

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
КОЛЕБЛЕМОСТИ, ВРАЩАЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ
ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

© 2023 г. И. Н. Сергеев

Изучены показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости, аналогичные показателям Ляпунова и адаптированные к нелинейным системам дифференциальных уравнений. Перечислены самые разные – как гарантированные, так и различные реализуемые – соотношения между линейными, сферическими, радиальными и шаровыми разновидностями этих показателей, а также рассмотрены их взаимосвязи с аналогичными показателями системы первого приближения.

DOI: 10.31857/S0374064123060031, EDN: FFMENE

Введение. Картина качественных свойств решений дифференциальных уравнений, важнейшим из которых является устойчивость [1], заметно обогащается знанием их колебательных свойств. Для количественного изучения последних были введены сначала *характеристические частоты* [2], а затем и показатели *колеблемости*, *вращаемости* и *блуждаемости* [3, 4]. Эти характеристики исследовались многими авторами (см., например, [5–14]).

Однако все перечисленные выше показатели (называемые ниже *линейными*) оказались применимы лишь к решениям, определённым гарантированно на всей положительной полуоси времени, тогда как для решений нелинейных систем такой гарантии дать нельзя. В настоящей работе развиваются начатые в статье [15] попытки распространить определения этих показателей на системы, решения которых не обязательно продолжаемы на всю полуось, а именно рассматриваются *сферические* [16], *радиальные* [17] и *шаровые* [18] функционалы и показатели.

Ниже для указанных показателей нелинейной системы рассматриваются самые разнообразные (как фиксированные, так и вариативные) их взаимосвязи не только друг с другом, но и с аналогичными показателями соответствующей системы линейного приближения [19, 20]. Перспектива представленной работы видится в возможности дальнейшего детального исследования колебательных свойств исходной системы по её первому приближению [21].

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, *нелинейную* систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

причём на нелинейную добавку

$$f(t, x) - f'_x(t, 0)x = o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

стандартное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем.

Через $x_f(\cdot, x_0)$ будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через G_* и G_δ – множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих условию $x_0 \neq 0$ или соответственно $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1. Три основных функционала $K(t, u)$, которые определены на множестве пар, образуемых моментами времени $t > 0$ и непрерывно-дифференцируемыми функциями $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, отвечают показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho, \quad \text{где } K = N, \Theta, P \text{ соответственно,} \quad (3)$$

и описывают следующие конкретные свойства решений:

а) *колеблемость* в случае $\varkappa = \nu$, т.е. когда $K(t, u) = N(t, u)$ – нормированное (умноженное на π) число нулей на промежутке $(0, t]$ функции $P_1 u$, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда хотя бы один из нулей $\tau \in [0, t]$ кратен (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)'$), считаем выражение $N(t, u)$ неопределённым;

б) *вращаемость (ориентированная)* в случае $\varkappa = \theta$, т.е. когда $K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ есть модуль *ориентированного угла* $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t , с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0, t]$, считаем выражение $\Theta(t, u)$ неопределённым;

в) *блуждаемость* в случае $\varkappa = \rho$, т.е. когда

$$K(t, u) = P(t, u) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|} \right| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* и *частотную вращаемость* [4], за *поворачиваемость* данного ранга [22], а также за *плоскую вращаемость* [23].

Замечание 1. В работах [15, 17–21] функционалы из определения 1 в критической ситуации считались принимающими вполне определённое, хотя и бесконечное значение $+\infty$. Такой подход приводил к тому, что верхние радиальные или шаровые показатели колеблемости или вращаемости могли равняться $+\infty$, что лишило бы их содержательного смысла – именно этим и обусловлено нынешнее изменение их значений в критических ситуациях.

Определение 2. Для каждого функционала (3) по системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$, невырожденному оператору $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$, а при необходимости и начальному значению $x_0 \in G_*$, определим функционалы:

а) *линейный и сферический*

$$K_l(f, x_0, t, L) \equiv K(t, Lx_f(\cdot, x_0)), \quad K_s(f, x_0, t, L) \equiv K(t, Lx_{f_s}(\cdot, x_0)),$$

где $f_s(t, x) \equiv P_x^\perp f(t, x)$, а $P_x^\perp$ – ортогональный проектор на гиперплоскость, ортогональную вектору $x \in \mathbb{R}^n$ (причём *сферической* называем и систему, получаемую из (1) заменой её правой части f на f_s);

б) *нижние радиальный и шаровой*

$$\check{K}_r(f, x_0, t, L) \equiv \lim_{\mu \rightarrow +0} K(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)), \quad \check{K}_b(f, t, L) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow 0} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)), \quad (4)$$

а *верхние радиальный* $\hat{K}_r(f, x_0, t, L)$ и *шаровой* $\hat{K}_b(f, t, L)$ функционалы зададим теми же формулами (4), но с заменой в них нижних пределов при $\mu \rightarrow +0$ и $x_0 \rightarrow 0$ верхними соответственно.

Функционалы из определений 1 и 2 применимы только к решениям, которые определены на всём рассматриваемом промежутке, а для линейных показателей в следующем определении – сразу на всей полуоси, что может оказаться принципиально неосуществимым (причём возможно даже при всех $x_0 \in G_*$). Именно эту проблему и призваны устранить сферические показатели при достаточно близких к нулю начальных значениях $x_0 \in G_\delta$, а также радиальные и шаровые показатели при любых $x_0 \in G_*$.

Определение 3. Для каждого функционала (3) по системе (1), а при необходимости и начальному значению $x_0 \in G_*$, зададим соответствующие *показатели колеблемости, вращаемости или блуждаемости*:

1) *нижние слабые линейный и сферический* – формулами

$$\check{\kappa}_l^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K_l(f, x_0, t, L), \quad \check{\kappa}_s^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K_s(f, x_0, t, L); \quad (5)$$

2) *нижние слабые радиальный и шаровой* – формулами

$$\check{\kappa}_r^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_r(f, x_0, t, L), \quad \check{\kappa}_b^\circ(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L); \quad (6)$$

3) *верхние слабые линейный* $\hat{\kappa}_l^\circ(f, x_0)$, *сферический* $\hat{\kappa}_s^\circ(f, x_0)$, *радиальный* $\hat{\kappa}_r^\circ(f, x_0)$ и *шаровой* $\hat{\kappa}_b^\circ(f)$ – теми же формулами (5) и (6), но с заменой в них всех нижних пределов при $t \rightarrow +\infty$ и нижних функционалов $\check{K}_r$, $\check{K}_b$ верхними соответственно;

4) *нижние или верхние сильные линейный* $\check{\kappa}_l^\bullet(f, x_0)$, *сферический* $\check{\kappa}_s^\bullet(f, x_0)$, *радиальный* $\check{\kappa}_r^\bullet(f, x_0)$ и *шаровой* $\check{\kappa}_b^\bullet(f)$ (где тильде соответствует “галочка” ($\check{}$) или “крышечка” ($\hat{}$)) – теми же формулами (5) и (6) для нижних показателей или аналогичными для верхних, но с переставленными в них местами нижними или верхними пределами при $t \rightarrow +\infty$ и точными нижними гранями по $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$;

5) *точные*, образуемые при совпадении какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним, – в этом случае разрешим опускать в их обозначении и “галочку”, и “крышечку”;

6) *абсолютные*, образуемые при совпадении какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным, – в этом случае разрешим опускать в их обозначении верхние индексы (все кружки).

Замечание 2. Значения функционалов колеблемости или вращаемости из определения 2 оказываются неопределёнными в критических ситуациях из определения 1. Такие ситуации могут наступать даже и отдельно для какого-либо радиального функционала, не будучи критическими для шарового (см. замечание 5 ниже). Однако некритические значения операторов $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ типичны по мере [24, 25], а, значит, критические заведомо устранимы взятием точной нижней грани по этим операторам в формулах из определения 3.

Обозначения. Наряду с уже принятыми обозначениями из равенств (3) и с уже использованным в п. 4) определения 3 выше единым обозначением “галочки” и “крышечки” в виде тильды, в дальнейшем для краткости также будем предполагать, что каждый из следующих параметров принимает любое (одно и то же на протяжении текущего отдельного соотношения) из перечисленных для него значений

$$\kappa = \nu, \theta, \rho, \quad K = N, \Theta, P, \quad k = l, s, r, \quad \sim = \check{}, \hat{}, \quad * = \circ, \bullet, \quad x_0 \in G_*,$$

а запись $\kappa(f, M) = a$ означает ниже, что множество $\kappa(f, M) \equiv \{\kappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$ состоит в точности из одного числа a .

2. Формулировки теорем. В линейном случае все одноимённые линейные, сферические и радиальные показатели оказываются просто неразличимыми, о чем и говорит

Теорема 1. При каждом $n > 1$ для любой линейной системы (2) верны равенства

$$\check{\kappa}_s^*(f, x_0) = \check{\kappa}_r^*(f, x_0) = \check{\kappa}_l^*(f, x_0).$$

Нижние показатели не превосходят аналогичных верхних, слабые – соответствующих сильных, нижние шаровые – нижних радиальных, а применительно к показателям блуждаемости ещё и верхние радиальные не превосходят верхних шаровых, как показывает

Теорема 2. При каждом $n > 1$ для любой системы (1) верны неравенства

$$\check{\kappa}_k^*(f, x_0) \leq \hat{\kappa}_k^*(f, x_0), \quad \check{\kappa}_b^*(f) \leq \hat{\kappa}_b^*(f), \quad \check{\kappa}_k^\circ(f, x_0) \leq \check{\kappa}_k^\bullet(f, x_0), \quad \check{\kappa}_b^\circ(f) \leq \check{\kappa}_b^\bullet(f), \quad (7)$$

$$\check{\kappa}_b^*(f) \leq \check{\kappa}_r^*(f, x_0), \quad \hat{\rho}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\rho}_b^*(f). \quad (8)$$

Пары нижних и верхних радиальных или шаровых показателей блуждаемости системы совпадают с парами их аналогов системы первого приближения, тогда как пары показателей колеблемости или вращаемости системы лишь оценивают пары соответствующих аналогов системы первого приближения снаружи, что и подтверждает

Теорема 3. При каждом $n > 1$ для любой системы (1) с системой первого приближения (2) верны соотношения

$$\tilde{\rho}_r^*(f, x_0) = \tilde{\rho}_r^*(f_l, x_0), \quad \tilde{\rho}_b^*(f) = \tilde{\rho}_b^*(f_l), \quad (9)$$

$$\check{\kappa}_r^*(f, x_0) \leq \check{\kappa}_r^*(f_l, x_0), \quad \check{\kappa}_b^*(f) \leq \check{\kappa}_b^*(f_l), \quad \kappa = \nu, \theta. \quad (10)$$

Результаты теорем 2 и 3, относящиеся исключительно к показателям блуждаемости, в двумерном случае можно перенести также и на показатели вращаемости, о чём свидетельствует

Теорема 4. При $n = 2$ для любой системы (1) с системой первого приближения (2) верны соотношения

$$\hat{\theta}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\theta}_b^*(f), \quad \tilde{\theta}_r^*(f, x_0) = \tilde{\theta}_r^*(f_l, x_0), \quad \tilde{\theta}_b^*(f) = \tilde{\theta}_b^*(f_l). \quad (11)$$

Из теоремы 1 вытекает, что сферические и радиальные показатели заведомо не более упорядочены между собой, чем их линейные варианты (см. работы [3, 4]), поскольку любое равенство или неравенство, справедливое для линейных показателей линейной системы, реализуется по меньшей мере на ней же для одноимённых сферических и радиальных показателей. Более того, для нелинейных систем соотношения между линейными, сферическими и радиальными (вместе с шаровыми) показателями оказываются просто непредсказуемыми, что и разъясняет

Теорема 5. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ для любых $0 \leq \alpha, \beta < +\infty$ и $0 \leq \gamma \leq +\infty$ существует система (1) с системой первого приближения (2), удовлетворяющая равенствам

$$\varkappa_b(f) = \varkappa_b(f_l) = \varkappa_k(f_l, G_*) = \varkappa_r(f, G_*) = \alpha, \quad \varkappa_s(f, G_*) = \beta, \quad \varkappa_l(f, G_*) = \gamma. \quad (12)$$

Каждый из показателей колеблемости, а также сразу все линейные и сферические показатели блуждаемости (в отличие от радиальных и шаровых в равенствах (9)) у двумерной периодической системы могут не совпадать с соответствующими показателями системы первого приближения, что и демонстрирует

Теорема 6. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существуют три периодических и устойчивых по Ляпунову системы, первая из которых, линейная вида (2) и служащая системой первого приближения для двух других, удовлетворяет соотношениям

$$0 = \theta_b(f_l) = \theta_k(f_l, G_*) < \kappa_k(f_l, G_*) = \kappa_b(f_l) = 1, \quad \kappa = \rho, \nu, \quad (13)$$

а вторая и третья системы вида (1) – соответственно соотношениям

$$0 = \theta_b(f) = \theta_k(f, G_*) = \rho_s(f, G_*) = \rho_l(f, G_*) = \nu_k(f, G_*) = \check{\nu}_b(f) < \hat{\nu}_b(f) = 1, \quad (14)$$

$$0 = \theta_b(f) = \theta_k(f, G_*) < 1 = \rho_s(f, G_*) = \rho_l(f, G_*) = \nu_k(f, G_*) = \check{\nu}_b(f) < \hat{\nu}_b(f) = 2. \quad (15)$$

В трёхмерном и даже автономном случае возможно также несовпадение верхних шаровых и даже некоторых точных радиальных показателей вращаемости и колеблемости с соответствующими показателями системы первого приближения, что и обосновывает

Теорема 7. При $n = 3$ и $G = \mathbb{R}^3$ существует автономная система (1) с устойчивой по Ляпунову системой первого приближения (2), удовлетворяющая для некоторого двумерного подпространства $S \subset \mathbb{R}^3$ соотношениям

$$0 = \kappa_k(f, G_*) = \kappa_b(f) = \kappa_b(f_l) = \check{\rho}_b(f_l) = \varkappa_k(f_l, G \setminus S) < \varkappa_k(f_l, S_*) = \hat{\rho}_b(f_l) = 1, \quad \kappa = \nu, \theta.$$

Замечание 3. В примере трёхмерной линейной системы (2) из теоремы 7 верхние (причём даже точные) шаровые показатели колеблемости и вращаемости строго меньше некоторых её

одноимённых радиальных показателей. Значит, предположение о том, что правые неравенства (8) теоремы 2 переносятся (по аналогии с левыми) с блуждаемости на колеблемость и вращаемость, оказывается, вообще говоря, неверным. Это связано с нынешним изменением определений (см. замечания 1 и 5), на которые теперь уже не в полной мере распространяется утверждение теоремы 3 из работы [15].

3. Доказательства сформулированных теорем. Для обоснования некоторых утверждений теорем настоящей работы использованы идеи из статей [2–4, 15, 22–25].

Доказательство теоремы 1. В случае линейной системы (2) решения $x_f(\tau, x_0)$ при переходе от линейных показателей к сферическим умножаются на функции $|x_0|/|x_f(\tau, x_0)|$ (см. доказательство теоремы 1 [15]), а к радиальным – на малые константы $\mu > 0$. При таких преобразованиях значения функционалов и показателей (3) не меняются.

Доказательство теорем 2–4. Для любой системы (1) все неравенства (7) верны, поскольку в их правых частях, по сравнению с левыми, по определению либо вместо нижних пределов берутся такие же верхние, либо операция взятия точной нижней грани по $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ перенесена на более поздний этап.

При вычислении шаровых функционалов блуждаемости, а также вращаемости в случае $n = 2$ (т.е. когда для них также исключены критические ситуации), конкретные пределы от выражения $K(t, Lx_f(\cdot, x_0))$ при $x_0 \rightarrow 0$ берутся по всему фазовому пространству (представляющему собой полную окрестность нуля), а при вычислении аналогичных радиальных функционалов – лишь по его подмножеству (а именно по лучу). Отсюда вытекают все неравенства (8) и (11) для соответствующих показателей. Верность же первого неравенства (8) для всех остальных показателей вытекает из того факта, что никакое значение $\check{K}_r(f, x_0, t, L)$ в некритической для него ситуации не может оказаться меньшим, чем $\check{K}_b(f, t, L)$.

Пусть теперь система (2) служит первым приближением системы (1). Для произвольных $t > 0$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ при любых $\alpha, \beta > 0$ можно подобрать столь малое $\delta > 0$, что сразу при всех $\tau \in [0, t]$ и $x_0 \in G_\delta$ для решений $x(\tau) = Lx_f(\tau, x_0)$ и $y(\tau) = Lx_f(\tau, x_0)$ линейной системы $\dot{x} = B(\tau)x$ (с оператором Коши $X(\tau, s)$) и соответствующей нелинейной системы с добавкой $h(\tau, x) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) верны (с учётом ограниченности величин τ , $\|B(\tau)\|$, $\|X(\tau, s)\|$, $|x(\tau)|/|x(s)|$ при $\tau, s \in [0, t]$) оценки

$$|y(\tau) - x(\tau)| = \left| \int_0^\tau X(\tau, s)h(s, y(s)) ds \right| \leq \alpha |x(\tau)|, \quad \angle(y(\tau), x(\tau)) \leq \alpha, \quad (16)$$

из которых можно получить (уменьшив при необходимости число $\alpha > 0$) ещё и оценки

$$|\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)| = |B(\tau)(y(\tau) - x(\tau)) + h(\tau, y(\tau))| \leq \beta |x(\tau)|. \quad (17)$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ выбором достаточно малых значений α, β обеспечиваются неравенства

$$|P(t, y(t)) - P(t, x(t))| \leq t \sup_{\tau \in [0, t]} \left| \frac{|P_{y(\tau)}^\perp \dot{y}(\tau)|}{|y(\tau)|} - \frac{|P_{x(\tau)}^\perp \dot{x}(\tau)|}{|x(\tau)|} \right| \leq t\varepsilon,$$

а из них с учётом произвольности ε получаются равенства

$$\tilde{P}_r(f, x_0, t, L) = \tilde{P}_r(f, x_0, t, L), \quad \tilde{P}_b(f, t, L) = \tilde{P}_b(f, t, L),$$

из которых затем вытекают и равенства (9).

Более того, оценки (16) в случае $n = 2$ обеспечивают ещё и равенства

$$\tilde{\Theta}_r(f, x_0, t, L) = \tilde{\Theta}_r(f, x_0, t, L), \quad \tilde{\Theta}_b(f, t, L) = \tilde{\Theta}_b(f, t, L),$$

а с ними и равенства (11). В случае же $n > 2$ для каждой $x_0 \in G_*$, $t > 0$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ в некритической для функционала вращаемости ситуации проекция исходной фазовой кривой $P_2 Lx_f(\tau, x_0)$ ($\tau \in [0, t]$) на заданную плоскость отделена от нуля. Поэтому к векторам

$P_2 Lx_f(\tau, \mu x_0)$ оказываются сколь угодно близкими (по углу, по сравнению с μ) векторы $P_2 Lx_f(\tau, \mu x_0)$ сразу при каждом $\tau \in [0, t]$ и всех достаточно малых $\mu > 0$, а значит, возмущённые проекции тоже отделены от нуля и удовлетворяют равенствам

$$\Theta(t, Lx_f(\cdot, x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \Theta(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \Theta(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \Theta_r(f, x_0, t, L).$$

Отсюда вытекают и все неравенства (10) для показателей вращаемости.

Наконец, те же неравенства (10), но для показателей колеблемости, подтверждаются аналогичной близостью возмущённых проекций $P_1 Lx_f(\tau, \mu x_0)$ на заданную прямую к проекциям $P_1 Lx_f(\tau, \mu x_0)$. Действительно, в некритической ситуации исходная проекция $P_1 Lx_f(\tau, x_0)$ на одних участках отрезка $[0, t]$ отделена от нуля, а на каждом из остальных имеет строго по одному нулю при отделённой от нуля производной по τ . Благодаря оценкам (16) и (17), эти свойства сохраняются (за исключением, возможно, наличия на крайнем правом участке нуля, совпадающего с его концом t) и для возмущённых проекций при всех достаточно малых $\mu > 0$, поэтому верны равенства

$$N(t, Lx_f(\cdot, x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} N(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \tilde{N}_r(f, x_0, t, L) + \gamma, \quad \gamma \in \{0, 1\},$$

подтверждающие сделанный выше вывод о показателях колеблемости. Теоремы 2–4 доказаны.

Замечание 4. Приведённые выше рассуждения, подтверждающие неравенства (10) для нижних показателей вращаемости и колеблемости, казалось бы, обосновывают также и аналогичные (обратного знака) неравенства для верхних показателей. Однако по меньшей мере для радиальных показателей (для шаровых – вопрос пока открыт) это предположение оказывается неверным: уже в теоремах 6 и 7 некоторые верхние радиальные показатели колеблемости и вращаемости нелинейной системы меньше соответствующих показателей системы её первого приближения. Причина этого явления аналогична той, что описана в замечании 5 ниже.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим систему (1), которая в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ записывается в виде

$$\dot{x} = Ex + \zeta(t, x)Ix \equiv f(t, x), \quad E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где для заданного возрастающего по $m \in \mathbb{Z}$ семейства функций $\eta_m(t) \equiv (t + 2)^m$ ($t \in \mathbb{R}_+$) коэффициент $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+ \times G)$ удовлетворяет условиям

$$\zeta(t, x) \equiv \begin{cases} \alpha, & |x| \leq \eta_{-2}(t) \rightarrow +0; \\ \beta, & |x| \in [\eta_{-1}(t), \eta_1(t)] \rightarrow [0, +\infty); \\ \xi_\gamma(|x|), & |x| \geq \eta_2(t) \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$\xi_\gamma(r) \equiv \begin{cases} 0, & \gamma = 0; \\ r\gamma/(r + \gamma) \in (0, \gamma), & \gamma \in (0, +\infty); \\ r, & \gamma = +\infty, \end{cases} \quad r > 0$$

(с произвольным его доопределением в областях $\eta_{-2}(t) < |x| < \eta_{-1}(t)$ и $\eta_1(t) < |x| < \eta_2(t)$). Первое слагаемое в правой части системы (18) обеспечивает экспоненциальный рост нормы решения, а второе отвечает за скорость его вращения, зависящую от того, где оно проходит.

Соответствующая система первого приближения совпадает с системой (18) при $\zeta(t, x) = \alpha$, поскольку именно это равенство выполнено для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ при всех достаточно малых $|x|$. В области, где для системы (18) выполнено то же равенство, целиком лежат прямоугольники вида $\Pi_{t\varepsilon} \equiv [0, t] \times \{|x| \leq \varepsilon\}$ при каждом $t > 0$ и зависящем от него достаточно малом $\varepsilon > 0$. Поэтому для любого фиксированного $t > 0$ и некоторого $\delta > 0$ сразу при всех $x_0 \in G_\delta$ графики решений $x_f(\tau, x_0)$ окажутся при $\tau \in [0, t]$ лежащими в прямоугольнике $\Pi_{t\varepsilon}$, а значит, будет выполнена вся первая цепочка равенств (12).

Далее, правая часть соответствующей сферической системы имеет вид $f_s \equiv \zeta(t, x)Ix$, поэтому график любого решения $x_{f_s}(t, x_0)$ (где $x_0 \in G_*$ и $|x_{f_s}(t, x_0)| = |x_0|$ при $t \in \mathbb{R}_+$) при всех достаточно больших t лежит в области, где $\zeta(t, x) = \beta$, а значит, для всех показателей такого решения имеем $\varkappa_s(f, x_0) = \beta$.

Наконец, для любого $x_0 \in G_*$ график решения $x_f(t, x_0)$ с некоторого момента окажется в области, где $\zeta(t, x) = \xi_\gamma(|x|) \in [0, \gamma]$, а в силу свойства $\xi_\gamma(r) \rightarrow \gamma$ при $r \rightarrow +\infty$ он для каждого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших t будет лежать в области, где $\gamma - \varepsilon < \zeta(t, x) \leq \gamma$. Отсюда получаем оценки $\gamma - \varepsilon \leq \varkappa_l(f, x_0) \leq \gamma$, из которых, с учётом произвольности ε , вытекает и последнее равенство (12). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим линейную периодическую систему (2), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ с помощью матрицы I (18) в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_l(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \cos t.$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \frac{\pi}{2} \sin t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad x_f(t_m, x_0) = (-1)^{m-1} x_f(t_1, x_0), \quad t_m \equiv \pi m - \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Последнее свойство, инвариантное относительно линейных преобразований $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ решения x_f , обеспечивает выполнение всех равенств (13).

Рассмотрим первую нелинейную периодическую систему вида (1) с правой частью

$$f(t, x) = \psi_-(|x|) \cdot f_l(t, x) = f_s(t, x), \quad \psi_\pm(r) \equiv 1 \pm \frac{r}{r+1} \in (0, 2), \quad (19)$$

для которой имеем

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2}, \psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2} \right] \subset (-\pi/2, \pi/2), \quad |x_0| \neq 0.$$

С одной стороны, в силу последнего строгого включения для любого $x_0 \in G_*$ можно указать такой поворот $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$, что сразу все векторы $Lx_f(t, \mu x_0)$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in (0, 1]$) лежат на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой $p \subset \mathbb{R}^2$ (вдоль которой действует проектор P_1 при подсчёте числа нулей в п. а) определения 1). Более того, если оператор L задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора $e \perp p$, то можно делать сколь угодно малыми ещё и все значения $t^{-1}P(t, Lx_f(t, x_0))$ ($t \in \mathbb{R}_+$). Отсюда вытекают все равенства нулю из цепочки (14). С другой стороны, для любых $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ и $\delta > 0$ при каждом $x_0 \in G_\delta$ значения функции $Lx_f(t, x_0)$ на каждом временном промежутке $M_m \equiv (2\pi(m-1), 2\pi m]$ ($m \in \mathbb{N}$) пересекаются с упомянутой прямой p не более двух раз, а при некоторых x_0 – даже ровно по два раза, откуда $\hat{\nu}_b(f) = 1$.

Для второй нелинейной системы вида (1) с правой частью $f(t, x) = \psi_+(|x|)f_l(t, x)$ (см. последнее равенство (19)) аналогично, но наоборот, получаем включения

$$\{\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\psi_+(|x_0|) \frac{\pi}{2}, \psi_+(|x_0|) \frac{\pi}{2} \right) \supset [-\pi/2, \pi/2], \quad |x_0| \neq 0.$$

Поэтому для любых $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ и $\delta > 0$ при каждом $x_0 \in G_\delta$ значения функции $Lx_f(t, x_0)$ на каждом из рассмотренных выше промежутков M_m пересекаются с упомянутой прямой p уже не менее двух и не более четырёх раз, причём при одних x_0 – ровно по два раза, а при некоторых других x_0 – ровно по четыре раза. Отсюда вытекают все соотношения для показателей колеблемости из цепочки (15). Для установления остальных её равенств заметим, что для любого $x_0 \in G_*$ можно задавать оператор $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ как композицию поворота, при

котором множество всех векторов $Lx_f(t, x_0)$ содержит только один вектор $e \perp p$, и неограниченного сжатия этого вектора e . В результате сразу все значения величины $t^{-1}P(t, Lx_f(t, x_0))$ ($t \in \mathbb{R}_+$) можно делать сколь угодно близкими к единице.

Все показатели вращаемости всех трёх рассмотренных систем равны нулю в силу ограниченности числом 2π ориентированного угла, задаваемого их решениями, и это свойство инвариантно относительно невырожденных преобразований плоскости. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим линейную автономную систему (2) с правой частью $f_t(x, y)$, записываемую в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^3 \equiv G$ с помощью матрицы I (18) в виде

$$\dot{x} = Ix, \quad \dot{y} = \psi(|x|), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1, \quad (20)$$

где $\psi(r) \equiv 0$ ($r \geq 0$). Она задаёт вращение каждой плоскости, параллельной $S \equiv \{y = 0\}$, вокруг неподвижной оси $q \equiv \{x = 0\}$ с единичной угловой скоростью. Поэтому для всех её показателей при начальных значениях $x_0 \in S_*$ имеем $\kappa_k(f_t, x_0) = 1$. Кроме того, все её верхние шаровые показатели блуждаемости равны единице, а нижние – нулю, так как в любой окрестности нуля есть как циклические решения в плоскости S , так и неподвижные точки на прямой q . При этом для каждого $x_0 \in G \setminus S$ имеем $\kappa_k(f_t, x_0) = 0$, поскольку фазовая кривая $x_{f_t}(\cdot, x_0)$:

а) под действием проектора P_1 на прямую q (что можно считать без ограничения общности) попадает ровно в одну ненулевую точку этой прямой, а значит, $\nu_k(f_t, x_0) = 0$; более того, отсюда и для шарового показателя колеблемости получаем равенство $\nu_b(f_t) = 0$, поскольку для него в этой ситуации все остальные значения $x_0 \in S_*$ являются критическими;

б) под действием проектора P_2 на некоторую плоскость $Q \supset q$ (также без ограничения общности) оказывается строго в одной её полуплоскости относительно прямой $Q \cap S$, а значит, угол поворота $\varphi(t, P_2 x_{f_t}(\cdot, x_0))$ ограничен по модулю числом π , поэтому $\theta_k(f_t, x_0) = 0$ и даже $\theta_b(f_t) = 0$, поскольку для шарового показателя вращаемости значения $x_0 \in S_*$ здесь также являются критическими;

в) под действием оператора L со сколь угодно сильным удлинением вдоль прямой q будет давать сколь угодно малые значения $t^{-1}P(t, Lx_{f_t}(t, \mu x_0))$ сразу при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in (0, 1]$, откуда имеем $\rho_k(f_t, x_0) = 0$.

Теперь рассмотрим нелинейную автономную систему вида (1) с правой частью $f(x, y)$ того же вида (20), но уже с функцией $\psi(r) \equiv r^2$. Она, в отличие от предыдущей линейной системы, задаёт винтовое движение, а именно вращение вокруг неподвижной оси q с единичной угловой скоростью, совмещённое с одновременным движением вдоль этой оси с постоянной скоростью, сходящейся к нулю при приближении к оси q . У этой системы уже абсолютно все показатели колеблемости и вращаемости равны нулю, поскольку любая её фазовая кривая с начальным значением $x_0 \in G_*$ не более одного раза пересекает плоскость S , относительно которой она тогда либо все время находится в одном полупространстве, либо в какой-то один момент переходит в другое, а значит, $N(t, P_1 x_f(\cdot, x_0)) \leq 1$ и $\Theta(t, P_2 x_f(\cdot, x_0)) \leq 2\pi$. Теорема 7 доказана.

Замечание 5. Ситуация, описанная в пп. а) и б) доказательства теоремы 7, исключительна в том смысле, что именно на ней реализуется минимум верхних (даже точных) шаровых функционалов колеблемости и вращаемости, равный нулю. Однако при каждом $x_0 \in S_*$ эта же ситуация для аналогичных радиальных функционалов оказывается, напротив, полностью критической, а все не критические ситуации порождают для соответствующих радиальных показателей точное значение единица, превышающее нулевое значение для шаровых показателей. В результате возникает парадоксальное явление, когда верхний шаровой показатель меньше радиального.

Автор благодарен В.В. Быкову за ценные замечания и внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Л., 1950.

2. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
3. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 171–183.
4. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
5. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.
6. *Бурлаков Д.С., Цой С.В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.
7. *Быков В.В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.
8. *Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–486.
9. *Кокушкин В.И.* Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1406–1407.
10. *Лысак М.Д.* Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 106–111.
11. *Миценко В.В.* О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 851–852.
12. *Смоленцев М.В.* Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1571–1572.
13. *Сташ А.Х., Аллахвердян А.А., Артисевич А.Е., Лобода Н.А.* О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера // Динамические системы. 2020. Т. 10. Вып. 38. № 2. С. 216–224.
14. *Шильяниников Е.М.* Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 149–164.
15. *Сергеев И.Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
16. *Сергеев И.Н.* Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840.
17. *Сергеев И.Н.* Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562.
18. *Сергеев И.Н.* Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861.
19. *Сергеев И.Н.* Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.
20. *Сергеев И.Н.* О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 856–858.
21. *Сергеев И.Н.* Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1577–1578.
22. *Сергеев И.Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361.
23. *Сергеев И.Н.* Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348.
24. *Сергеев И.Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138.
25. *Сергеев И.Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 732–751.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.
После доработки 25.01.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.