру ε можно получить приближённые решения, аппроксимирующие решение обратной задачи с порядком $O(\varepsilon)$ или $O(\varepsilon^2)$.

DOI: 10.31857/S0374064123060055, EDN: FFQKXU

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных

$$\varepsilon\nu u_x(x,t) + u_t(x,t) + a_t(x,t) = \varepsilon u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t(x,t) = \gamma u(x,t) - a(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant \pi, \tag{4}$$

$$a(x,0) = \psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi, \tag{5}$$

где $Q_T = \{(x,t) : 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, ε, ν, γ – положительные постоянные, ε – малый параметр, $\varepsilon < 1$.

Задачу (1)–(5) можно интерпретировать как математическую модель динамики сорбции [1, с. 174; 2, с. 5], когда эффекты процессов переноса и диффузии малы по сравнению с поглощением. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(5) от параметра ε, далее будем обозначать его $u(x,t;\varepsilon)$, $a(x,t;\varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные ε, ν, γ заданы, а функция $\psi(x)$ неизвестна. Требуется определить $\psi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(5)

$$u(x,T;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \tag{6}$$

где $g(x;\varepsilon)$ – заданная функция.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестной $\psi(x)$ функции $u(x,t;\varepsilon)$, $a(x,t;\varepsilon)$ также неизвестны, то решением обратной задачи будем считать тройку функций $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$.

Определение. Функции $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$ называются *решением обратной задачи*, если $\psi\in C[0,\pi]$, $u\in C^{2,1}(Q_T)$, $a, a_t\in C(Q_T)$ и $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3)–(6).

При выполнении ряда условий можно получить разложение функции $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру ε. Цель данной работы состоит в использовании этого разложения для построения функций, аппроксимирующих неизвестную функцию $\psi(x)$ при малых ε. Подобный подход применялся для приближённого решения некоторых обратных задач в статьях [3, 4]. Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущённых уравнений в частных производных посвящены работы [5–14].

Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon)(\gamma+1)(1-\exp(-(\gamma+1)T))^{-1}. \tag{7}$$

Докажем, что при выполнении определённых условий она аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Если функции* $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$ *являются решением обратной задачи и* $\psi \in C^3[0,\pi]$,

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad \psi''(0) - \nu\psi'(0) = \psi''(\pi) - \nu\psi'(\pi) = 0, \tag{8}$$

то

$$\max_{[0,\pi]} |\psi(x) - \psi_0(x;\varepsilon)| \leqslant c_1\varepsilon, \tag{9}$$

где c_1 *– постоянная, не зависящая от* x *и* ε.

Далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от x, t и ε.

Доказательство. Пусть функции $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи. Проинтегрировав уравнение (2) с начальным условием (5), имеем

$$a(x,t;\varepsilon) = \psi(x)e^{-t} + \gamma\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}u(x,\tau;\varepsilon)\,d\tau.$$

Из этого представления и уравнений (1), (2) следует, что $u(x,t;\varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon\nu u_x + u_t + \gamma u - \psi(x)e^{-t} - \gamma\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}u(x,\tau;\varepsilon)\,d\tau = \varepsilon u_{xx}, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{10}$$

Применив метод разделения переменных, получим представление

$$u(x,t;\varepsilon) = e^{\nu x/2}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t;\varepsilon)\sin(nx), \tag{11}$$

справедливое для функции $u(x,t;\varepsilon)$, удовлетворяющей уравнению (10) и условиям (3), (4). Здесь функции $T_n(t;\varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$T_n' + \gamma T_n - \bar\psi_n e^{-t} - \gamma\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}T_n(\tau;\varepsilon)\,d\tau = -\varepsilon(n^2+\nu^2/4)T_n, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{12}$$

$$T_n(0;\varepsilon) = 0, \tag{13}$$

а

$$\bar\psi_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{-\nu x/2}\psi(x)\sin(nx)\,dx.$$

С учётом условий (8) имеем

$$\bar\psi_n = -\frac{2}{\pi n^3}\int\limits_0^\pi \alpha(x)\cos(nx)\,dx, \tag{14}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{d}{dx}(e^{-vx/2}[\psi''(x) - \nu\psi'(x) + \nu^2\psi(x)/4]).$$

Рассмотрим функции $\tilde{T}_{n0}(t)$, являющиеся решениями задачи Коши

$$\tilde{T}''_{n0} + (\gamma - 1)\tilde{T}'_{n0} - \gamma\tilde{T}_{n0} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{15}$$

$$\tilde{T}_{n0}(0) = 0, \quad \tilde{T}'_{n0}(0) = \bar{\psi}_n, \tag{16}$$

и функции $\hat{T}_{n1}(t;\varepsilon)$ – решения задачи Коши

$$\hat{T}''_{n1} + a_{n\varepsilon}\hat{T}'_{n1} - \gamma\hat{T}_{n1} = -(n^2 + (\nu^2)/4)\tilde{T}'_{n0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{17}$$

$$\hat{T}_{n1}(0) = 0, \quad \hat{T}'_{n1}(0) = 0, \tag{18}$$

где $a_{n\varepsilon} = \varepsilon(n^2 + (\nu^2)/4) + \gamma - 1$. Из уравнений (12), (15), (17) и начальных условий (13), (16), (18) следует, что

$$T_n(t;\varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\hat{T}_{n1}(t;\varepsilon)). \tag{19}$$

Решение задачи (15), (16) определяется как

$$\tilde{T}_{n0}(t) = \bar{\psi}_n(\gamma + 1)^{-1}(e^t - e^{-\gamma t}), \tag{20}$$

а задачи (17), (18) – формулой

$$\hat{T}_{n1}(t;\varepsilon) = -\frac{n^2 + \nu^2/4}{\lambda_1(n;\varepsilon) - \lambda_2(n;\varepsilon)}\int\limits_0^t [\exp(\lambda_1(n;\varepsilon)(t-\tau)) - \exp(\lambda_2(n;\varepsilon)(t-\tau))]\tilde{T}'_{n0}(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

где

$$\lambda_1(n;\varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} + \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}, \quad \lambda_2(n;\varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} - \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}.$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\max_{[0,T]}|\hat{T}_{n1}(t;\varepsilon)| \leqslant c_2(n^2 + \nu^2/4)|\bar{\psi}_n| \tag{22}$$

для любого n. Подстановка представления (19) в формулу (11) с учётом оценки (22) и формулы (14) даёт

$$u(x,t;\varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)) + \varepsilon u_0(x,t;\varepsilon), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{23}$$

где $\max\limits_{Q_T}|u_0(x,t;\varepsilon)| \leqslant c_3$. Положив в формуле (23) $t = T$ и использовав условие (6), получим

$$g(x;\varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)T)) + \varepsilon u_0(x,T;\varepsilon).$$

Из этой формулы и определения (7) функции $\psi_0(x)$ следует оценка (9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что при малых ε функция $\psi_0(x)$ аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$. Покажем, что при дополнительных предположениях можно построить приближённое решение $\psi_1(x;\varepsilon)$, которое аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon^2)$.

Введём функции

$$p_0(t) = (\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)),$$

$$p_1(t) = \frac{\exp(-t)}{(\gamma + 1)^2}\int\limits_0^t [\exp(t-\tau) - \exp(-\gamma(t-\tau))](\exp(\tau) + \gamma\exp(-\gamma\tau))\,d\tau.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия

$$p_0(T)(p_1(T))^{-1} - \varepsilon\nu^2/4 \geqslant c_4 > 0, \quad |\sin(\pi\sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4})| \geqslant c_5 > 0. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $\psi_1(x;\varepsilon)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)\psi_1''(x;\varepsilon) - \varepsilon\nu p_1(T)\psi_1'(x;\varepsilon) + p_0(T)\psi_1(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{25}$$

$$\psi_1(0;\varepsilon) = 0, \quad \psi_1(\pi;\varepsilon) = 0. \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\{\psi(x), u(x,t;\varepsilon), a(x,t;\varepsilon)\}$ *являются решением обратной задачи, причём* $\psi(x)$ *такова, что* $\psi \in C^6[0,\pi]$, *выполнены условия (8) и*

$$\psi^{(4)}(0) - 2\nu\psi^{(3)}(0) + \nu^2\psi''(0) = 0, \quad \psi^{(4)}(\pi) - 2\nu\psi^{(3)}(\pi) + \nu^2\psi''(\pi) = 0. \tag{27}$$

Тогда для ε, *удовлетворяющих условиям (24), имеет место оценка*

$$\max_{[0,\pi]} |\psi(x) - \psi_1(x;\varepsilon)| \leqslant c_6\varepsilon^2. \tag{28}$$

Доказательство. Для функции $T_n(t;\varepsilon)$, являющейся решением задачи (12), (13), справедливо представление

$$T_n(t;\varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\tilde{T}_{n1}(t) + \varepsilon^2\tilde{T}_{n2}(t;\varepsilon)), \tag{29}$$

где $\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t;0)$, а $\tilde{T}_{n2}(t;\varepsilon)$ – решение задачи Коши

$$\tilde{T}_{n2}'' + a_{n\varepsilon}\tilde{T}_{n2}' - \gamma\tilde{T}_{n2} = -(n^2 + (\nu^2)/4)\tilde{T}_{n1}', \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{30}$$

$$\tilde{T}_{n2}(0) = 0, \quad \tilde{T}_{n2}'(0) = 0. \tag{31}$$

Из формулы (21) следует, что

$$\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t;0) = -(n^2 + \nu^2/4)(\gamma+1)^{-2}\bar{\psi}_n h(t), \tag{32}$$

где

$$h(t) = \int_0^t [\exp(t-\tau) - \exp(-\gamma(t-\tau))](\exp(\tau) + \gamma\exp(-\gamma\tau))\,d\tau.$$

Для решения задачи (30), (31) справедлива формула

$$\tilde{T}_{n2}(t;\varepsilon) = \frac{(n^2+\nu^2/4)^2\bar{\psi}_n}{(\gamma+1)^2(\lambda_1(n;\varepsilon) - \lambda_2(n;\varepsilon))} \times$$

$$\times \int_0^t [\exp(\lambda_1(n;\varepsilon)(t-\tau)) - \exp(\lambda_2(n;\varepsilon)(t-\tau))]h'(\tau)\,d\tau. \tag{33}$$

Используя условия (8) и (27), имеем

$$\bar{\psi}_n = -\frac{2}{\pi n^6}\int_0^\pi \alpha'''(x)\sin(nx)\,dx. \tag{34}$$

Следовательно, учитывая формулу (33), получаем, что функция

$$u_1(x,t;\varepsilon) = \exp(\nu x/2 - t)\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{n2}(t;\varepsilon)\sin(nx) \tag{35}$$

определена и непрерывна в прямоугольной области Q_T и имеет там непрерывную частную производную по x для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Из формул (34) и (35) следуют оценки

$$\max_{Q_T} |u_1(x,t;\varepsilon)| \leqslant c_7, \quad \max_{Q_T} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t;\varepsilon) \right| \leqslant c_8. \tag{36}$$

Учитывая определение коэффициентов $\bar{\psi}_n$, имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \nu^2/4)\bar{\psi}_n \sin(nx) = \exp(-\nu x/2)(\psi''(x) - \nu\psi'(x)). \tag{37}$$

Подставляя представление (29) в формулу (11) и принимая во внимание формулы (20), (32), (35) и (37), получаем

$$u(x,t;\varepsilon) = p_0(t)\psi(x) - \varepsilon\nu p_1(t)\psi'(x) + \varepsilon p_1(t)\psi''(x) + \varepsilon^2 u_1(x,t;\varepsilon), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Положив в этой формуле $t = T$ и использовав условие (6), можем записать равенство

$$\varepsilon p_1(T)\psi''(x) - \varepsilon\nu p_1(T)\psi'(x) + p_0(T)\psi(x) = g(x;\varepsilon) - \varepsilon^2 u_1(x,T;\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{38}$$

Рассмотрим функцию $z(x;\varepsilon) = \psi_1(x;\varepsilon) - \psi(x)$. Из уравнений (25), (38) и условий (8), (26) следует, что $z(x;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)z''(x;\varepsilon) - \varepsilon\nu p_1(T)z'(x;\varepsilon) + p_0(T)z(x;\varepsilon) = \varepsilon^2 u_1(x,T;\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$z(0;\varepsilon) = 0, \quad z(\pi;\varepsilon) = 0,$$

которое определяется формулой

$$z(x;\varepsilon) = \varepsilon(p_1(T))^{-1} \int_0^{\pi} G(x,s;\varepsilon)\exp(\nu(x-s)/2)u_1(s,T;\varepsilon)\,ds, \tag{39}$$

где

$$G(x,s;\varepsilon) = \begin{cases} (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon\pi))^{-1}\sin(b_\varepsilon(x-\pi))\sin(b_\varepsilon s), & s \leqslant x, \\ (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon\pi))^{-1}\sin b_\varepsilon(s-\pi)\sin(b_\varepsilon x), & x \leqslant s, \end{cases} \quad b_\varepsilon = \sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4}.$$

Интегрируя по частям интеграл в формуле (39) и используя оценку (36), получаем

$$\max_{[0,\pi]} |z(x;\varepsilon)| \leqslant c_6\varepsilon^2.$$

Таким образом, оценка (28) справедлива. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос об оценке для приближённого решения обратной задачи в случае, когда дополнительная информация задана с погрешностью. Пусть функция $g(x;\varepsilon)$ в условии (6) неизвестна, а вместо неё задана непрерывная на отрезке $[0,\pi]$ функция $g_\delta(x)$ такая, что

$$\max_{[0,\pi]} |g(x;\varepsilon) - g_\delta(x)| \leqslant \delta.$$

Определим функцию

$$\psi_{0\delta}(x) = g_\delta(x)(\gamma+1)(1 - \exp(-(\gamma+1)T))^{-1}.$$

Простым следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 1, то*

$$\max_{[0,\pi]} |\psi(x) - \psi_{0\delta}(x)| \leqslant c_1\varepsilon + \delta(\gamma+1)(1-\exp(-(\gamma+1)T))^{-1}.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия (24). Рассмотрим функцию $\psi_{1\delta}$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)\psi''_{1\delta}(x;\varepsilon) - \varepsilon\nu p_1(T)\psi'_{1\delta}(x;\varepsilon) + p_0(T)\psi_{1\delta}(x;\varepsilon) = g_\delta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$\psi_{1\delta}(0;\varepsilon) = 0, \quad \psi_{1\delta}(\pi;\varepsilon) = 0.$$

Из доказательства теоремы 2 легко получить

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

$$\max_{[0,\pi]} |\psi(x) - \psi_{1\delta}(x)| \leqslant c_6\varepsilon^2 + c_9\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
2. *Денисов А.М., Лукшин А.В.* Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М., 1989.
3. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040–2049.
4. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 795–802.
5. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.
6. *Иванов В.К.* Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
8. *Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е.* Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Изв. Уральского ун-та. 2008. № 58. С. 78–87.
9. *Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д.* О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
10. *Денисов А.М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
11. *Belov Yu.Ya., Kopylova V.G.* Determination of source function in composite type system of equations // Журн. Сибирского федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
12. *Денисов А.М., Соловьева С.И.* Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
13. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
14. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction–diffusion–advection type with data on the position of reaction front // Comm. in Nonlin. Sci. Numer. Simulation. 2021. V. 99. P. 105824.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.
После доработки 17.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.