

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51+517.926

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА С ЗАДААННЫМИ СВОЙСТВАМИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Для непрерывных и дискретных линейных автономных систем обсуждается возможность выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающих выполнение условия знакоотрицательности её первой производной (первой разности) с заданным запасом в случае кратных корней характеристического уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123060018, EDN: FFHCNR

Введение. В задачах исследования устойчивости прямым методом Ляпунова как непрерывных, так и дискретных систем, широкое применение находят функции Ляпунова квадратичного вида, построенные для соответствующих линейных систем [1, с. 120–132; 2, с. 33–45]. При решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость использования ограничений на величину первой производной (первой разности) функции Ляпунова в силу соответствующей линейной системы [3, 4].

В работе [4] для случая различных корней характеристического уравнения решается задача такого выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с помощью простых соотношений, что выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ обеспечивается с заданным (не обязательно максимальным) запасом. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. В настоящей работе обсуждается возможность решения аналогичной задачи в случае кратных корней характеристического уравнения. Рассматривается случай, когда матрица канонической системы представляет собой жорданову клетку (жорданов блок), т.е. все корни характеристического уравнения действительны и равны между собой.

1. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных систем дифференциальных уравнений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ для производной квадратичной формы $V(x)$ в силу линейной автономной системы обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\dot{V}(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием следующего утверждения, доказанного в работах [3, 5], а именно: пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

такая, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. И пусть положительно определённая квадратичная форма задана соотношением

$$V(x) = x^T K x \quad (K^T = K). \quad (2)$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц $A = (a_{ij})_{ij=1}^n$ и $K = (K_{ij})_{ij=1}^n$ вещественные. Рассмотрим первую производную квадратичной формы (2) в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(x) = x^T (A^T K + K A) x. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0 = \text{const} > 0$ функции $V(x)$ максимальное

значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно δV_0 . Тогда для собственных значений λ_i , $i = \overline{1, n}$, матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство $2 \max_{i=\overline{1, n}} \operatorname{Re} \lambda_i \leq \delta < 0$, а δ является наибольшим корнем уравнения

$$\det(A^T K + K A - \mu K) = 0. \quad (4)$$

Для случая, когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в работе [4] предложена методика выбора коэффициентов квадратичной формы (2), основанная на переходе с помощью линейного преобразования неизвестных к каноническому виду соответствующей дифференциальной системы, имеющему диагональный вид.

В случае, когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни, проблема состоит в том, что матрицу системы не всегда можно привести к диагональному виду [6, с. 168–172; 7, с. 117–122]. Следует отметить, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

приводящее систему к каноническому виду [8, с. 121]. Но даже в случае системы второго порядка канонический вид линеаризованной системы может быть как

$$\dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, \quad (5)$$

так и

$$\dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2 \quad (6)$$

(λ – кратный корень характеристического уравнения). В первом случае, какую бы положительно определённую квадратичную форму

$$V(\xi_1, \xi_2) = K_{11}\xi_1^2 + 2K_{12}\xi_1\xi_2 + K_{22}\xi_2^2 \quad (7)$$

мы ни взяли, первая производная в силу (5) будет равна $\dot{V}_{(5)}(x)(\xi_1, \xi_2) = 2\lambda V(\xi_1, \xi_2)$, т.е. $\max_{x \neq 0} \dot{V}_{(5)}(x)/V(x) = 2\lambda$. Во втором случае уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} (2\lambda - \mu)K_{11} & (2\lambda - \mu)K_{12} + K_{11} \\ (2\lambda - \mu)K_{12} + K_{11} & (2\lambda - \mu)K_{22} + 2K_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Следует отметить, что в этом случае значение $\mu_{\max} = 2\lambda$ недостижимо, так как приводит к соотношению $K_{11} = 0$, невозможному для положительно определённой формы (7). Согласно (8) максимальный корень этого уравнения будет равен

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \frac{K_{11}}{\sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}}. \quad (9)$$

И поскольку значение $K_{12} = 0$ даёт минимум (9) при фиксированных значениях остальных коэффициентов (7), квадратичную функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2) = K_{11}\xi_1^2 + K_{22}\xi_2^2. \quad (10)$$

В этом случае (9) примет вид

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}}},$$

а значение $k = K_{11}/K_{22}$, если $\mu_{\max} = \delta$ ($2\lambda < \delta < 0$), будет равно $k = (2\lambda - \delta)^2$. (Тот факт, что $\max \dot{V}/V \geq 2\lambda$, следует из теоремы 1.)

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию $2\lambda + \sqrt{k} = \delta$, где $k = K_{11}/K_{22}$, является функцией Ляпунова системы (6), причём $\max \dot{V}_{(6)}/V = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

В случае, когда матрица канонической системы содержит жорданову клетку порядка $n > 2$, квадратичную функцию Ляпунова, подобно (10), будем подбирать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n K_{ii} \xi_i^2. \quad (11)$$

Тогда соответствующий ей блок в уравнении (4) можно записать как

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = 0, \quad (12)$$

где при $n \geq 4$

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_{n-1}(\mu, K_{22}, K_{33}, \dots, K_{nn}) - K_{11}^2 D_{n-2}(\mu, K_{33}, \dots, K_{nn}),$$

причём

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}) = (2\lambda - \mu)^2 K_{11} K_{22} - K_{11}^2, \\ D_3(\delta, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_2(\delta, K_{22}, K_{33}) - (2\lambda - \mu)K_{11}^2 K_{33}.$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где $\mu_{\max}$ – наибольший корень уравнения (12), существует и является функцией Ляпунова системы

$$\dot{\xi} = J_n \xi, \quad (13)$$

где J_n – жорданова клетка порядка n , причём $\max \dot{V}/V_{(13)} = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Примем в случае $n = 3$, что

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}} + \frac{K_{22}}{K_{33}}}.$$

Если считать, что все отношения $K_{i-1,i-1}/K_{ii} = k$, $i = \overline{2, n}$, равны между собой, то для любого $\mu \in (2\lambda, 0)$ [5], разделив обе части (12) на $K_{11}K_{22} \cdots K_{nn}$, получим

$$d_n(\mu, k) = (2\lambda - \mu)d_{n-1}(\mu, k) - kd_{n-2}(\mu, k) = 0, \quad (14)$$

где $d_n = D_n/(K_{11}K_{22} \cdots K_{nn})$. При этом

$$d_2(\mu, k) = (2\lambda - \mu)^2 - k, \quad d_3(\mu, k) = (2\lambda - \mu)((2\lambda - \mu)^2 - 2k).$$

Из теоремы 3 следует

Следствие 1. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где $\mu_{\max}$ – наибольший корень уравнения (14), и $k = K_{i-1,i-1}/K_{ii}$, $i = \overline{2, n}$, существует и является функцией Ляпунова системы (13), причём $\max \dot{V}_{(13)}/V = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Таким образом, при $n = 3$ получим, что $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{2k}$, при $n = 4$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{5} + 1)\sqrt{k}/2$, при $n = 5$ $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{3k}$, при $n = 7$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{2} + 2)\sqrt{k}$ и

т.д. А в предположении, что задано $\delta \in (2\lambda, 0)$, из равенства $\mu_{\max} = \delta$ можно получить соответствующее ему значение k , а именно: при $n = 3$ $k = (2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 4$ $k = (3 - \sqrt{5})(2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 5$ $k = (2\lambda - \delta)^2/3$, при $n = 7$ $k = (2\lambda - \delta)^2/(6 + 4\sqrt{2})$ и т.д.

Замечание 1. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова, которая будет удовлетворять условию $\max \dot{V}_{(1)}/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (2\lambda, 0)$ [5].

2. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных точечных отображений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\Delta V(x) < 0$ для первой разности квадратичной формы $V(x)$ в силу функций последования линейного точечного отображения обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\Delta V(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием теоремы, подобной теореме 1, доказанной в работе [3]. Для случая когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в [4] предложена методика выбора коэффициентов (2), основанная на переходе к каноническому виду точечного отображения. В случае когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни будем рассуждать аналогично случаю дифференциальной системы, а именно: пусть дано линейное точечное отображение вида

$$\bar{x} = Ax, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

такое, что корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, лежат внутри круга единичного радиуса, действительны и равны между собой, т.е. $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$. Рассмотрим первую разность квадратичной формы (2) в силу (15)

$$\Delta_{(15)} V(x) = x^T (A^T K A - K) x.$$

Утверждения, аналогичные теоремам 2, 3 и следствию 1, в канонических переменных будут иметь следующий вид.

Теорема 4. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию $k = (1 - z^2 - \delta)^2/(1 + \delta)$, где $k = K_{11}/K_{22}$, является функцией Ляпунова для отображения

$$\bar{\xi}_1 = z\xi_1 + \xi_2, \quad \bar{\xi}_2 = z\xi_2, \quad (16)$$

причём $\max \Delta_{(16)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Теорема 5. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где $\mu_{\max}$ – наибольший корень уравнения

$$((z^2 - 1 - \mu)K_{11})\tilde{D}_{n-1}(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) - z^2 K_{11}^2 \tilde{D}_{n-2}(\mu, K_{22}, \dots, K_{nn}) = 0,$$

в котором

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})((z^2 - 1 - \mu)K_{33} + K_{22}) - z^2 K_{22}^2,$$

$D_3(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})\tilde{D}_2(\mu, K_{22}, K_{33}, K_{44}) - z^2 K_{22}^2((z^2 - 1 - \mu)K_{44} + K_{33})$, существует и является функцией Ляпунова для отображения

$$\bar{\xi} = J_n \xi, \quad (17)$$

где J_n – жорданова клетка порядка n , причём $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Следствие 2. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где $\mu_{\max}$ – наибольший корень уравнения

$$(z^2 - 1 - \mu)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k) = 0, \quad (18)$$

в котором

$$\tilde{d}_n(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k),$$

$$\tilde{d}_2(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)^2 - z^2 k,$$

$$\tilde{d}_3(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_2(\mu, k) - z^2 k(z^2 - 1 - \mu + k),$$

а $k = K_{i-1, i-1}/K_{ii}$ при всех $i = \overline{2, n}$, существует и является функцией Ляпунова для отображения (17), причём $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Так при $n = 2$ максимальный корень уравнения (18) есть $\mu_{\max} = z^2 - 1 + (k + \sqrt{k^2 + 4z^2 k})/2$. При $n = 3$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём значения $k = (1 - z^2 + \delta)(\sqrt{1 + \delta} \pm |z|)/\sqrt{1 + \delta}$. А, скажем, при $n = 5$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём $k = (1 - z^2 + \delta)/(1 + \sqrt{3}|z|)$ и т.д.

Замечание 2. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова для точечного отображения (15) такую, что $\max \Delta_{(15)} V/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (z^2 - 1, 0)$.

Заключение. Приведённые в статье результаты дополняют результаты, полученные для случая различных корней характеристического уравнения [4], о построении квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., 1970.
2. Косякин А.А., Шамиров Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983.
3. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
4. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
5. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295–302.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., 1999.
8. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 21.11.2022 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.