ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 735–745

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95+517.968

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ

© 2023 г. А. В. Васильев, В. Б. Васильев

Рассмотрены модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение и простейшие краевые задачи в квадранте в пространстве Соболева–Слободецкого различного порядка гладкости по переменным. В случае специального представления символа описано общее решение уравнения и рассмотрена простейшая краевая задача с условиями Дирихле и Неймана на сторонах угла. Указанная краевая задача сведена к системе интегральных уравнений, которая при дополнительных предположениях о структуре символа может быть сведена и к системе разностных уравнений первого порядка.

DOI: 10.31857/S0374064123060043, EDN: FFPYOH

Введение. Теория краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений берет начало с середины 60-х гг. прошлого столетия, а именно с работ М.И. Вишика и Г.И. Эскина, результаты которых обобщены в монографии [1]. Полученные результаты привлекли внимание и получили дальнейшее развитие в работах ряда исследователей (см., например, [2, 3]). Второй автор данной статьи также проявил интерес к этой теме, предложив свой подход к построению теории краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в областях, имеющих на границе конические точки и ребра различных размерностей (см. [4, 5] и продолжение в работах [6–10]).

Все исследования проводились в обычных пространствах Соболева–Слободецкого, однако возможны пространства различного порядка гладкости по переменным [11–13]. Здесь мы рассматриваем простейший случай пространств Соболева–Слободецкого различного порядка гладкости по переменным и описываем сведение краевой задачи к системе интегральных уравнений.

1. Эллиптические уравнения. В этом пункте приведём некоторые определения и результаты, на которые будем опираться далее.

1.1. Пространства Соболева–Слободецкого различной гладкости. Следуя [14] (см. также [11]), введём удобные обозначения. Многомерное евклидово пространство $\mathbb{R}^M$ представим в виде ортогональной суммы подпространств, в которых только некоторые из координат $x_1, x_2, \ldots, x_M$ отличны от нуля. Более точно, если $K \subset \{1,\ldots,M\}$ – непустое множество, то полагаем

$$\mathbb{R}^K = \{x \in \mathbb{R}^M : x = (x_1,\ldots,x_M),\ \ x_j = 0 \ \text{ для любого } \ j \notin K\} \subset \mathbb{R}^M.$$

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n \subset \{1,2,\ldots,M\}$ – некоторые подмножества, так что

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j = \{1,2,\ldots,M\}, \quad K_i \bigcap K_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Тогда имеем представление

$$\mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{K_1} \bigoplus \mathbb{R}^{K_2} \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbb{R}^{K_n},$$

обозначая через x_{K_j} элемент пространства $\mathbb{R}^{K_j}$.

Для функций, определённых в пространстве $\mathbb{R}^M$, используем стандартное преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} u(x)e^{ix\cdot\xi}\,dx, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_M).$$

Теперь определим пространство Соболева–Слободецкого $H^S(\mathbb{R}^M)$, для упрощения обозначив $S = (s_1, \ldots, s_n)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

и нормой

$$\|f\|_S = \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^M} (1+|\xi_{K_1}|)^{2s_1}(1+|\xi_{K_2}|)^{2s_2}\cdots(1+|\xi_{K_n}|)^{2s_n}|\tilde{f}(\xi)|^2\,d\xi\biggr)^{1/2}.$$

Такие H^S-пространства обладают стандартным набором свойств пространств Соболева–Слободецкого [11]. В частности, пространство $H^s(\mathbb{R}^M)$ получается при следующей подборке подмножеств K_j и параметров s_j:

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_{n-1} = \varnothing, \quad K_n = \{1, 2, \ldots, M\}, \quad S = (0, 0, \ldots, 0, s).$$

1.2. Модельное уравнение и разрешимость. В соответствии с локальным принципом сконцентрируем внимание на исследовании модельного псевдодифференциального уравнения с оператором, символ которого не зависит от пространственной переменной. Подробные доказательства приводимых здесь результатов содержатся в работе [15].

Псевдодифференциальный оператор A определяется формулой

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M} e^{i(x-y)\cdot\xi}\tilde{A}(\xi)u(y)\,dy\,d\xi,$$

в которой заданная измеримая функция $\tilde{A}(\xi)$ называется *символом оператора* A.

Предположим, что символ $\tilde{A}(\xi)$ удовлетворяет условию

$$c_1\prod_{j=1}^{n}(1+|\xi_{K_j}|)^{\alpha_j} \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2\prod_{j=1}^{n}(1+|\xi_{K_j}|)^{\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

с положительными постоянными c_1 и c_2.

Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Лемма 1. *Пусть A – псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}(\xi)$, удовлетворяющим условию (1). Тогда $A: H^S(\mathbb{R}^M) \to H^{S-\alpha}(\mathbb{R}^M)$ является линейным непрерывным оператором.*

Простым следствием этой леммы является следующий факт. Если A – псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}(\xi)$, удовлетворяющим условию (1), то уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^M, \tag{2}$$

с произвольной правой частью $v \in H^{S-\alpha}(\mathbb{R}^M)$ имеет единственное решение $u \in H^S(\mathbb{R}^M)$ и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S \leqslant \mathrm{const}\,\|v\|_{S-\alpha}.$$

Отметим, что если рассматривать уравнение (2) не во всем пространстве $\mathbb{R}^M$, а в другой канонической области (тоже конусе), то такое простое следствие не имеет места. Здесь нас, как и прежде [6–10, 16–23], будет интересовать случай выпуклого конуса, не содержащего целой прямой.

Пусть $C_{K_j} \subset \mathbb{R}^{K_j}$ – выпуклый конус, не содержащий целой прямой. Положим

$$C = C_{K_1} \times C_{K_2} \times \cdots \times C_{K_n}.$$

Очевидно, что C – выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^M$.

Теперь исследуем вопрос разрешимости в пространстве $H^S(C)$ уравнения

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C. \tag{3}$$

Приведём ниже определения и результаты, касающиеся разрешимости уравнения (3).

Определение 1. Пространство $H^S(C)$ состоит из (обобщённых) функций из $H^S(\mathbb{R}^M)$, носители которых содержатся в $\overline{C}$.

Обозначим через $\widetilde{H}^S(C)$ *фурье-образ пространства* $H^S(C)$.

Определение 2. *Радиальной трубчатой областью* над конусом C называется область в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^M$ следующего вида:

$$T(C) \equiv \{z \in \mathbb{C}^M : z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad y \in C\}.$$

Сопряжённым конусом $\overset{*}{C}$ называется такой конус, для всех точек x которого выполняется условие

$$x \cdot y > 0 \quad \text{при всех} \quad y \in C,$$

$x \cdot y$ обозначает скалярное произведение x и y.

Определение 3. *Волновой факторизацией* эллиптического символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно конуса C называется его представление в виде

$$\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

где множители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^M$, исключая, возможно, точки $\xi \in \partial \overset{*}{C}$;

2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C})$, $T(-\overset{*}{C})$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leqslant c_1 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}| + |\tau_{K_j}|)^{\pm \varkappa_j},$$

$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leqslant c_2 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}| + |\tau_{K_j}|)^{\pm(\alpha_j - \varkappa_j)} \quad \text{для любого} \;\; \tau \in \overset{*}{C}, \quad \varkappa_j \in \mathbb{R}.$$

Вектор $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ называется *индексом волновой факторизации.*

Замечание 1. Следует отметить, что определение 3 должно быть модифицировано, если какой-то конус C_{K_j} содержит целую прямую, точнее, имеет вид $\mathbb{R}^{m_j} \times C_{k_j - m_j}$, где $C_{k_j - m_j}$, $0 \leqslant m_j \leqslant k_j$, – выпуклый конус в $(k_j - m_j)$-мерном пространстве, не содержащем целой прямой. Напомним, что по определению при $m_j = 0$ полагаем $\mathbb{R}^0 \times C_{k_j} \equiv C_{K_j}$, при $m_j = k_j$ соответственно $\mathbb{R}^{k_j} \times C_0 \equiv \mathbb{R}^{K_j}$. Обозначив $\sum_{j=1}^{n} = Q$, можно определить Q-*волновую факторизацию*, где точки Q-мерного пространства $\mathbb{R}^Q = \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$ будут играть роль параметров (см. [4]). Тогда определение 3 соответствует 0-волновой факторизации.

Теорема 1. *Если символ* $\tilde{A}(\xi)$ *допускает волновую факторизацию относительно конуса* C *с индексом* $\varkappa$ *таким, что* $|\varkappa_j - s_j| < 1/2$, $j = \overline{1, n}$, *то уравнение (3) в пространстве* $H^S(C)$ *имеет только нулевое решение.*

Предполагаем, что для каждого конуса C_{K_j}, $j=\overline{1,n}$, уравнение его поверхности записывается как $x_{k_j}=\varphi_j(x'_{K_j})$, где $\varphi_j:\mathbb{R}^{k_j-1}\to\mathbb{R}$ – гладкая функция на множестве $\mathbb{R}^{k_j-1}\setminus\{0\}$, $\varphi_j(0)=0$, $x_{K_j}=(x'_{K_j},x_{k_j})$.

Используя замену переменных

$$t'_{K_j}=x'_{K_j},\quad t_{k_j}=x_{k_j}-\varphi_j(x'_{K_j}),$$

определим оператор $T_{\varphi_j}:\mathbb{R}^{K_j}\to\mathbb{R}^{K_j}$ как оператор приведённой выше замены переменных, при этом конус C_{K_j} преобразуется в верхнее полупространство $\mathbb{R}^{K_j}_+=\{x\in\mathbb{R}^{K_j}: x_{K_j}=(x'_{K_j},x_{k_j}),\ x_{k_j}>0\}$.

Замечание 2. Разумеется, эта замена переменных нужна только в многомерном случае $(m\geqslant 2)$, в одномерном случае имеется только один конус – луч, граница которого представляет собой точку.

В рассуждениях ниже будем пользоваться обозначением F_m для преобразования Фурье в m-мерном пространстве, следовательно, F_{K_j} обозначает преобразование Фурье в пространстве $\mathbb{R}^{K_j}$.

Согласно результатам статьи [8] имеют место соотношения $F_{K_j}T_{\varphi_j}=V_{\varphi_j}F_{K_j}$.

Далее введём оператор $T_\varphi:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^M$ по формуле $T_\varphi=\prod_{j=1}^n T_{\varphi_j}$ и получим оператор $V_\varphi=\prod_{j=1}^n V_{\varphi_j}$, для которого справедливо тождество $F_M T_\varphi=V_\varphi F_M$. Введём также векторы $N=(n_1,\ldots,n_n)$, $L=(l_1,\ldots,l_n)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $n_j,l_j\in\mathbb{N}$, $|\delta_j|<1/2$, $j=\overline{1,n}$.

Теорема 2. *Если символ $\tilde A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C с индексом $\varkappa$ таким, что $\varkappa-S=N+\varepsilon$, то общее решение уравнения (3) в образах Фурье имеет следующий вид:*

$$\tilde u(\xi)=A_{\neq}^{-1}(\xi)V_\varphi^{-1}\Bigg(\sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{l_n=1}^{n_n}\tilde c_L(\xi'_K)\xi_{k_1}^{l_1-1}\xi_{k_2}^{l_2-1}\cdots\xi_{k_n}^{l_n-1}\Bigg),\tag{4}$$

где $c_L(x'_K)\in H^{S_L}(\mathbb{R}^{M-n})$ – произвольные функции,

$$S_L=(s_1-\varkappa_1+l_1-1/2,\ldots,s_n-\varkappa_n+l_n-1/2),\quad l_j=\overline{1,n_j},\quad j=\overline{1,n}.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S\leqslant\mathrm{const}\sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{l_n=1}^{n_n}\|c_L\|_{S_L}.$$

2. Краевые задачи. В этом пункте рассмотрим некоторые простые постановки краевых задач, связанных с теоремой 2, которая устанавливает множественность возможных решений уравнения (3). Чтобы выделить единственное решение, нужны дополнительные условия. Начнём со случая двумерного конуса. Присутствие в формуле (4) оператора V_φ сильно затрудняет постановку и исследование краевых задач, однако двумерный случай – редкое исключение, где можно обойтись без такого оператора. Это было продемонстрировано в монографии [4], а сравнение двух вариантов представлено в [7].

2.1. Плоский угол и общее решение. Для случая плоского угла возможна только одна ситуация с различной гладкостью по переменным, а именно по одной переменной имеется гладкость порядка s_1, по другой – s_2. Наш конус C имеет вид прямого произведения двух лучей, можно считать его первым квадрантом. Предполагается, что символ $\tilde A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C с индексом $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2)$ таким, что $\varkappa_j-s_j=n_j+\varepsilon_j$, $n_j\in\mathbb{N}$, $|\varepsilon_j|<1/2$, $j=1,2$. Покажем как в этом случае выглядит формула общего решения (4).

Положим
$$u_-(x) = -(Au)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$
В силу равенства (3) $u_-(x) = 0, \ x \in C$. Запишем уравнение (3) в виде
$$(Au)(x) + u_-(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$
применим к нему преобразование Фурье:
$$\tilde{A}(\xi)\tilde{u}(\xi) + \tilde{u}_-(\xi) = 0,$$
и после волновой факторизации символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно C получим равенство
$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi) = -A_{=}{}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi).$$

По лемме 1
$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi), A_{=}{}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(\mathbb{R}^2),$$
но более точные включения следующие (см. детали в [4]):
$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(C), \quad A_{=}{}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}). \tag{5}$$

Из включений (5) сразу следует, что обратным преобразованием Фурье этих (обобщённых) функций в силу их равенства может быть только функция, сосредоточенная на границе квадранта. Учитывая структуру таких функций [24], можем записать
$$F^{-1}(A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)) = \sum_{k=1}^{r_1} c_k(x_1)\delta^{k-1}(x_2) + \sum_{k=1}^{r_2} d_k(x_2)\delta^{k-1}(x_1)$$
или
$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\bigg(\sum_{k=1}^{r_1} \tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1} + \sum_{k=1}^{r_2} \tilde{d}_k(\xi_2)\xi_1^{k-1}\bigg).$$
Осталось уточнить количество слагаемых в суммах и показатель s_k пространства $H^{s_k}(\mathbb{R})$, в которое входят функции c_k, d_k.

Выделим одно слагаемое, например $A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1}$, и оценим его:
$$\|A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1}\|_S^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi)|^2|\tilde{c}_k(\xi_1)|^2|\xi_2|^{2(k-1)}(1+|\xi_1|)^{2s_1}(1+|\xi_2|)^{2s_2}\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2(1+|\xi_1|)^{2(s_1-\varkappa_1)}\,d\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi_2|)^{2(s_2-\varkappa_2+k-1)}\,d\xi_2.$$

Интеграл
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi_2|)^{2(s_2-\varkappa_2+k-1)}\,d\xi_2$$
будет сходящимся при условии $2(s_2-\varkappa_2+k-1) < -1$ или $-n_2-\varepsilon_2+k < 1/2$. Последнее неравенство справедливо при $k = \overline{1, n_2}$. Таким образом, если $\tilde{c}_k \in \tilde{H}^{-n_1-\varepsilon_1}(\mathbb{R})$, то получаем представление
$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\bigg(\sum_{k=1}^{n_2} \tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{d}_k(\xi_2)\xi_1^{k-1}\bigg)$$

и оценку для решения

$$\|u\|_S \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{k=1}^{n_2}[c_k]_{-n_1-\delta_1}+\sum_{k=1}^{n_1}[\,d_k]_{-n_2-\delta_2}\right),$$

здесь и далее $[\,\cdot\,]_s$ обозначает обычную H^s-норму на прямой.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть C – первый квадрант на плоскости и символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию с индексом $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2)$ таким, что $\varkappa_j-s_j=n_j+\varepsilon_j$, $n_j\in\mathbb{N}$, $|\varepsilon_j|<1/2$, $j=1,2$. Тогда общее решение уравнения (3) в пространстве $H^S(C)$, $S-(s_1,s_2)$, имеет вид*

$$\tilde{u}(\xi)=A_{\neq}^{-1}(\xi)\left(\sum_{k=1}^{n_2}\tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n_1}\tilde{\ }d_k(\xi_2)\xi_1^{k-1}\right).$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{k=1}^{n_2}[c_k]_{-n_1-\delta_1}+\sum_{k=1}^{n_1}[\,d_k]_{-n_2-\delta_2}\right).$$

2.2. Граничные условия Дирихле и Неймана и интегральные уравнения. Рассмотрим один частный случай, когда можно ограничиться классическими условиями Дирихле и Неймана для определения произвольных функций, входящих в структуру общего решения.

Пусть $n_1=1$, $n_2=2$. Согласно теореме 3 общее решение уравнения имеет вид

$$\tilde{u}(\xi)=A_{\neq}^{-1}(\xi)(c_1(\xi_1)+c_2(\xi_1)\xi_2+\ d_1(\xi_2))$$

и содержит три произвольные функции c_1, c_2, d_1, которые предстоит однозначно определить для получения единственного решения. На сторонах угла зададим граничные условия следующего вида:

$$u_{|_{x_2=0}}=f(x_1),\quad \left(-i\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_2=0}=g(x_1),\quad u|_{x_1=0}=h(x_2). \tag{6}$$

В образах Фурье условия (6) имеют вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{f}(\xi_1),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_2\tilde{u}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{g}(\xi_1),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1=\tilde{h}(\xi_2).$$

Подставив их в формулу общего решения, получим следующую систему линейных интегральных уравнений относительно трёх неизвестных функций c_1, c_2 и d_1:

$$a_1(\xi_1)c_1(\xi_1)+b_1(\xi_1)c_2(\xi_1)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d_1(\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{f}(\xi_1),$$

$$b_1(\xi_1)c_1(\xi_1)+p_1(\xi_1)c_2(\xi_1)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_2A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d_1(\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{g}_1(\xi_1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)c_1(\xi_1)\,d\xi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_2A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)c_2(\xi_1)\,d\xi_1+p_2(\xi_2)\,d_1(\xi_2)=\tilde{h}(\xi_2), \tag{7}$$

где введены обозначения

$$a_1(\xi_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2,\quad b_1(\xi_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_2A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2,$$

$$p_1(\xi_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_2^2A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2,\quad p_2(\xi_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть $s_1>1/2$, $s_2>3/2$ и символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C с индексом $\varkappa$ таким, что $\varkappa_1-s_1=1+\varepsilon_1$, $|\delta_1|<1/2$, $\varkappa_2-s_2=2+\varepsilon_2$, $|\delta_2|<1/2$. Тогда краевая задача (3), (6) однозначно разрешима в пространстве $H^S(C)$, если система интегральных уравнений (7) имеет единственное решение c_1, c_2 и d_1.*

2.3. Интегральные и разностные уравнения. Система интегральных уравнений (7), полученная в предыдущем пункте, непроста, и трудно предложить какой-либо приемлемый метод для её решения. Однако если ввести некоторые дополнительные предположения относительно символа $\tilde{A}(\xi)$, то эту систему можно редуцировать к системе разностных уравнений первого порядка. Опишем эту возможность.

Предположим, что множитель $A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)$ является положительно однородной функцией разного порядка по переменным ξ_1, ξ_2, именно, по первой переменной порядка $\varkappa_1$, а по второй – $\varkappa_2$, при всех $t>0$, $A_{\neq}(t\xi_1,t\xi_2)=t^{\varkappa_1+\varkappa_2}A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)$.

В этом случае нетрудно убедиться в справедливости следующего свойства однородности.

Лемма 2. *Функции a_1, b_1, p_1, p_2 обладают следующим свойством однородности для всех $t>0$:*

$$a_1(t\xi_1)=t^{1-\varkappa_1-\varkappa_2}a_1(\xi_1),\quad b_1(t\xi_1)=t^{2-\varkappa_1-\varkappa_2}b_1(\xi_1),$$

$$p_1(t\xi_1)=t^{3-\varkappa_1-\varkappa_2}p_1(\xi_1),\quad p_2(t\xi_2)=t^{1-\varkappa_1-\varkappa_2}p_2(\xi_2).$$

Систему (7) можно записать в следующем виде:

$$c_1(\xi_1)+r(\xi_1)c_2(\xi_1)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\xi_1,\xi_2)\,d_1(\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{F}(\xi_1),$$

$$c_1(\xi_1)+q(\xi_1)c_2(\xi_1)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(\xi_1,\xi_2)\,d_1(\xi_2)\,d\xi_2=\tilde{G}(\xi_1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M(\xi_1,\xi_2)c_1(\xi_1)\,d\xi_1+\xi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M(\xi_1,\xi_2)c_2(\xi_1)\,d\xi_1+d_1(\xi_2)=\tilde{H}(\xi_2),\tag{8}$$

где введены обозначения

$$b_1(\xi_1)a_1^{-1}(\xi_1)=r(\xi_1),\quad p_1(\xi_1)b_1^{-1}(\xi_1)=q(\xi_1),\quad a_1^{-1}(\xi_1)A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\equiv K(\xi_1,\xi_2),$$

$$\xi_2b_1^{-1}(\xi_1)A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)=L(\xi_1,\xi_2),\quad p_2^{-1}(\xi_2)A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)=M(\xi_1,\xi_2),\quad \tilde{f}(\xi_1)a_1^{-1}(\xi_1)=\tilde{F}(\xi_1),$$

$$\tilde{g}(\xi_1)b_1^{-1}(\xi_1)=\tilde{G}(\xi_1),\quad \tilde{h}(\xi_2)p_2^{-1}(\xi_2)=\tilde{H}(\xi_2).$$

Лемма 3. *Функции r, q положительно однородны первой степени, ядра K, L, M положительно однородны степени -1.*

Доказательство. Для функций r, q утверждение очевидно, и, следовательно, они имеют вид

$$r(t) = \begin{cases} r_1 t, & t > 0, \\ r_2 t, & t < 0, \end{cases} \quad q(t) = \begin{cases} q_1 t, & t > 0, \\ q_2 t, & t < 0, \end{cases}$$

где $r_1, r_2, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим, например, ядро $M(\xi_1, \xi_2)$. Проверяем

$$M(t\xi_1, t\xi_2) = p_2^{-1}(t\xi_2) A_{\neq}^{-1}(t\xi_1, t\xi_2) = t^{\varkappa_1+\varkappa_2-1} p_2(\xi_2) t^{-\varkappa_1-\varkappa_2} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2),$$

что и утверждалось. Лемма доказана.

Далее запишем систему (8) в виде

$$c_1(\xi_1) + r(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} K(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_{-\infty}^{0} K(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 = \tilde{F}(\xi_1),$$

$$c_1(\xi_1) + q(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} L(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_{-\infty}^{0} L(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 = \tilde{G}(\xi_1),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} M(\xi_1,\xi_2)c_1(\xi_1)\, d\xi_1 + \int\limits_{-\infty}^{0} M(\xi_1,\xi_2)c_1(\xi_1)\, d\xi_1 + \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M(\xi_1,\xi_2)c_2(\xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+ \xi_2 \int\limits_{-\infty}^{0} M(\xi_1,\xi_2)c_2(\xi_1)\, d\xi_1 + d_1(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2).$$

Заменив в интегралах по отрицательной полуоси переменную интегрирования на переменную с противоположным знаком, получим новую систему с интегралами по положительной полуоси:

$$c_1(\xi_1) + r(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} K(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} K(\xi_1,-\xi_2)\, d_1(-\xi_2)\, d\xi_2 = \tilde{F}(\xi_1),$$

$$c_1(\xi_1) + q(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} L(\xi_1,\xi_2)\, d_1(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} L(\xi_1,-\xi_2)\, d_1(-\xi_2)\, d\xi_2 = \tilde{G}(\xi_1),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} M(\xi_1,\xi_2)c_1(\xi_1)\, d\xi_1 + \int\limits_0^{+\infty} M(-\xi_1,\xi_2)c_1(-\xi_1)\, d\xi_1 + \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M(\xi_1,\xi_2)c_2(\xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+ \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M(-\xi_1,\xi_2)c_2(-\xi_1)\, d\xi_1 + d_1(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2). \tag{9}$$

Теперь преобразуем эту систему, увеличив число неизвестных и сделав все входящие функции и ядра определёнными только для положительных значений аргументов. Введём следующие обозначения для $\xi_1, \xi_2 > 0$:

$$c_{11}(\xi_1) = c_1(\xi_1), \quad c_{12}(\xi_1) = c_1(-\xi_1), \quad c_{21}(\xi_1) = c_2(\xi_1), \quad c_{22}(\xi_1) = c_2(-\xi_1),$$

$$d_{11}(\xi_2) = d_1(\xi_2), \quad d_{12}(\xi_2) = d_1(-\xi_2), \quad F_1(\xi_1) = \tilde{F}(\xi_1), \quad F_2(\xi_1) = \tilde{F}(-\xi_1),$$

$$G_1(\xi_1) = \tilde{G}(\xi_1), \quad G_2(\xi_1) = \tilde{G}(-\xi_1), \quad H_1(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2), \quad H_2(\xi_2) = \tilde{H}(-\xi_2).$$

По ядрам K, L, M определим новые ядра для положительных значений аргументов:

$$K_{11}(\xi_1,\xi_2) = K(\xi_1,\xi_2), \quad K_{12}(\xi_1,\xi_2) = K(\xi_1,-\xi_2),$$

$$K_{21}(\xi_1,\xi_2) = K(-\xi_1,\xi_2), \quad K_{22}(\xi_1,\xi_2) = K(-\xi_1,-\xi_2),$$

аналогично определяются $L_{ij}(\xi_1,\xi_2)$, $M_{ij}(\xi_1,\xi_2)$, $i,j=1,2$.

Система (9) примет вид 6×6-системы линейных интегральных уравнений на положительной полуоси

$$c_{11}(\xi_1) + r_1\xi_1 c_{21}(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} K_{11}(\xi_1,\xi_2)\, d_{11}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} K_{12}(\xi_1,\xi_2)\, d_{12}(\xi_2)\, d\xi_2 = F_1(\xi_1),$$

$$c_{11}(\xi_1) + q_1\xi_1 c_{21}(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} L_{11}(\xi_1,\xi_2)\, d_{11}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} L_{12}(\xi_1,\xi_2)\, d_{12}(\xi_2)\, d\xi_2 = G_1(\xi_1),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} M_{11}(\xi_1,\xi_2) c_{11}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int\limits_0^{+\infty} M_{21}(\xi_1,\xi_2) c_{12}(\xi_1)\, d\xi_1 + \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M_{11}(\xi_1,\xi_2) c_{21}(\xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+\, \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M_{21}(\xi_1,\xi_2) c_{22}(\xi_1)\, d\xi_1 + d_{11}(\xi_2) = H_1(\xi_2),$$

$$c_{12}(\xi_1) + r_2\xi_1 c_{22}(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} K_{21}(\xi_1,\xi_2)\, d_{11}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} K_{22}(\xi_1,\xi_2)\, d_{12}(\xi_2)\, d\xi_2 = F_2(\xi_1),$$

$$c_{12}(\xi_1) + q_2\xi_1 c_{22}(\xi_1) + \int\limits_0^{+\infty} L_{21}(\xi_1,\xi_2)\, d_{11}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int\limits_0^{+\infty} L_{22}(\xi_1,\xi_2)\, d_{12}(\xi_2)\, d\xi_2 = G_2(\xi_1),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} M_{12}(\xi_1,\xi_2) c_{11}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int\limits_0^{+\infty} M_{22}(\xi_1,\xi_2) c_{12}(\xi_1)\, d\xi_1 + \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M_{12}(\xi_1,\xi_2) c_{21}(\xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+\, \xi_2 \int\limits_0^{+\infty} M_{22}(\xi_1,\xi_2) c_{22}(\xi_1)\, d\xi_1 + d_{12}(\xi_2) = H_2(\xi_2).$$

К этой системе можно применить преобразование Меллина [25]

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) t^{\lambda-1} dt, \quad \lambda = s + i\sigma,$$

в результате чего получим с учётом свойства преобразования Меллина

$$\widehat{tf(t)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda+1)$$

следующую систему разностных уравнений первого порядка:

$$\hat{c}_{11}(\lambda) + r_1\hat{c}_{21}(\lambda+1) + \hat{K}_{11}(\lambda)\,\hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{K}_{12}(\lambda)\,\hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{F}_1(\lambda),$$

$$\hat{c}_{12}(\lambda) + r_2\hat{c}_{22}(\lambda+1) + \hat{K}_{21}(\lambda)\,\hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{K}_{22}(\lambda)\,\hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{F}_2(\lambda),$$

$$\hat{c}_{11}(\lambda) + q_1\hat{c}_{21}(\lambda+1) + \hat{L}_{11}(\lambda)\,\hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{L}_{12}(\lambda)\,\hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{G}_1(\lambda),$$

$$\hat{c}_{12}(\lambda) + q_2\hat{c}_{22}(\lambda+1) + \hat{L}_{21}(\lambda)\,\hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{L}_{22}(\lambda)\,\hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{G}_1(\lambda),$$

$$\hat{M}_{11}(\lambda)\hat{c}_{11}(\lambda) + \hat{M}_{21}(\lambda)\hat{c}_{12}(\lambda) + \hat{M}_{11}(\lambda+1)\hat{c}_{21}(\lambda+1) + \hat{M}_{21}(\lambda+1)\hat{c}_{22}(\lambda+1) + \hat{d}_{11}(\lambda) = \hat{H}_1(\lambda),$$

$$\hat{M}_{12}(\lambda)\hat{c}_{11}(\lambda) + \hat{M}_{22}(\lambda)\hat{c}_{12}(\lambda) + \hat{M}_{12}(\lambda+1)\hat{c}_{21}(\lambda+1) + \hat{M}_{22}(\lambda+1)\hat{c}_{22}(\lambda+1) + \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{H}_2(\lambda), \quad (10)$$

где под $\hat{K}_{ij}(\lambda)$, $\hat{L}_{ij}(\lambda)$ понимается преобразование Меллина функций $K_{ij}(t,1)$, $L_{ij}(t,1)$, а под $\hat{M}_{ij}(\lambda)$ – преобразование Меллина функций $M_{ij}(1,t)$, $i,j=1,2$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Если функция обладает свойством обобщённой положительной однородности, т.е.*

$$A_{\neq}(t\xi_1, t\xi_2) = t^{\varkappa_1+\varkappa_2}A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)$$

при всех $t>0$, *то система интегральных уравнений (7) может быть сведена к* 6×6-*системе разностных уравнений первого порядка (10).*

Заключение. Описан простейший вариант краевой задачи в пространстве Соболева–Слободецкого с различной гладкостью по переменным. К сожалению, формула общего решения в многомерном случае слишком громоздка, чтобы записать и исследовать общую краевую задачу, однако в ряде случаев можно получить содержательные результаты. Авторы предполагают продолжать работу в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., 1973.
2. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса краевых задач. М., 1986.
3. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Краевые задачи в областях с кусочно гладкой границей. М., 1991.
4. *Vasil'ev V.B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-smooth Domains. Dordrecht; Boston; London, 2000.
5. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М., 2010.
6. *Vasilyev V.B.* On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. V. 9. № 2. P. 227–237.
7. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
8. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. P. 9252–9263.
9. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения в конусах с точками сопряжения на границе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 9. С. 1123–1135.
10. *Vasilyev V.B.* On some distributions associated to boundary value problems // Complex Var. Ell. Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 888–898.
11. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. М., 1994.
12. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
13. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М., 1986.
14. *Nagel A., Ricci F., Stein E.M., Wainger S.* Algebras of singular integral operators with kernels controlled by multiple norms // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2018. V. 256. № 1230.
15. *Vasilyev V., Polunin V., Shmal I.* On some solvability theorems for pseudo-differential equations // arXiv:2302.10054 [math.AP].

16. *Vasilyev V.B.* On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone // Math. Bohem. 2014. V. 139, № 2. P. 333–340.
17. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators on manifolds with a singular boundary // Modern Problems in Applied Analysis / Eds. P. Drygas, S. Rogosin. Cham, 2018. P. 169–179.
18. *Vasilyev V.B.* Asymptotical analysis of singularities for pseudo differential equations in canonical non-smooth domains // Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects / Eds. C. Constanda, P.J. Harris. Boston, 2011. P. 379–390.
19. *Vasilyev V.B.* On the asymptotic expansion of certain plane singular integral operators // Bound. Value Probl. 2017. V. 116. P. 1–13.
20. *Васильев В.Б.* Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1129–1149.
21. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. № 3. С. 3–14.
22. *Васильев В.Б.* Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 22–37.
23. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения // Прикл. математика и мат. физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 3–16.
24. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
25. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.

Белгородский государственный
национальный исследовательский университет

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.