ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 693–704

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.7+517.928

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **А. А. Бободжанов, Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов**

Рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) с быстро осциллирующей неоднородностью и с интегральным оператором типа Вольтерры, ядра которых могут содержать как классическую быстро убывающую экспоненту (простейший случай), так и фундаментальные решения дифференциальных систем (общий случай). Трудность построения регуляризованной (по С.А. Ломову) асимптотики в общем случае обусловлена сложной асимптотической структурой фундаментальной матрицы решений (матрицы Коши) однородной дифференциальной системы. В данной работе сначала строится регуляризованная асимптотика матрицы Коши, которая затем применяется для построения регуляризованной асимптотики решения ИДУ.

DOI: 10.31857/S0374064123050126, EDN: DAMJGP

Введение. Рассмотрим задачу для сингулярно возмущённой системы

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int\limits_0^t K(t,s)Z(t,s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon},\quad y(0,\varepsilon)=y^0 \tag{1}$$

с быстро изменяющимся ядром $K(t,s)Z(t,s,\varepsilon)$ и матрицей $Z(t,s,\varepsilon)$, удовлетворяющей однородной дифференциальной системе

$$\varepsilon\frac{dZ(t,s,\varepsilon)}{dt}=B(t)Z(t,s,\varepsilon),\quad Z(s,s,\varepsilon)=I,\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – $n\times n$-матрицы, $y=\{y_1,\ldots,y_n\}$, $Z(t,s,\varepsilon)$ – матричная $n\times n$-функция, I – единичная $n\times n$-матрица, $\beta(t)$ – заданная скалярная функция ($\beta'(t)>0$ – частота быстро осциллирующей неоднородности); ε – малый параметр. Предполагается, что спектры

$$\sigma(A(t))=\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\},\quad \sigma(B(t))=\{\mu_1(t),\ldots,\mu_n(t)\}$$

матриц $A(t)$ и $B(t)$ стабильны на отрезке $[0,1]$ (см. [1, с. 39–40]). Точное решение $Z(t,s,\varepsilon)$ системы (2) часто называют *матрицей Коши* однородного уравнения $\varepsilon\dot z=B(t)z$. Нас интересует проблема построения регуляризованной асимптотики [1, 2] решения задачи (1). Простейший случай таких задач, когда $Z(t,s,\varepsilon)$ является экспонентой $\exp(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)\,d\theta)$, рассматривался ранее в ряде работ [3–6]. Идея решения поставленной проблемы проста: нужно сначала получить регуляризованную асимптотику матрицы Коши $Z(t,s,\varepsilon)$, записать её в (1), а затем применить к полученной системе технику из [3, 4]. Однако реализация этой идеи далеко не тривиальна и требует привлечения тонкого математического аппарата, описание которого приводится в следующем пункте.

1. Регуляризованная асимптотика матрицы Коши. Рассмотрим систему (2) и построим её регуляризованное асимптотическое решение. Заметим, что решение этой задачи связано с разработкой теории нормальной и однозначной разрешимости матричных систем уравнений, аналогичных системам, рассмотренным С.А. Ломовым в статье [7], в которой исследовались системы уравнений с частными производными с точечными начальными данными в так называемом пространстве безрезонансных решений, причём элементы этого пространства не зависели от переменной s. В нашем случае зависимость от s существенна, поэтому в настоящей работе разрабатывается иная схема построения матрицы Коши. Вместо матричных систем уравнений в частных производных нами рассматриваются векторные системы уравнений для каждого столбца матрицы Коши, но в пространствах, зависящих от переменной s. Заметим, что регуляризованная асимптотика матрицы Коши была построена в работе [8]. Приведём выкладки из этой работы, относящиеся к матрице Коши, для полного понимания содержания разрабатываемого ниже алгоритма.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) матрица $B(t) \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{C}^{n\times n})$;

2) спектр $\sigma(B(t))$ стабилен, т.е. $\mu_i(t) \neq \mu_j(t)$, $i \neq j$, $\mu_i(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,1]$, $i, j = \overline{1,n}$;

3) $\operatorname{Re}\mu_i(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0,1]$, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим сингулярно возмущённую задачу

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = B(t) z(t,s,\varepsilon), \quad z(s,s,\varepsilon) = e_r, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \tag{3}$$

для r-го столбца матрицы $Z(t,s,\varepsilon)$ (здесь $e_r = \{0,\ldots,0,\underset{(r)}{1},0,\ldots 0\}$). Регуляризацию задачи (3) проведём с помощью функций

$$\sigma_j = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_j(\theta)\,d\theta \equiv \frac{\psi_j(t,s)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Для расширения $\widetilde{z}(t,s,\tau,\varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial t} + \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial \sigma_j} - B(t)\widetilde{z}\right) = 0, \quad \widetilde{z}(t,s,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=s\\ \sigma=0}} = e_r,$$

где $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ – вектор регуляризирующих переменных. Поскольку задача (4) регулярна по ε (при $\varepsilon \to +0$), то её решение определим в виде ряда

$$\widetilde{z}(t,s,\sigma,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t,s,\sigma).$$

Для коэффициентов $z_k(t,s,\sigma)$ этого ряда получаем следующие итерационные задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) \frac{\partial z_0}{\partial \sigma_j} - B(t) z_0 = 0, \quad z_0(s,s,0) = e_r, \tag{5_0}$$

$$L z_k = -\frac{\partial z_{k-1}}{\partial t}, \quad z_{k-1}(s,s,0) = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{5_k}$$

Каждую из задач (5_k) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) \frac{\partial w}{\partial \sigma_j} - B(t) w = H(t,s,\sigma), \quad w(s,s,0) = w^0, \tag{6}$$

где $H(t,s,\sigma)$ – известная $n \times 1$-вектор-функция, w^0 – известный постоянный вектор той же размерности. Решение задачи (6) будем искать в пространстве U, элементы w которого представляются в виде суммы

$$w(t,s,\sigma) = w_0(t,s) + \sum_{j=1}^{n} w_j(t,s) e^{\sigma_j}, \quad w_j(t,s) \in C^{\infty}(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \mathbb{C}^n), \quad j = \overline{0,n}. \tag{7}$$

Пусть $H(t,s,\sigma) = H_0(t,s) + \sum_{j=1}^n H_j(t,s)e^{\sigma_j} \in U$. Подставив (7) в (6) и приравняв отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим следующие системы векторных уравнений:

$$-B(t)w_0 = H_0(t,s), \quad (\mu_j(t)I - B(t))w_j = H_j(t,s), \quad j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Первая из систем (8) имеет единственное решение $w_0(t,s) = -B^{-1}(t)H_0(t,s)$. Решения следующих систем (8) будем определять в виде $w_j = Q(t)v(t,s)$ $(v = \{v_1,\ldots,v_n\})$, где $Q(t) = (\theta_1(t),\ldots,\theta_n(t))$ – матрица из собственных векторов матрицы $B(t)$: $B(t)\theta_j(t) = \mu_j(t)\theta_j(t)$, $j = \overline{1,n}$. Для $v(t,s)$ получаем систему

$$[\mu_j(t)I - \operatorname{diag}(\mu_1(t),\ldots,\mu_n(t))]v = Q^{-1}(t)H_j(t,s), \quad j = \overline{1,n}, \tag{9}$$

или (более подробно)

$$(\mu_j(t) - \mu_1(t))v_1 = (H_j(t,s),\eta_1(t)), \quad \ldots, \quad (\mu_j(t) - \mu_{j-1}(t))v_{j-1} = (H_j(t,s),\eta_{j-1}(t)),$$
$$0 = (H_j(t,s),\eta_j(t)),$$
$$(\mu_j(t) - \mu_{j+1}(t))v_{j+1} = (H_j(t,s),\eta_{j+1}(t)), \quad \ldots, \quad (\mu_j(t) - \mu_n(t))v_n = (H_j(t,s),\eta_n(t)),$$

где $\eta_k(t)$ – k-й столбец матрицы $G(t) = (Q^{-1}(t))^*$, т.е. $\eta_k(t)$–$(\overline{\lambda}_k)$ – собственный вектор матрицы $B^*(t)$. Отсюда видно, что для разрешимости j-й системы (9) в пространстве $C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы для любых $(t,s) \in \{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$ выполнялось тождество

$$(H_j(t,s),\eta_j(t)) \equiv 0. \tag{10}$$

При этом указанная система имеет решение

$$w_j(t,s) = \xi_j(t,s)\theta_j(t) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \frac{(H_j(t,s),\eta_k(t))}{\mu_j(t) - \mu_k(t)}\theta_k(t). \tag{11}$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)–3) и правая часть* $H = H_0(t,s) + \sum_{j=1}^n H_j(t,s)e^{\sigma_j}$ *системы (6) принадлежит пространству* U. *Тогда для разрешимости системы (6) в* U *необходимо и достаточно, чтобы тождества (10) выполнялись при всех* $j = \overline{1,n}$. *При этом решение системы (6) записывается в виде (7), где* $w_0(t,s) = -B^{-1}(t)H_0(t,s)$, $w_j(t,s)$ *– вектор-функции (11), скалярные функции* $\xi_j(t,s) \in C^\infty(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$ *произвольные. Система (6) при дополнительных условиях*

$$w(s,s,0) = w^0, \quad \left\langle -\frac{\partial w}{\partial t}, \eta_j(t)e^{\sigma_j}\right\rangle = 0 \ \ \text{при всех} \ \ (t,s) \in \{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\} \tag{12}$$

однозначно разрешима в пространстве U *(здесь через* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *обозначено скалярное произведение в* U *(см. [9, с. 105]).*

Доказательство. Первая часть этой теоремы доказана выше при построении решения (7). Перейдём к доказательству второй части. Подставив (7) в условие $w(s,s,0) = w^0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n \left[\xi_j(s,s)\theta_j(s) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \frac{(H_j(s,s),\eta_k(s))}{\mu_j(s) - \mu_k(s)}\theta_k(s)\right] = w^0 + B^{-1}(s)H_0(s,s).$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на $\eta_i(s)$ и учитывая биортонормированность систем $\{\theta_j(s)\}$, $\{\eta_i(s)\}$, получаем

$$\xi_i(s,s) = (w^0 + B^{-1}(s)H_0(s,s),\eta_i(s)) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \frac{(H_j(s,s),\eta_i(s))}{\mu_j(s) - \mu_i(s)}. \tag{13}$$

Подставив теперь (7) во второе условие (12) и обозначив

$$(H_j(t,s),\eta_k(t))(\mu_j(t)-\mu_k(t))^{-1}=h_{jk}(t,s),$$

будем иметь*)

$$(\xi_j(t,s)\theta_j(t))^{\bullet}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}((h_{jk}(t,s)\theta_k(t))^{\bullet},\eta_j(t))=0$$

или

$$\frac{d\xi_j(t,s)}{dt}=-(\dot\theta(t),\eta_j(t))\xi_j(t,s)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}h_{jk}(t,s)(\dot\theta(t),\eta_j(t)),\quad j=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Учитывая начальные условия (13), найдём однозначно функции $\xi_j(t,s)$, а значит, построим единственное решение (7) системы (6) в пространстве U. Теорема доказана.

Перейдём теперь к нахождению решений итерационных задач (5_k). Поскольку система (5_0) однородная, то её решение имеет вид

$$z_0(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(0)}(t,s)\theta_j(t)e^{\sigma_j},$$

где функции $\xi_j^{(0)}(t,s)$ удовлетворяют задаче (см. (14), (13))

$$\frac{d\xi_j^{(0)}(t,s)}{dt}=-(\dot\theta(t),\eta_j(t))\xi_j^{(0)}(t,s),\quad \xi_j^{(0)}(s,s)=(e_r,\eta_j(s)).$$

Так как решение этой задачи определяется формулой $\xi_j^{(0)}(t,s)=e^{-\int_s^t(\dot\theta_j(x),\eta_j(x))\,dx}(e_r,\eta_j(s))$, то решение задачи (5_0) можно записать в виде

$$z_0=z_{0(r)}(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n}e^{-\int_s^t(\dot\theta_j(x),\eta_j(x))\,dx}(e_r,\eta_j(s))\theta_j(t)e^{\sigma_j},$$

где индекс (r) означает, что решение $z_{0(r)}(t,s,\sigma)$ соответствует значению r-го столбца матрицы $Z_0(t,s,\sigma)$.

Обозначим

$$\gamma_j(t,s)=-\int\limits_s^t(\dot\theta(x),\eta_j(x))\,dx,\quad j=\overline{1,n},\quad Z_0(t,s,\sigma)=(w_{0(1)}(t,s,\sigma),\ldots,w_{0(n)}(t,s,\sigma)).$$

Тогда

$$Z_0(t,s,\sigma)=\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j(t)(e_1,\eta_j(s))e^{\gamma_j(t,s)+\sigma_j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}\theta_j(t)(e_n,\eta_j(s))e^{\gamma_j(t,s)+\sigma_j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\theta_j(t)(e_1,\eta_j(s))e^{\gamma_j(t,s)},\ldots,\theta_j(t)(e_n,\eta_j(s))e^{\gamma_j(t,s)})e^{\sigma_j}.$$

Аналогичным образом могут быть получены решения неоднородных систем (5_k) при $k\geqslant 1$, а значит, будут построены матрицы

$$Z_k(t,s,\sigma)=(z_{k(1)}(t,s,\sigma),\ldots,z_{k(n)}(t,s,\sigma)),\quad k\geqslant 1.$$

---

*) Здесь и далее жирная точка $\bullet$ означает дифференцирование по t.

В результате будем иметь формальный ряд $\tilde{Z}(t,s,\sigma,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Z_k(t,s,\sigma)$. Нетрудно показать (см., например, [9, с. 118–121]), что асимптотическим решением N-го порядка задачи (2) является частичная сумма

$$Z_{\varepsilon,N}(t,s)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k Z_k(t,s,\psi(t,s)/\varepsilon), \quad \psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n),$$

этого ряда, взятого на сужении $\sigma=\psi(t,s)/\varepsilon$, т.е. что имеет место оценка

$$\|Z(t,s,\varepsilon)-Z_{\varepsilon,N}(t,s)\|_{C[0,1]}\leqslant K_N\varepsilon^{N+1}, \tag{15}$$

где постоянная $K_N>0$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0>0$ достаточно мало), $Z(t,s,\varepsilon)$ – точное решение задачи (2).

При $\operatorname{Re}\mu_j(t)<0$ (при всех $t\in[0,1]$, $j=\overline{1,n}$) верна экспоненциальная оценка нормы матрицы Коши $Z(t,s,\varepsilon)$ (см., например, [10, с. 69]), из которой вытекает оценка (15). Однако в случае $\operatorname{Re}\mu_j(t)=0$ для доказательства неравенства (15) требуется иной подход, который подробно описан в [9, с. 118–121].

2. Регуляризованная асимптотика интегро-дифференциальной системы (1). Рассмотрим теперь задачу (1). Сначала заметим, что в правой части системы (5_1) отсутствует свободный член типа $H_0(t,s)$, поэтому в решении задачи (5_1) также будет отсутствовать член, не содержащий экспоненты e^{σ_i}, а значит, матрица $Z_1(t,s,\sigma)$ будет иметь вид $Z_1(t,s,\sigma)=$ $=\sum_{j=1}^{n}F_{1j}(t,s)e^{\sigma_j}$, где $F_{1j}(t,s)$ – $n\times n$-матрицы. По той же причине все матрицы $Z_k(t,s,\sigma)$, $k\geqslant 2$, будут иметь такую же структуру. Таким образом,

$$Z_k(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{n}F_{kj}(t,s)e^{\sigma_j}, \quad k\geqslant 1,$$

поэтому ряд для расширения матрицы Коши примет вид

$$\tilde{Z}(t,s,\sigma,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Z_k(t,s,\sigma)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\sum_{j=1}^{n}F_{kj}(t,s)e^{\sigma_j},$$

а задача (1) – вид

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t K(t,s)F_{kj}(t,s)e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon}y(s,\varepsilon)\,ds+h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0,\varepsilon)=y^0.$$

Обозначая $K(t,s)F_{kj}(t,s)\equiv W_{kj}(t,s)$, запишем последнюю задачу в форме

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{n}e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon}W_{kj}(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0,\varepsilon)=y^0. \tag{16}$$

Получена задача интегро-дифференциальной системы с n спектральными значениями $\mu_r(t)$, $r=\overline{1,n}$, ядра интегрального оператора. Эта система более общая, чем система, рассмотренная в [3], так как в ней ядро является асимптотическим рядом по ε (тогда как в [3] в ядре вместо бесконечной суммы $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k W_{kj}(t,s)(t,s)$ стоит одна матричная функция $k_j(t,s)$). Задачу (16) следует рассматривать при условиях 1)–3), так как при них была получена асимптотика матрицы Коши $Z(t,s,\varepsilon)$. Кроме того, следует наложить дополнительные ограничения на исходные данные задачи (16):

4) матрица $A(t)\in C^{\infty}([0,1],\mathbb{C}^{n\times n})$, вектор-функция $h(t)\in C^{\infty}([0,1],\mathbb{C}^n)$, скалярная функция $\beta(t)\in C^{\infty}[0,1]$;

5) спектр $\sigma(A(t))$ матрицы $A(t)$ стабилен, т.е. $\lambda_i(t) \neq 0$, $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, для любого $t \in [0,1]$;

6) $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leqslant 0$, $j = \overline{1,n}$, $\beta'(t) > 0$ при всех $t \in [0,1]$;

7) $\lambda_j(t), \mu_i(t) \neq \beta'(t)$, $\lambda_j(t) \neq \mu_i(t)$, $t \in [0,1]$, $i, j = \overline{1,n}$.

Для единообразия обозначений положим $\mu_j(t) \equiv \lambda_{n+j}(t)$, $j = \overline{1,n}$, $i\beta'(t) = \lambda_{2n+1}(t)$ и введём регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_j(x)\,dx \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, 2n+1}.$$

Заметим, что $\psi_j(t) \equiv \psi_j(t,s)|_{s=0}$, $j = \overline{n+1, 2n}$. Для расширения $\widetilde{y} = \widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ решения системы (16) получим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial\widetilde{y}_0}{\partial\tau_j} = A(t)\widetilde{y} + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(\theta)\,d\theta}W_{kj}(t,s)\widetilde{y}(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds + h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1},$$

$$\widetilde{y}(0,0,\varepsilon) = y^0, \quad \sigma_{n+1} \equiv e^{i\beta(0)/\varepsilon}. \tag{17}$$

Однако здесь не проведена регуляризация интегральных операторов

$$J_k\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(\theta)\,d\theta}W_{kj}(t,s)\widetilde{y}(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds, \quad k \geqslant 0.$$

Для их регуляризации введём пространство M_ε, асимптотически инвариантное относительно оператора $J_k\widetilde{y}(s,\tau,\varepsilon)$ (см. [1; гл. 2, § 6]).

Определение 1. Будем говорить, что вектор-функция $w(t,\tau) = \{w_1,\ldots,w_n\}$ *принадлежит пространству* Y, если она представима в виде суммы

$$w(t,\tau) = w_0(t,\sigma_{n+1}) + \sum_{j=1}^{2n+1} w_j(t,\sigma_{n+1})e^{\tau_j}, \quad w_j(t,\sigma_{n+1}) \in C^\infty([0,1],\mathbb{C}^n), \quad j = \overline{0, 2n+1}. \tag{18}$$

Так как ограниченная по ε постоянная $\sigma_{n+1} = e^{i\beta(0)/\varepsilon}$ не влияет на разработку записанного ниже алгоритма, то далее в элементах (18) пространства Y мы её опускаем.

Подставив функцию (18) в каждый интегральный оператор, входящий в $J_k\widetilde{y}(s,\tau,\varepsilon)$, будем иметь

$$J_{kj}w(t,\tau) = \int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}W_{kj}(t,s)\bigg(w_0(s) + \sum_{i=1}^{2n+1} w_i(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s \lambda_i(x)\,dx}\bigg)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}W_{kj}(t,s)w_0(s)\,ds + \sum_{i=1}^{2n+1}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}W_{kj}(t,s)w_i(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s \lambda_i(x)\,dx}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}W_{kj}(t,s)w_0(s)\,ds + e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\int\limits_0^t W_{k,n+j}(t,s)w_{n+j}(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n+j}}^{2n+1}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}W_{kj}(t,s)w_i(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s \lambda_i(x)\,dx}\,ds.$$

С помощью интегрирования по частям получим

$$\int_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} W_{kj}(t,s)w_0(s)\,ds = -\varepsilon\int_0^t \frac{W_{kj}(t,s)w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)}\,de^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{W_{kj}(t,0)w_0(0)}{\lambda_{n+j}(0)}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} - \frac{W_{kj}(t,t)w_0(t)}{\lambda_{n+j}(t)}\right] + \varepsilon\int_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_{kj}(t,s)w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)}\right)ds =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{W_{kj}(t,0)w_0(0)}{\lambda_{n+j}(0)}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} - \frac{W_{kj}(t,t)w_0(t)}{\lambda_{n+j}(t)}\right] +$$

$$+\varepsilon^2\left[\left(\frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_{kj}(t,s)w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)}\right)\right)\Bigg|_{s=0} e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} - \left(\frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_{kj}(t,s)w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)}\right)\right)\Bigg|_{s=t}\right] +$$

$$+\varepsilon^2\int_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{W_{kj}(t,s)w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)}\right)\right)ds =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left[(I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=0} e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} - (I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=t}\right],$$

где введены операторы

$$I^0_{n+j} = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)},\quad I^1_{n+j} = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}\frac{\partial}{\partial s}(I^0_{n+j}),\quad I^m_{n+j} = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}\frac{\partial}{\partial s}(I^{m-1}_{n+j}),\quad m\geqslant 1. \tag{19}$$

Поступая аналогичным образом, при $i\neq n+j$ будем иметь

$$\int_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx} e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s \lambda_i(x)\,dx} W_{kj}(t,s)w_i(s)\,ds =$$

$$= e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\int_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t (\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x))\,dx} W_{kj}(t,s)w_i(s)\,ds =$$

$$= \varepsilon e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\int_0^t \frac{W_{kj}(t,s)}{\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x)}w_i(s)de^{\varepsilon^{-1}\int_0^t (\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x))\,dx} =$$

$$= \varepsilon e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\left[\frac{W_{kj}(t,s)w_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)}e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t (\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x))\,dx}\Bigg|_{s=0}^{s=t} -\right.$$

$$\left. -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_{kj}(t,s)w_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)}\right)e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t (\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x))\,dx}\,ds\right] =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{W_{kj}(t,t)w_i(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_{n+j}(t)}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(x)\,dx} - \frac{W_{kj}(t,0)w_i(0)}{\lambda_i(0)-\lambda_{n+j}(0)}e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\right] -$$

$$-\varepsilon e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W_{kj}(t,s)w_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)}\right)e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t (\lambda_i(x)-\lambda_{n+j}(x))\,dx}\,ds =$$

$$
= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} (-1)^m [(I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s))_{s=t} e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(x)\,dx})_{s=t} -
$$

$$
- (I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s))|_{s=0} e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_{n+j}(x)\,dx})],
$$

где введены операторы

$$
I^0_{n+j,i} = \frac{1}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)}, \quad I^1_{n+j,i} = \frac{1}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s}(I^0_{n+j,i}),
$$

$$
I^\nu_{n+j,i} = \frac{1}{\lambda_i(s)-\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s}(I^{\nu-1}_{n+j,i}), \quad \nu \geqslant 1. \tag{20}
$$

Таким образом, для произвольной вектор-функции (18) будем иметь

$$
J_k w(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t,s) w_{n+j}(s)\,ds + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \sum_{j=1}^{n} \Bigl\{ e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t,s) w_{n+j}(s)\,ds +
$$

$$
+ [(I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}} - (I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=t}] +
$$

$$
+ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n+j}}^{2n+1} (-1)^m [(I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s)))|_{s=t} e^{\tau_i} - (I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}}] \Bigr\},
$$

где $\tau_j = \psi_j(t)/\varepsilon$, $j = \overline{1, 2n+1}$.

Обозначим через $R_{m,k} : Y \to Y$ операторы, действующие на каждую функцию (18) по правилу

$$
R_{0,k} w(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t,s) w_{n+j}(s)\,ds,
$$

$$
R_{m+1,k} w(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \Bigl\{ e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t,s) w_{n+j}(s)\,ds +
$$

$$
+ [(I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}} - (I^m_{n+j}(W_{kj}(t,s)w_0(s)))|_{s=t}] +
$$

$$
+ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n+j}}^{2n+1} (-1)^m [(I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s)))|_{s=t} e^{\tau_i} - (I^m_{n+j,i}(W_{kj}(t,s)w_i(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}}] \Bigr\},
$$

операторы I^m_{n+j}, $I^m_{n+j,i}$ имеют вид (19) и (20). Тогда оператор $J_k w(t,\tau)$ можно записать кратко в форме

$$
J_k w(t,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m R_{m,k} w(t,\tau).
$$

Пусть теперь некоторая вектор-функция $\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$, непрерывная по $(t,\tau) \in [0,1] \times \Pi$, где $\Pi = \{\operatorname{Re}\tau_j \leqslant 0, \ j = \overline{1, 2n+1}\}$, представляется в виде ряда

$$
\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l y_l(t,\tau), \quad y_l(t,\tau) = w_0^{(l)}(t) + \sum_{j=1}^{2n+1} w_j^{(l)}(t) e^{\tau_j} \in Y, \tag{21}
$$

сходящегося асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,\tau) \in [0,1] \times \Pi$). Подставив её в интегральный оператор системы (17), получим равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{k+l}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon}W_{kj}(t,s)y_l(s,\psi(s)/\varepsilon)\,ds =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{k+l}J_k y_l(t,\tau) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}R_{0,k}y_l(t,\tau) + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau),$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$.

Определение 2. Оператор $\widetilde{J}\widetilde{y} = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau)$ будем называть *формальным расширением оператора* $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^t\sum_{j=1}^{n}e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon}W_{kj}(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds$.

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к (16):

$$\varepsilon\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial\widetilde{y}_0}{\partial\tau_j} = A(t)\widetilde{y} + \widetilde{J}\widetilde{y} + h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1}, \quad \widetilde{y}(0,0,\varepsilon) = y^0. \tag{22}$$

Подставляя ряд (21) в (22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем иметь следующие итерационные задачи:

$$Fy_0 \equiv \sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j} - A(t)y_0 - R_{0,0}y_0 = h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1}, \quad y_0(0,0) = y^0,$$

$$Fy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y_0, \quad y_1(0,0) = 0,$$

$$\ldots,$$

$$Fy_r = -\frac{\partial y_{r-1}}{\partial t} + \sum_{k+l+m=r}R_{m,k}y_l(t,\tau), \quad y_r(0,0) = 0. \tag{23}$$

Каждую пару итерационных задач (23) при r и $r+1$ можно записать в виде

$$Fy \equiv \sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j} - A(t)y = f(t,\tau,\sigma_{n+1}), \quad y(0,0) = y_*,$$

$$Fv = -\frac{\partial y}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y + g(t,\tau,\sigma_{n+1}), \tag{24}$$

где $f(t,\tau,\sigma_{n+1})$, $g(t,\tau,\sigma_{n+1})$ – известные вектор-функции класса Y. Здесь, так же как и в п. 1, нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)–7) и вектор-функция* $f(t,\tau,\sigma_{n+1}) \in Y$. *Тогда для разрешимости системы (24) в пространстве* Y *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $t \in [0,1]$ *выполнялись условия*

$$\langle f(t,\tau,\sigma_{n+1}) || \chi_j(t)e^{\tau_j}\rangle = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{25}$$

При выполнении условий (25) и дополнительных требованиях

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} + R_{1,0}y + g(t,\tau,\sigma_{n+1}) || \chi_j(t)e^{\tau_j}\right\rangle \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [0,1], \quad j = \overline{1,n}, \tag{26}$$

задача (24) однозначно разрешима в пространстве Y.

Здесь через $\langle\cdot||\cdot\rangle$ обозначено скалярное (при каждом $t\in[0,1]$) произведение в Y (см. [9, с. 105]), $\chi_i(t)-(\overline{\lambda}_j)$ – собственный вектор матрицы $A^*(t)$, $j=\overline{1,n}$. Обращаем внимание на то, что в (25) и (26) в умножении участвуют только вектор-функции $\chi_1(t)e^{\tau_1}$, ..., $\chi_n(t)e^{\tau_n}$, так как функции типа $q_j(t)e^{\tau_j}$, $j=\overline{n+1,2n+1}$, не входят в ядро оператора

$$Fy\equiv\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j}-A(t)y.$$

И, наконец, обозначая через $y_{\varepsilon N}(t)=\sum_{r=1}^{N}\varepsilon^r y_r(t,\psi(t)/\varepsilon)$ сужение N-й частичной суммы ряда (21) при $\tau=\psi(t)/\varepsilon=(\psi_1(t)/\varepsilon,\dots,\psi_{2n+1}(t)/\varepsilon)$, докажем (так же как и в [9, с. 303–308]) оценку

$$\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\leqslant M_N\varepsilon^{N+1},\quad N\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},$$

где постоянная $M_N>0$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0>0$ достаточно мало).

3. Построение главного члена асимптотики. Развитый нами алгоритм позволяет получать асимптотику решения исходной задачи любого порядка (по ε). Однако вычисление высших приближений связано с громоздкими выкладками. На практике обычно ограничиваются главным членом асимптотики, структура которого повторяет структуру точного решения задачи (1). В этом случае иногда достаточно ограничиться системой

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{\psi_j(t,s)}{\varepsilon}}(W_{0j}(t,s)+\varepsilon W_{1j}(t,s))y(s,\varepsilon)\,ds+h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon},\quad y(0,\varepsilon)=y^0$$

и рассмотреть только две первые итерационные задачи:

$$Fy_0\equiv\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-A(t)y_0-R_{0,0}y_0=h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1},\quad y_0(0,0)=y^0,\tag{27}$$

и

$$Fy_1=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y_0,\quad y_1(0,0)=0,$$

где $R_{0,0}y_0$, $R_{1,0}y_0$, $R_{0,1}y_0$ будут такими:

$$R_{0,0}w(t,\tau)=\sum_{j=1}^{n}e^{\tau_{n+j}}\int\limits_0^t W_{0,n+j}(t,s)w_{n+j}(s)\,ds,$$

$$R_{1,0}y_0(t,\tau)=\sum_{j=1}^{n}\biggl\{[(I^0_{n+j}(W_{0j}(t,s)w_0(s)))|_{s=0}e^{\tau_{n+j}}-(I^0_{n+j}(W_{0j}(t,s)w_0(s)))|_{s=t}]+$$
$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n+j}}^{2n+1}[(I^0_{n+j,i}(W_{0j}(t,s)w_i(s)))|_{s=t}e^{\tau_i}-(I^0_{n+j,i}(W_{0j}(t,s)w_i(s)))|_{s=0}e^{\tau_{n+j}}]\biggr\},$$

$$R_{0,1}w(t,\tau)=\sum_{j=1}^{n}e^{\tau_{n+j}}\int\limits_0^t W_{1,n+j}(t,s)w_{n+j}(s)\,ds.$$

Определив решение системы (27) в виде суммы

$$y_0(t,\tau)=y_0^{(0)}(t)+\sum_{j=1}^{2n+1}y_j^{(0)}(t)e^{\tau_j},\tag{28}$$

получим уравнения

$$[\lambda_{n+i}(t)I - A(t)]y_{n+i}^{(0)}(t) - \int\limits_0^t W_{0,n+i}(s)y_{n+i}^{(0)}(s) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$[\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]y_{2n+1}^{(0)}(t) = h(t)\sigma, \quad -A(t)y_0^{(0)}(t) = 0,$$

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_j^{(0)}(t) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

решив которые, найдём

$$y_0^{(0)}(t) = 0, \quad y_{n+i}^{(0)}(t) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$y_j^{(0)}(t) = \alpha_j(t)\varphi_j(t), \quad j = \overline{1,n},$$

$$y_{2n+1}^{(0)}(t) = [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)\sigma_{n+1},$$

где $\alpha_i(t) \in C^\infty([0,1],\mathbb{C}^1)$ – пока произвольные функции. Решение (28) системы (27) запишется в виде

$$y_0(t,\tau) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1}. \tag{29}$$

Подставив (29) в начальное условие $y_0(0,0) = y^0$, найдём

$$\alpha_j(0) = (y^0 - [\lambda_{2n+1}(0)I - A(0)]^{-1}h(0)\sigma_{n+1}, \chi_j(t)), \quad j = \overline{1,n}. \tag{30}$$

Для вычисления скалярного произведения в условиях

$$\left\langle -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y_0 \,\middle\|\, \chi_i(t)e^{\tau_i} \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{31}$$

нужно выделить в выражении $(R_{1,0} + R_{0,1})y_0$ члены, зависящие только от e^{τ_i}, $i = \overline{1,n}$:

$$\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n (I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t,s)w_i(s)))|_{s=t}e^{\tau_i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t,s)w_i(s)))|_{s=t}e^{\tau_i}.$$

Теперь условия (31) запишутся как

$$\Bigg(-(\alpha_i(t)\varphi_i(t))^\bullet + \sum_{j=1}^n \bigg(\frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)}(W_{0j}(t,s))\bigg)\bigg|_{s=t}\varphi_i(t)\alpha_i(t), \chi_i(t)\Bigg) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Присоединяя к этой системе уравнений начальные условия (30), найдём однозначно функции

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0)e^{\int_0^t q_i(x)}\,dx, \quad i = \overline{1,n},$$

где обозначено

$$q_i(t) \equiv \Bigg(-\dot\varphi_i(t) + \sum_{j=1}^n \bigg(\frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)}(W_{0j}(t,s))\bigg)\bigg|_{s=t}\varphi_i(t), \chi_i(t)\Bigg).$$

При этом главный член асимптотики решения задачи (1) имеет вид

$$y_{0\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j(t)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_j(\theta)\,d\theta} + [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}. \tag{32}$$

Из (32) видно, что интегральный оператор на структуру главного члена асимптотики решения задачи (1) влияет через операторы $W_{0j}(t,t)$ (т.е. в конечном счёте через диагональное ядро $K(t,t)$) и быстро осциллирующую функцию $h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$. Если $K(t,t)\equiv 0$, то система (2) не оказывает никакого влияния на структуру главного члена асимптотики решения задачи (1), т.е. в первом приближении интегро-дифференциальная система (1) ведет себя так же, как и дифференциальная система $\varepsilon\dot{y}=A(t)y+h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$, $y(0,\varepsilon)=y^0$ (влияние интегрального члена проявится при построении высших приближений). Из (32) также видно, что даже в случае когда спектры матриц $A(t)$ и $B(t)$ лежат строго слева от мнимой оси ($\operatorname{Re}\lambda_i(t)<<0$, $j=\overline{1,2n}$, $t\in[0,1]$), точное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) не стремится (в непрерывной метрике) ни к какому пределу при $\varepsilon\to+0$. Выйдя при $t=0$ из начальной точки y^0, оно неограниченно колеблется при $\varepsilon\to+0$ около функции $[\lambda_{2n+1}(t)I-A(t)]^{-1}h(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Интегральные уравнения Вольтерры с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 53–78.
4. *Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т.* Метод регуляризации для систем с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 4. С. 696–706.
5. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Сингулярно возмущённые нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Мат. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654–664.
6. *Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.* Регуляризация сингулярно возмущённых интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром и их асимптотика // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 9. С. 1199–1211.
7. *Ломов С.А.* Однозначная разрешимость некоторых матричных уравнений с частными производными // Мат. заметки. 1977. Т. 21. № 4. С. 525–530.
8. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Асимптотические решения интегро-дифференциальной системы с быстро изменяющимися ядрами специального вида // Вестн. Моск. энергетического ин-та. 2011. № 6. С. 47–56.
9. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., 2012.
10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”,
Южно-Казахстанский университет
имени М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан

Поступила в редакцию 22.01.2023 г.
После доработки 31.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.