

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ
ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© 2023 г. А. А. Щеглова

Рассмотрена нестационарная линейная дискретная дескрипторная система с прямоугольными матричными коэффициентами, определённая на конечном горизонте. Получен ответ на вопрос, какое наибольшее число искомых векторов можно найти из заданного конечного числа уравнений? Аналогично изучена разрешимость нестационарных линейных систем с непрерывным или дискретным временем, а также (в локальном смысле) нелинейных дискретных систем. Показано, что в тех случаях, когда рассматриваемая линейная (или нелинейная) система сохраняет внутреннюю структуру, возможно нахождение её решений на бесконечном горизонте. Предлагаемый подход обладает достаточной общностью и автоматически решает проблему согласования начальных данных.

DOI: 10.31857/S0374064123050114, EDN: CZRUCX

Введение. Исследование вырожденных систем с дискретным временем, также называемых дискретными дескрипторными системами, является динамично развивающимся направлением в современной математике, что обусловлено многочисленными приложениями в различных отраслях науки и техники: биологии, экономике, робототехнике, астрофизике, моделировании летательных аппаратов, электрических сетях, механике и др. [1–7].

Большинство известных результатов получено для стационарных систем

$$Ax^{[k+1]} + Bx^{[k]} = f^{[k]}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

где A и B – заданные $n \times n$ -матрицы, $\det A = 0$, с регулярным матричным пучком $cA + B$, т.е. $\det(cA + B) \not\equiv 0$ (см., в частности, [8–11]). Известно [12, с. 313], что в этом случае существуют обратимые $n \times n$ -матрицы P и S такие, что в результате замены переменных $x^{[k]} = S \operatorname{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]})$, $x_1^{[k]} \in \mathbb{R}^{n-d}$, $x_2^{[k]} \in \mathbb{R}^d$, и умножения всех уравнений (0.1) слева на матрицу P получим систему

$$Nx_2^{[k]} + x_2^{[k-1]} = f_1^{[k]}, \quad x_1^{[k]} + Jx_1^{[k-1]} = f_2^{[k]}, \quad (0.2)$$

где $\operatorname{col}(f_1^{[k]}, f_2^{[k]}) = Pf^{[k]}$; N – верхнетреугольная матрица с $\varkappa \leq d$ квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $N^\varkappa = O$; J – некоторая $(n-d) \times (n-d)$ -матрица. При этом число $\varkappa$ называется *индексом пучка* $cA + B$.

Применительно к системам вида (0.1) различные аспекты теории (управляемость, наблюдаемость, устойчивость, стабилизация, задачи фильтрации, построение регуляторов и др.) исследовались в работах [8–10].

В литературе рассматриваются и более сложные постановки задач для дискретных дескрипторных систем, в частности, стационарные системы как с постоянным запаздыванием [13], так и с нелинейным [14, 15]. Изучаются также системы с переключениями [16, 17] и с прямоугольными матрицами коэффициентов [18]. При этом, для того чтобы сделать рассматриваемую систему доступной для анализа, на структуру системы накладываются довольно жёсткие ограничения. Например, в нестационарных случаях требуется, чтобы пучок матричных коэффициентов сохранял подобную (0.2) структуру или же вообще имел постоянную простую структуру (последнее применительно к системе (0.2) соответствует случаю $\varkappa = 0$).

Данная работа посвящена проблеме нахождения решений вырожденных дискретных систем в наиболее общих предположениях. В п. 1 рассматривается нестационарная система

$$A_k^{[k]}x^{[k]} + A_{k-1}^{[k]}x^{[k-1]} + \dots + A_1^{[k]}x^{[1]} + B^{[k]}x^{[0]} = f^{[k]}, \quad k = \overline{1, \rho}, \quad (0.3)$$

в которой искомые векторы могут иметь различную размерность, $A_i^{[k]}$ и $B^{[k]}$ – заданные $m_k \times n_i$ - и $m_k \times n_0$ -матрицы соответственно; $x^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($i = \overline{0, \rho}$) – искомые, а $f^{[k]} \in \mathbb{R}^{m_k}$ – заданные векторы. При этом матрицы коэффициентов $A_i^{[k]}$ и $B^{[k]}$ могут не иметь полного ранга:

$$\text{rank } A_i^{[k]} \leq \min\{m_k, n_i\}, \quad \text{rank } B^{[k]} \leq \min\{m_k, n_0\}.$$

Системам с непрерывным и дискретным временем посвящён п. 2, а именно системам вида (0.1) и (0.3), в которых матричные коэффициенты и правые части зависят от времени. В п. 3 изучаются нелинейные дискретные дескрипторные системы.

1. Нестационарные системы с прямоугольными матрицами коэффициентов. Сначала на примере системы (0.1) с регулярным матричным пучком поясним основные понятия, связанные с внутренней структурой вырожденных систем с дискретным временем.

Структурная форма (0.2) позволяет получить представление для решения уравнений (0.1): $x^{[k]} = S \text{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$x_2^{[0]} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} N^{j-1} f_1^{[j]}, \quad (1.1)$$

$$x_2^{[k]} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} N^{j-1} f_1^{[k+j]}, \quad (1.2)$$

$$x_1^{[k]} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J^{k-j} f_2^{[j]} + (-1)^k J^k x_1^{[0]}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Определим для системы (0.1) начальные условия

$$x^{[0]} = a, \quad (1.4)$$

a – заданный вектор из пространства $\mathbb{R}^n$. Соотношение (1.1) называется *условием согласования начальных данных (1.4) с правой частью системы (0.1)* (кратко *условием согласования*). Любые начальные условия вида (1.4) называются *согласованными*, если они удовлетворяют соотношению (1.1). Из (1.1)–(1.3) следует, что для выделения единственного решения достаточно задать начальные данные в виде

$$x_1^{[0]} = a_1,$$

где $a_1 \in \mathbb{R}^{n-d}$ – заданный вектор. При этом число $n - d$ будем называть *размерностью пространства решений* системы (0.1).

Обратимся к уравнениям (0.3). В данном пункте предпринята попытка ответить на следующие вопросы.

1. При каких условиях из системы (0.3) можно найти векторы $x^{[1]}, \dots, x^{[r]}$ ($r \leq \rho$) как линейные функции переменных $f^{[1]}, \dots, f^{[\rho]}$ и $x^{[0]}$?

2. Как определить максимально возможное число r ?

3. Как при этом будут выглядеть условия согласования начальных данных (1.4)?

4. Какова размерность пространства решений системы (0.3)?

Обозначим

$$m_* = \sum_{k=1}^{\rho} m_k, \quad n_* = \sum_{i=0}^{\rho} n_i.$$

Введём в рассмотрение $m_* \times n_0$ -матрицу

$$B_\rho = \text{col}(B^{[1]}, \dots, B^{[\rho]}), \quad (1.5)$$

а также $m_* \times n_k$ -матрицы

$$\Gamma^{[1]} = \text{col} (A_1^{[1]}, \dots, A_1^{[\rho]}), \quad (1.6)$$

$$\Gamma^{[k]} = \text{col} (O, \dots, O, A_k^{[k]}, \dots, A_k^{[\rho]}), \quad k = \overline{2, \rho}. \quad (1.7)$$

Используя обозначения (1.5)–(1.7), уравнения (0.3) можно записать в виде алгебраической системы

$$\mathcal{D}_\rho \text{col} (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]}) = f_\rho, \quad (1.8)$$

где $m_* \times n_*$ -матрица

$$\mathcal{D}_\rho = (\mathcal{B}_\rho, \Gamma^{[1]}, \dots, \Gamma^{[\rho]}), \quad (1.9)$$

$$f_\rho = \text{col} (f^{[0]}, f^{[1]}, \dots, f^{[\rho]}). \quad (1.10)$$

Пусть $1 \leq r \leq \rho$. Обозначим $\hat{n} = n_1 + n_2 + \dots + n_r$,

$$\Gamma_r = (\Gamma^{[1]}, \Gamma^{[2]}, \dots, \Gamma^{[r]}), \quad (1.11)$$

$$\Lambda_r = (\Gamma^{[r+1]}, \Gamma^{[r+2]}, \dots, \Gamma^{[\rho]}). \quad (1.12)$$

Теорема 1. *Предположим, что в матрице $\mathcal{D}_\rho$ имеется обратимая подматрица $\mathcal{M}_\rho$ порядка m_* , которая включает в себя все столбцы матрицы Γ_r и $\lambda = \text{rank } \Lambda_r$ столбцов матрицы Λ_r . Тогда*

$$\text{col} (x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = (E_{d+\hat{n}}, O) \mathcal{M}_\rho^{-1} f_\rho - \tilde{B}_1 x_1^{[0]}, \quad (1.13)$$

где $E_{d+\hat{n}}$ – единичная $d + \hat{n}$ -матрица; $Q \text{col} (x_1^{[0]}, x_2^{[0]}) = x^{[0]}$, $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$, $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0-d}$, Q – матрица перестановок строк; $\tilde{B}_1$ – некоторая матрица соответствующей размерности.

Доказательство. Рассмотрим (1.5). Обозначим через Q $n_0 \times n_0$ -матрицу перестановок столбцов такую, что

$$\mathcal{B}_\rho Q = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

где блоки $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ имеют размеры $m_* \times (n_0 - d)$ и $m_* \times d$ соответственно, причём столбцы $\mathcal{B}_2$ входят, а столбцы $\mathcal{B}_1$ не входят в матрицу $\mathcal{M}_\rho$.

С помощью построенной таким образом матрицы Q разобьём вектор $x^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0}$ на подвекторы:

$$x^{[0]} = Q \text{col} (x_1^{[0]}, x_2^{[0]}), \quad (1.14)$$

где $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0-d}$, $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$.

В (1.8) осуществим замену переменных (1.14), а также положим

$$\text{col} (x^{[r+1]}, \dots, x^{[\rho]}) = Q_\Lambda \text{col} (x_1, x_2),$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^\lambda$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{r+1}+\dots+n_\rho-\lambda}$, Q_Λ – матрица перестановок такая, что

$$\Lambda_r Q_\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2),$$

блок Λ_1 состоит из λ столбцов, которые входят в матрицу $\mathcal{M}_\rho$, а столбцы Λ_2 не входят в эту матрицу. Умножив полученную в результате таких преобразований систему слева на $\mathcal{M}_\rho^{-1}$, получим

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & E_{\hat{n}+d} & O & \Psi_1 \\ \tilde{B}_2 & O & E_\lambda & \Psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[0]} \\ \text{col} (x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_\rho^{-1} f_\rho, \quad (1.15)$$

где $\text{col} (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mathcal{M}_\rho^{-1} \mathcal{B}_1$, Ψ_1 и Ψ_2 – некоторые матрицы соответствующих размерностей.

Поскольку

$$\lambda = \text{rank } \Lambda_r = \text{rank } \mathcal{M}_\rho^{-1} \Lambda_r Q_\Lambda = \text{rank } \begin{pmatrix} O & \Psi_1 \\ E_\lambda & \Psi_2 \end{pmatrix},$$

в (1.15) $\Psi_1 = O$. С учётом последнего обстоятельства легко видеть, что представление (1.13) непосредственно вытекает из (1.15). Теорема доказана.

Заметим, что наличие в $\mathcal{D}_\rho$ подматрицы $\mathcal{M}_\rho$, фигурирующей в формулировке теоремы 1, подразумевает, что:

- 1) $m_* \leq n_*$;
- 2) матрица $\mathcal{D}_\rho$ имеет полный ранг по строкам: $\text{rank } \mathcal{D}_\rho = m_*$;
- 3) матрица Γ_r (см. (1.11)) имеет полный ранг по столбцам, равный $\hat{n}$;
- 4) $\text{rank } (B^{[k]}, A_1^{[k]}, A_2^{[k]}, \dots, A_k^{[k]}) = m_k$ для любого $k = \overline{1, \rho}$.

Замечание 1. Из (1.13) вытекает соотношение

$$x_2^{[0]} = (E_d, O) \mathcal{M}_\rho^{-1} (f_\rho - \tilde{B}_1 x_1^{[0]}),$$

которое представляет собой условие согласования начальных данных (1.4) с правой частью системы (0.3). Для выделения единственного решения достаточно задать начальные условия в виде $x_1^{[0]} = a_1$, $a_1 \in \mathbb{R}^{n_0-d}$, следовательно, размерность пространства решений равна $n_0 - d$.

Пример 1. Теорема 1 может быть использована для пошагового нахождения искомых векторов, начиная с $x^{[1]}$. Для иллюстрации этой возможности рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[1]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[0]} = f^{[1]}, \quad (1.16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[2]} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[1]} = f^{[2]}, \quad (1.17)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x^{[3]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[2]} = f^{[3]}, \quad (1.18)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[4]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[3]} = f^{[4]}. \quad (1.19)$$

На первом шаге будем искать $x^{[1]}$. Поскольку в (1.16) матрица $A_1^{[1]}$ при $x^{[1]}$ необратима, уравнения (1.16) недостаточно для определения всех компонент этого вектора. Рассмотрим уравнения (1.16), (1.17) и соответствующую матрицу

$$\mathcal{D}_2^{[1]} = \begin{pmatrix} B^{[1]} & A_1^{[1]} & O \\ O & A_1^{[2]} & A_2^{[2]} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \end{array} \right).$$

Здесь и далее верхний индекс у матриц обозначает номер итерации.

Матрица $\Gamma_2^{[1]}$ состоит из трёх столбцов матрицы $\mathcal{D}_2^{[1]}$, начиная с третьего. Она имеет полный ранг по столбцам. Матрица $\Lambda_2^{[1]}$ располагается в $\mathcal{D}_2^{[1]}$ справа от двойной черты и её ранг равен 2. Обратимая подматрица пятого порядка здесь имеется, но не включает в себя все столбцы матрицы $\Gamma_2^{[1]}$. Она состоит из столбцов, в которых расположены единицы, выделенные рамками.

Поэтому добавляем ещё одно уравнение (1.18). В этом случае

$$\mathcal{D}_3^{[1]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & \boxed{1} & 0 & & & \\ 0 & \boxed{1} & & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \boxed{1} & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\ & & & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & & 0 & \boxed{1} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right),$$

$\text{rank } \Lambda_3^{[1]} = 3$ и существует матрица $\mathcal{M}_3^{[1]}$ (она состоит из столбцов матрицы $\mathcal{D}_3^{[1]}$, в которых присутствуют выделенные рамками единицы). В результате умножения системы (1.16)–(1.18) слева на $(\mathcal{M}_3^{[1]})^{-1}$ получим

$$x_2^{[0]} = (0, 1, -1)f^{[1]}, \quad (1.20)$$

$$x^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f^{[1]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[2]} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[3]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1^{[0]}, \quad (1.21)$$

$$x^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[2]} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f^{[3]}, \quad (1.22)$$

$$x_3^{[3]} = (0, 1)f^{[3]} - x_1^{[3]} - x_2^{[3]}, \quad (1.23)$$

где $\text{col}(x_1^{[0]}, x_2^{[0]}) = x^{[0]}$, $\text{col}(x_1^{[3]}, x_2^{[3]}, x_3^{[3]}) = x^{[3]}$.

На втором шаге рассмотрим уравнения (1.23) и (1.19). Запишем соответствующую матрицу

$$\mathcal{D}_2^{[2]} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & \boxed{1} & & \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right).$$

Очевидно, что $\Gamma_2^{[2]}$ (расположена в $\mathcal{D}_2^{[2]}$ слева от двойной черты) имеет полный ранг по столбцам и $\text{rank } \Lambda_2^{[2]} = 1$. Подматрица $\mathcal{M}_2^{[2]}$ в $\mathcal{D}_2^{[2]}$ имеется, её столбцы отмечены выделенными рамками единицами.

Умножив уравнения (1.23) и (1.19) слева на $(\mathcal{M}_2^{[2]})^{-1}$, получим

$$x^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^{[3]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} f^{[4]}, \quad (1.24)$$

$$x_2^{[4]} = (0, 0, 1)f^{[4]},$$

где $\text{col}(x_1^{[4]}, x_2^{[4]}) = x^{[4]}$.

Таким образом, из уравнений (1.16)–(1.19) можно найти векторы $x^{[1]}$, $x^{[2]}$ и $x^{[3]}$ (см. (1.21), (1.22) и (1.24)), а также условие согласования (1.20). Размерность пространства решений рассматриваемой системы равна единице.

Под *решением* системы (2.1) будем понимать функции $x^{[j]}(t) \in C(T)$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обращающие уравнения (2.1) в тождества на отрезке T .

Теорема 2. Пусть при некотором $1 \leq r \leq \rho$

$$\text{rank } \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \text{для любого } t \in T,$$

и в матрице $\mathcal{D}_\rho(t)$ имеется обратимая для всех $t \in T$ подматрица $\mathcal{M}_\rho(t)$ размерности $m_* \times m_*$, которая включает в себя все столбцы матрицы $\Gamma_r(t)$ и λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$.

Тогда

$$\text{col}(x_2^{[0]}(t), x_1^{[1]}(t), \dots, x^{[r]}(t)) = (E_{d+\hat{n}}, O) \mathcal{M}_\rho^{-1}(t) f_\rho(t) - \tilde{B}_1(t) x_1^{[0]}(t),$$

где $Q \text{col}(x_1^{[0]}(t), x_2^{[0]}(t)) = x^{[0]}(t)$, $x_2^{[0]}(t) \in \mathbb{R}^d$, $x_1^{[0]}(t) \in \mathbb{R}^{n_0-d}$, Q – матрица перестановок строк; $\tilde{B}_1(t) \in C(T)$ – некоторая $(d + \hat{n}) \times (n_0 - d)$ -матрица, $\hat{n} = n_1 + \dots + n_r$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Заметим, что предположения теоремы 2 допускают переменный ранг матриц $A_i^{[k]}(t)$ и $B^{[k]}(t)$.

Рассмотрим частный случай системы (2.1)

$$A(t)x^{[k]}(t) + B(t)x^{[k-1]}(t) = f^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in T, \quad (2.2)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – заданные $n \times n$ -матрицы, $f^{[k]}(t)$ – заданные, а $x^{[k]}(t)$ – искомые n -мерные векторы. Предполагается, что $A(t), B(t), f^{[k]}(t) \in C(T)$ и $\det A(t) \equiv 0$.

Найдём условия, при которых можно получить явный вид общего решения системы (2.2).

Введём в рассмотрение $n(r+1) \times n$ -матрицы

$$\bar{B}_r(t) = \text{col}(B(t), O, \dots, O), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{G}_r(t) = \text{col}(A(t), B(t), O, \dots, O), \quad (2.4)$$

$n(r+1) \times nr$ -матрицу

$$\bar{\Lambda}_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A(t) & O & \dots & O & O \\ B(t) & A(t) & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & B(t) & A(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

и $n(r+1) \times n(r+2)$ -матрицу

$$\bar{D}_r(t) = (\bar{B}_r(t) \mid \mathcal{G}_r(t) \parallel \bar{\Lambda}_r(t)).$$

Обозначим через $\mathbf{d}$ оператор “сдвига”

$$\mathbf{d}[f^{[k]}] = f^{[k+1]}, \quad k \in \mathbb{N},$$

так, что

$$\mathbf{d}^j[f^{[k]}] = f^{[k+j]}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Лемма 1. Пусть при некотором $0 \leq r \leq n$

$$\text{rank } \bar{\Lambda}_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \text{для любого } t \in T, \quad (2.6)$$

и в матрице $\bar{D}_r(t)$ имеется обратимая при всех $t \in T$ подматрица $\bar{\mathcal{M}}_r(t)$ порядка $n(r+1)$, включающая в себя λ столбцов матрицы $\bar{\Lambda}_r(t)$ и все n столбцов матрицы $\mathcal{G}_r(t)$.

Тогда существует линейный оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\mathbf{d} + \dots + R_r(t)\mathbf{d}^r \quad (2.7)$$

такой, что

$$\mathcal{R}[A(t)x^{[k]}(t) + B(t)x^{[k-1]}(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & E_d \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]}(t) \\ x_2^{[k-1]}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $\bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)) = x^{[k]}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\bar{Q}$ – матрица перестановок, $J_1(t), J_2(t) \in C(T)$ – некоторые матрицы соответствующих размеров.

При этом $n \times n$ -матрицы $R_j(t) \in C(T)$ находятся по формуле

$$(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t)) = (E_n, O, \dots, O) \bar{\mathcal{M}}_r(t)^{-1}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Пусть $\bar{Q}$ и $\bar{Q}_r$ – матрицы перестановок соответствующих размерностей такие, что

$$B(t)\bar{Q} = (B_1(t), B_2(t)), \quad \bar{\Lambda}_r(t)\bar{Q}_r = (\bar{\Lambda}_{r,1}(t), \bar{\Lambda}_{r,2}(t)), \quad (2.10)$$

где блоки $\bar{B}_{r,2}(t) = \operatorname{col}(B_2(t), O^{nr})$ и $\bar{\Lambda}_{r,1}(t)$ входят, а блоки $\bar{B}_{r,1}(t) = \operatorname{col}(B_1(t), O^{nr})$ и $\bar{\Lambda}_{r,2}(t)$ не входят в матрицу $\bar{\mathcal{M}}_r(t)$. При этом $B_2(t)$ и $B_1(t)$ состоят d и $n-d$ столбцов соответственно, через O^{nr} обозначена нулевая матрица соответствующей размерности, состоящая из nr строк.

Так же, как при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в сделанных предположениях умножение слева на матрицу $\bar{\mathcal{M}}_r^{-1}(t)$ и замена переменных

$$x^{[k]}(t) = \bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)), \quad x^{[k-1]}(t) = \bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k-1]}(t), x_2^{[k-1]}(t)), \quad (2.11)$$

$$\operatorname{col}(x^{[k+1]}(t), \dots, x^{[k+r]}(t)) = \bar{Q}_r \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t))$$

$(x_2^{[k-1]}(t), x_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^d, x_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^\lambda)$ преобразует систему

$$\bar{\mathcal{D}}_r(t) \operatorname{col}(x^{[k-1]}(t), x^{[k]}(t), \dots, x^{[k+r]}(t)) = f_r^{[k]}(t), \quad (2.12)$$

$f_r^{[k]}(t) = \operatorname{col}(f^{[k]}(t), \dots, f^{[k+r]}(t))$, к виду

$$\begin{pmatrix} J_1(t) & E_d & O & O & O & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O \\ J_3(t) & O & O & E_d & O & O \\ J_4(t) & O & O & O & E_\lambda & \Psi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]}(t) \\ x_2^{[k-1]}(t) \\ x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \\ x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{M}}_r^{-1}(t) f_r^{[k]}(t), \quad (2.13)$$

где $J_i(t) \in C(t)$, $i = \overline{1,4}$, $\Psi(t) \in C(t)$ – некоторые матрицы соответствующих размерностей.

С учётом подстановки (2.11) действие оператора (2.7) на систему (2.2) равносильно умножению уравнения (2.12) слева на матрицу $(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t))$. Будем вычислять коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ по формуле (2.9). Тогда с учётом замены (2.11) из (2.13) вытекает тождество (2.8). Лемма доказана.

Введём в рассмотрение матрицы

$$\bar{B}_{r+1,2}(t) = \operatorname{col}(\bar{B}_{r,2}(t), O^n) = \operatorname{col}(B_2(t), O^{n(r+1)}),$$

$$\bar{B}_{r+1,1}(t) = \operatorname{col}(\bar{B}_{r,1}(t), O^n) = \operatorname{col}(B_1(t), O^{n(r+1)}), \quad \mathcal{G}_{r+1}(t) = \operatorname{col}(\mathcal{G}_r(t), O^n)$$

(см. (2.3), (2.4), (2.10)), а также $n(r+2) \times n(r+1)$ -матрицу $\bar{\Lambda}_{r+1}(t)$, которая строится по правилу (2.5). Обозначим

$$\Omega_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1,2}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t), \bar{\Lambda}_{r+1}(t)).$$

Заметим, что матрица $\Omega_{r+1}(t)$ получена из $\bar{D}_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t), \bar{A}_{r+1}(t))$ вычёркиванием столбцов, входящих в подматрицу $\bar{B}_{r+1,1}(t)$.

Лемма 2. Пусть выполнены все предположения леммы 1 и

$$\text{rank } \bar{A}_{r+1}(t) = \lambda + n \quad \text{для любого } t \in T. \quad (2.14)$$

Тогда $\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = n(r+2)$ при всех $t \in T$.

Доказательство. В предположениях леммы 1 в $\bar{D}_r(t)$ имеется обратимая при всех $t \in T$ подматрица $\bar{M}_r(t)$ порядка $n(r+1)$, которая включает в себя столбцы $\bar{B}_{r,2}(t)$.

Умножим $\Omega_{r+1}(t)$ справа на $\text{diag}\{E_{n+d}, \bar{Q}_r, E_n\}$ (матрица $\bar{Q}_r$ определена в (2.10)), а затем слева на $\text{diag}\{\mathcal{M}_r^{-1}(t), E_n\}$. С учётом условия (2.6) получим

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O & O \\ O & E_\lambda & \Psi(t) & O \\ O & \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & A(t) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Psi(t) \in C(T)$ – некоторые матрицы соответствующих размеров.

Последующее умножение (2.15) слева на

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O \\ O & E_\lambda & O \\ O & -\Phi_1(t) & E_n \end{pmatrix}$$

даёт матрицу

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O & O \\ O & E_\lambda & \Psi(t) & O \\ O & O & \tilde{\Phi}_2(t) & A(t) \end{pmatrix},$$

ранг которой по построению совпадает с рангом матрицы $\Omega_{r+1}(t)$. В силу условия (2.14)

$$\text{rank}(\tilde{\Phi}_2(t), A(t)) = n \quad \text{при всех } t \in T.$$

Таким образом, $\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = 2n + d + \lambda = n(r+2)$ при любых значениях $t \in T$. Лемма доказана.

Отметим, что в предположениях леммы 2 нельзя утверждать, что в матрице $\bar{D}_{r+1}(t)$ найдётся обратимая для всех $t \in T$ подматрица порядка $n(r+2)$, включающая в себя все столбцы матрицы $(\bar{B}_{r+1,2}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t))$ и $n + \lambda$ столбцов матрицы $\bar{A}_{r+1}(t)$.

Теорема 3. Пусть выполнены все предположения леммы 2. Тогда оператор $\mathcal{R}$ имеет левый обратный оператор

$$\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)\mathbf{d}, \quad (2.16)$$

где $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$ – $n \times n$ -матрицы.

Доказательство. Коэффициенты операторов (2.7) и (2.16) должны удовлетворять тождеству

$$(L_0(t), L_1(t))\bar{\mathcal{R}}_r(t) = (E_n, O, \dots, O), \quad (2.17)$$

где

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) & O \\ O & R_0(t) & \dots & R_{r-1}(t) & R_r(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема справедлива, если алгебраическая система (2.17) имеет решение $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$. Покажем это.

Построим матрицу $\tilde{D}_{r+1}(t) = \bar{D}_{r+1}(t) \text{diag}\{\bar{Q}, \dots, \bar{Q}\}$ ($\bar{Q}$ – матрица перестановок из (2.10)). В силу свойства (2.8) оператора $\mathcal{R}$

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)\tilde{D}_{r+1}(t) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} J_1(t) & E_d & O & O & O & O & O & \dots & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O & O & \dots & O \\ \hline O & O & J_1(t) & E_d & O & O & O & \dots & O \\ O & O & J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & \dots & O \end{array} \right), \quad (2.18)$$

где $\text{col}(J_1(t), J_2(t)) = R_0(t)B_1(t)$ (см. (2.10)).

Запишем $\tilde{D}_{r+1}(t)$ в виде

$$\tilde{D}_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1,1}(t), \Delta_{r+1}(t), W_{r+1}(t)),$$

где $\Delta_{r+1}(t)$ – $n(r+2) \times 2n$ -подматрица, $W_{r+1}(t)$ – некоторая матрица соответствующей размерности.

Из (2.18) следует, что $\text{rank } \Delta_{r+1}(t) = 2n$ для любого $t \in T$. Противное противоречило бы обратимости при всех $t \in T$ матрицы

$$\mathcal{E}(t) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_d & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O \\ \hline O & J_1(t) & E_d & O \\ O & J_2(t) & O & E_{n-d} \end{array} \right). \quad (2.19)$$

С другой стороны, согласно лемме 2

$$\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = \text{rank}(\Delta_{r+1}(t), W_{r+1}(t)) = n(r+2) \quad \text{при всех } t \in T.$$

В этом случае [19, с. 37] существует обратимая на отрезке T матрица $V(t)$ соответствующей размерности такая, что

$$W_{r+1}(t)V(t) = (W_{r+1,1}(t), W_{r+1,2}(t)),$$

где блок $W_{r+1,1}(t)$ состоит из nr столбцов. При этом $n(r+2) \times n(r+2)$ -матрица

$$\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t) = (\Delta_{r+1}(t), W_{r+1,1}(t))$$

будет обратима при всех $t \in T$.

Умножив обе части тождества (2.18) справа на матрицу $\text{diag}\{E_{n-d}, E_{2n}, V(t)\}$, получим

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)(\bar{B}_{r+1,1}(t), \bar{\mathcal{M}}_{r+1}, W_{r+1,2}(t)) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} J_1(t) & E_d & O & O & O & O & O & \dots & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O & O & \dots & O \\ \hline O & O & J_1(t) & E_d & O & O & O & \dots & O \\ O & O & J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & \dots & O \end{array} \right).$$

Последующее умножение справа на матрицу $\text{diag}\{O_{n-d}, E_{n(r+1)}, O_d\}$ приводит к тождеству

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t) = (\mathcal{E}(t), O_{nr}),$$

через O_{n-d} обозначен нулевой блок, состоящий из $n-d$ столбцов. Отсюда

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t) = (\mathcal{E}(t), O_{nr})\bar{\mathcal{M}}_{r+1}^{-1}(t). \quad (2.20)$$

Подставив (2.20) в (2.17), а затем умножив обе части полученного уравнения справа на $\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t)$, получим

$$(L_1(t), L_2(t))(\mathcal{E}(t), O_{nr}) = (E_n, O_{n(r+1)})\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t). \quad (2.21)$$

Нетрудно убедиться в том, что по построению правая часть уравнения (2.21) представляет собой матрицу $(B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n(r+1)-d})$. Учитывая вид (2.19) матрицы $\mathcal{E}(t)$, легко видеть, что необходимое и достаточное условие поточечной разрешимости уравнения (2.21)

$$\text{rank} \left(\frac{\mathcal{E}(t)}{(B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n-d})} \middle| \frac{O}{O} \right) = 2n, \quad t \in T,$$

выполняется.

Из (2.21) можно найти коэффициенты оператора (2.16) по формуле

$$(L_0(t), L_1(t)) = (B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n-d})\mathcal{E}^{-1}(t),$$

откуда следует, что $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$. Теорема доказана.

Отметим, что из (2.17), в частности, вытекают соотношения

$$L_0(t)R_0(t) = E_n, \quad L_0(t)R_1(t) + L_1(t)R_0(t) = O,$$

откуда имеем

$$L_0(t) = R_0(t)^{-1}, \quad L_1(t) = -R_0(t)^{-1}R_1(t)R_0(t)^{-1}.$$

Замечание 2. Частным случаем системы (2.2) является стационарная система (0.1). Не останавливаясь на анализе таких уравнений, заметим, что все предположения теоремы 3 для (0.1) выполняются, если пучок матриц $sA + B$ регулярен. При этом $r = \varkappa + 1$, где $\varkappa$ – индекс пучка.

Существование операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ гарантирует, что любое решение системы (2.2) будет решением системы

$$x_2^{[k-1]}(t) + J_1(t)x_1^{[k-1]}(t) = \varphi_1^{[k]}(t), \quad (2.22)$$

$$x_1^{[k]}(t) + J_2(t)x_1^{[k-1]}(t) = \varphi_2^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

где

$$\text{col}(J_1(t), J_2(t)) = R_0(t)B_1(t), \quad \text{col}(\varphi_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t)) = \sum_{j=0}^r R_j(t)f^{[k+j]}(t),$$

$x_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^{n-d}$; $x_2^{[k]}(t), \varphi_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^d$. Строго говоря, решения систем (2.2) и (2.22), (2.23) связаны (см. (2.11)) матрицей перестановок строк $\bar{Q}$ из (2.10).

При $k = 1$ из (2.22) получаем условие согласования начальных данных

$$x_2^{[0]}(t) + J_1(t)x_1^{[0]}(t) = \varphi_1^{[1]}(t).$$

Для выделения единственного решения достаточно задать $x_1^{[0]}(t) = a(t)$, где $a(t) \in C(T)$ – некоторая $n - d$ -мерная вектор-функция.

Нетрудно получить вид общего решения системы (2.2):

$$x^{[k]}(t) = \bar{Q} \text{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)), \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$x_1^{[k]}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J_2^{k-j}(t) \varphi_2^{[j]}(t) + (-1)^k J_2^k(t) x_1^{[0]}(t),$$

$$x_2^{[k]}(t) = \varphi_1^{[k+1]}(t) - J_1(t) \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J_2^{k-j}(t) \varphi_2^{[j]}(t) \right) + (-1)^{k-1} J_1(t) J_2^k(t) x_1^{[0]}(t).$$

Пример 2. Рассмотрим систему вида (2.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & |t-1| \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k]}(t) + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[k-1]}(t) = f^{[k]}(t), \quad t \in [0, 2], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.24)$$

$$s(t) = 2 + \sin t.$$

Проанализируем структуру матрицы

$$\bar{\mathcal{D}}_2(t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} t & 0 & 0 & \boxed{1} & t & 0 & & & \\ 0 & \boxed{s(t)} & 0 & 0 & 0 & |t-1| & & & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & t & 0 & 0 & \boxed{1} & t & 0 \\ & & & 0 & \boxed{s(t)} & 0 & 0 & 0 & |t-1| \\ & & & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & t & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \boxed{s(t)} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right).$$

Очевидно, что $\bar{\Lambda}_1(t)$ имеет на отрезке $[0, 2]$ переменный ранг, поскольку

$$\text{rank } \bar{\Lambda}_1(t) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & |t-1| \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, $\text{rank } \bar{\Lambda}_2(t) = 4$ (матрица $\bar{\Lambda}_2(t)$ расположена в $\bar{\mathcal{D}}_2(t)$ правее двойной вертикальной линии).

Кроме того, в $\bar{\mathcal{D}}_2(t)$ имеется подматрица $\bar{\mathcal{M}}_2(t)$, она состоит из столбцов, в которых находятся элементы, выделенные рамками. Нетрудно записать матрицу $\bar{\Lambda}_3(t)$ и убедиться в том, что её ранг равен 7. Таким образом, выполнены все предположения теоремы 3 при $r = 2$.

Оператор $\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\mathbf{d} + R_2(t)\mathbf{d}^2$, где

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{|t-1|}{s(t)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{s(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t|t-1|}{s(t)} \end{pmatrix},$$

преобразует систему (2.24) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k]}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k-1]}(t) = \varphi^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

где $\varphi^{[k]}(t) = R_0(t)f^{[k]}(t) + R_1(t)f^{[k+1]}(t) + R_2(t)f^{[k+2]}(t)$.

Общее решение системы (2.25) представимо в виде $x^{[k]}(t) = \text{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t))$, где

$$x_1^{[k]}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} t^{k-j} \varphi_2^{[j]}(t) + (-1)^k t^k x_1^{[0]}(t), \quad (2.26)$$

$$x_2^{[k]}(t) = \varphi_1^{[k+1]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

$\text{col}(\varphi_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t)) = \varphi^{[k]}(t)$; $x_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}$; $x_2^{[k]}(t), \varphi_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^2$. По теореме 3 функции (2.26), (2.27) обращают в тождества и уравнения (2.24).

При $k = 1$ из (2.27) получаем условие согласования начальных данных $x_2^{[0]}(t) = \varphi_1^{[1]}(t)$, поэтому для выделения единственного решения необходимо задать начальные условия в виде $x_1^{[0]}(t) = a(t)$, $a(t) \in C(T)$. Размерность пространства решений в данном случае равна единице.

3. Нелинейные системы с дискретным временем. Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$g(x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где $x^{[k]} \in \mathbb{R}^n$ – искомые векторы, n -мерная вектор-функция $g(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$) определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\partial g / \partial \alpha$ и $\partial g / \partial \beta$ в некоторой окрестности $\mathcal{V}(0)$ точки $(0, 0)$: $g(\alpha, \beta) \in C^1(\mathcal{V}(0))$. При этом

$$g(0, 0) = 0,$$

$$\det \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \equiv 0 \quad \text{для любых точек } (\alpha, \beta) \in \mathcal{V}(0).$$

Обозначим

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha_0, \beta_0) = F(\alpha_0, \beta_0), \quad \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0) = H(\alpha_0, \beta_0).$$

Пусть $1 \leq r \leq n$. Определим $nr \times n$ -матрицы

$$\mathcal{B}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}) = \text{col}(F(x^{[0]}, x^{[1]}), O, \dots, O),$$

$$\mathcal{G}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}) = \text{col}(H(x^{[0]}, x^{[1]}), F(x^{[1]}, x^{[2]}), O, \dots, O),$$

$nr \times n(r-1)$ -матрицу

$$\Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ H(x^{[1]}, x^{[2]}) & O & \dots & O & O \\ F(x^{[2]}, x^{[3]}) & H(x^{[2]}, x^{[3]}) & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & F(x^{[r-1]}, x^{[r]}) & H(x^{[r-1]}, x^{[r]}) \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = (\mathcal{B}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}) \mid \mathcal{G}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}) \parallel \Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}))$$

размерности $nr \times n(r+1)$, здесь и далее $\bar{x}_r = (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]})$.

Предположим, что пучок $cH(0, 0) + F(0, 0)$ регулярен. Тогда найдутся обратимые $n \times n$ -матрицы P и S такие, что

$$P(cH(0, 0) + F(0, 0))S = c \begin{pmatrix} O & N \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ J & O \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(J и N такие же, как в (0.2)). С помощью матрицы S разобьём $x^{[k]}$ на подвекторы

$$S(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}) = x^{[k]}, \quad x_1^{[k]} \in \mathbb{R}^{n-d}, \quad x_2^{[k]} \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.3)$$

Теорема 4. Пусть $g(\alpha, \beta) \in C^1(\mathcal{V}(0))$, матричный пучок $cH(0, 0) + F(0, 0)$ регулярен и при $r = \kappa + 1$ (κ – индекс пучка)

$$\text{rank } \Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = n(r-1) - d \quad (3.4)$$

при всех $x^{[j]}$, $j = \overline{1, r}$, из некоторой окрестности нуля.

Если $x_1^{[0]} \in \mathcal{V}_0(0)$, $\mathcal{V}_0(0)$ – достаточно малая окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^{n-d}$, то существует нетривиальное решение системы (3.1), которое может быть найдено по рекуррентным формулам

$$x^{[k]} = \phi(x_1^{[k-1]}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

при этом

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}), \quad (3.6)$$

функции $\phi(x_1^{[k-1]})$ и $\phi_0(x_1^{[0]})$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в некоторой окрестности нуля и обладают свойством: $\phi(0) = 0$ и $\phi_0(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\mathcal{F}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = \text{col}(g(x^{[0]}, x^{[1]}), g(x^{[1]}, x^{[2]}), \dots, g(x^{[r-1]}, x^{[r]})) = 0. \quad (3.7)$$

Тогда $\mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = \left(\partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[0]} \mid \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[1]} \parallel \dots \parallel \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[r]} \right)$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_r^{[0]} &= \text{diag}\{P, \dots, P\} \mathcal{D}_r^{[0]}(0) \text{diag}\{S, \dots, S\} = \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc|ccc|cc|cc} O & E_d & O & N & O & O & \dots & O & O & O & O \\ J & O & E_{n-d} & O & O & O & \dots & O & O & O & O \\ \hline O & O & O & E_d & O & N & \dots & O & O & O & O \\ O & O & J & O & E_{n-d} & O & \dots & O & O & O & O \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline O & O & O & O & O & O & \dots & O & E_d & O & N \\ O & O & O & O & O & O & \dots & J & O & E_{n-d} & O \end{array} \right). \quad (3.8) \end{aligned}$$

Из представления (3.8) следует: 1) $\text{rank } \Lambda_r^{[0]}(0) = n(r-1) - d$; 2) в матрице $\tilde{\mathcal{D}}_r^{[0]}$ имеется обратимая подматрица порядка nr , состоящая из столбцов, в которых расположены единичные блоки. В силу последнего обстоятельства в матрице $\mathcal{D}_r^{[0]}(0)$ также найдётся обратимая подматрица $\mathcal{M}_r^{[0]}(0)$ порядка nr такая, что

$$\mathcal{M}_r^{[0]}(0) = (\partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x_2^{[0]}(0), \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[1]}(0), \dots, \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[r-1]}(0), \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x_1^{[r]}(0)).$$

Здесь и далее $x_1^{[k]}$ и $x_2^{[k]}$ определяются по правилу (3.3).

На основании этого факта можно заключить, что в некоторой окрестности нуля существует неявная функция [20, с. 68]

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.9)$$

$$x^{[1]} = \phi(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.10)$$

$$\text{col}(x^{[2]}, \dots, x^{[r-1]}, x_1^{[r]}) = \phi_1(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.11)$$

удовлетворяющая уравнениям (3.7).

Заметим, что матрица $\mathcal{M}_r^{[0]}$ остаётся обратимой и в некоторой окрестности $\bar{\mathcal{V}}_r(0)$ точки $\bar{x}_r = 0$, при этом

$$(\mathcal{M}_r^{[0]}(\bar{x}_r))^{-1} \mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) \text{diag}\{S, \dots, S\} = \left(\begin{array}{cc|c} J_1(\bar{x}_r) & E_d & O \\ J_2(\bar{x}_r) & O & E_n \\ J_3(\bar{x}_r) & O & O \end{array} \parallel \begin{array}{cc} O & \Psi_1(\bar{x}_r) \\ O & \Psi_2(\bar{x}_r) \\ E_{n(r-1)-d} & \Psi_3(\bar{x}_r) \end{array} \right),$$

где $J_j(\bar{x}_r)$, $\Psi_j(\bar{x}_r)$ ($j = 1, 2, 3$) – некоторые матрицы соответствующих размеров. В соответствии с предположением (3.4) $\Psi_1(\bar{x}_r) \equiv O$, $\Psi_2(\bar{x}_r) \equiv O$ в области $\bar{\mathcal{V}}_r(0)$.

По теореме о производной неявной функции [20, с. 73] в некоторой окрестности нуля

$$\begin{pmatrix} \partial\phi_0/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi_0/\partial x_2^{[r]} \\ \partial\phi/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi/\partial x_2^{[r]} \\ \partial\phi_1/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi_1/\partial x_2^{[r]} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_1(\bar{x}_r) & O \\ J_2(\bar{x}_r) & O \\ J_3(\bar{x}_r) & \Psi_3(\bar{x}_r) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что функции (3.9) и (3.10) не зависят от переменной $x_2^{[r]}$:

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}), \quad (3.12)$$

$$x^{[1]} = \phi(x_1^{[0]}). \quad (3.13)$$

Добавим к системе (3.7) ещё одно уравнение

$$g(x^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0. \quad (3.14)$$

Систему (3.7), (3.14) можно записать в виде $\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}(\bar{x}_{r+1}) = 0$.

Построим неявную функцию, удовлетворяющую системе (3.7), (3.14). Для этого подставим выражения (3.12), (3.13) и (3.11) в уравнение (3.14). В результате получим

$$\hat{g}(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0. \quad (3.15)$$

Записав матрицу $\tilde{\mathcal{D}}_{r+1}^{[0]}$ (см. (3.8)) и проанализировав её структуру, нетрудно увидеть, что в $\mathcal{D}_{r+1}^{[0]}(0)$ существует обратимая $n(r+1) \times n(r+1)$ -подматрица

$$\mathcal{M}_{r+1}^{[0]}(0) = (\partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x_2^{[0]}(0), \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x^{[1]}(0), \dots, \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x^{[r]}(0), \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x_1^{[r+1]}(0)).$$

Отсюда, с учётом свойства обратимых блочных матриц [12, с. 55–57], следует, что $n \times n$ -матрица $(\partial\hat{g}/\partial x_2^{[r]}, \partial\hat{g}/\partial x_1^{[r+1]})$ при $(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0$ будет обратима. В этом случае в некоторой окрестности точки $(x_1^{[0]}, x_2^{[r+1]}) = 0$ будет определена неявная функция

$$\text{col}(x_2^{[r]}, x_1^{[r+1]}) = \phi_2(x_1^{[0]}, x_2^{[r+1]}), \quad (3.16)$$

удовлетворяющая уравнению (3.15).

Таким образом, неявная функция (3.12), (3.13), (3.11), (3.16) обращает систему (3.7), (3.14) в тождество в некоторой окрестности нуля.

Построим другую неявную функцию, удовлетворяющую уравнениям (3.7), (3.14). Для этого рассмотрим систему

$$\mathcal{F}_r^{[1]}(\tilde{x}_r) = \text{col}(g(x^{[1]}, x^{[2]}), g(x^{[2]}, x^{[3]}), \dots, g(x^{[r]}, x^{[r+1]})) = 0, \quad (3.17)$$

где $\tilde{x}_r = (x^{[1]}, \dots, x^{[r+1]})$.

Легко видеть, что в силу (3.4)

$$\text{rank } \Lambda_r^{[1]}(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = n(r-1) - d$$

в некоторой окрестности точки $(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = 0$, где

$$\Lambda_r^{[1]}(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = (\partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[3]}, \dots, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[r+1]}).$$

Аналогично тому, как это было сделано в отношении матрицы $\mathcal{D}_r^{[0]}(0)$, опираясь на структурную форму (3.2), можно показать, что в матрице

$$\mathcal{D}_r^{[1]}(\tilde{x}_r) = (\partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[1]}, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[2]}, \dots, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[r+1]})$$

при $\tilde{x}_r = 0$ имеется обратимая $nr \times nr$ -подматрица

$$\mathcal{M}_r^{[1]}(0) = (\partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x_2^{[1]}, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x^{[2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x^{[r]}, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x_1^{[r+1]}).$$

Поэтому можно заключить, что в некоторой окрестности нуля определена неявная функция вида

$$x_2^{[1]} = \phi_0(x_1^{[1]}), \quad (3.18)$$

$$x^{[2]} = \phi(x_1^{[1]}), \quad (3.19)$$

$$\text{col}(x^{[3]}, \dots, x^{[r]}, x_1^{[r+1]}) = \phi_1(x_1^{[1]}, x_2^{[r+1]}), \quad (3.20)$$

удовлетворяющая системе (3.17).

Добавим к системе (3.17) уравнение

$$g(x^{[0]}, x^{[1]}) = 0. \quad (3.21)$$

В результате подстановки (3.18) в (3.21) получим

$$\tilde{g}(x^{[0]}, x_1^{[1]}) = 0. \quad (3.22)$$

Из существования в $\mathcal{D}_{r+1}^{[0]}(0)$ обратимой подматрицы $\mathcal{M}_{r+1}^{[0]}(0)$ порядка $n(r+1)$ и свойств обратимых блочных матриц следует, что при $(x^{[0]}, x_1^{[1]}) = 0$ матрица $(\partial \tilde{g} / \partial x_2^{[0]}, \partial \tilde{g} / \partial x_1^{[1]})$ будет обратима.

Поэтому найдётся неявная функция

$$x_2^{[0]} = \tilde{\phi}_0(x_1^{[0]}), \quad (3.23)$$

$$x_1^{[1]} = \tilde{\phi}(x_1^{[0]}), \quad (3.24)$$

определённая в некоторой окрестности точки $x_1^{[0]} = 0$ и обращающая (3.22) в тождество. Таким образом, построена ещё одна неявная функция (3.23), (3.24), (3.18)–(3.20), удовлетворяющая системе (3.17), (3.21) или, что то же, (3.7), (3.14).

Подставим выражения (3.16) и (3.24) в правые части равенств (3.11) и (3.18)–(3.20) соответственно. Тем самым для системы (3.7), (3.14) получим две неявные функции, которые, согласно теореме о неявной функции, должны совпадать на пересечении областей определения. Следовательно, можно утверждать, что существует окрестность нулевой точки $\mathcal{V}_0(0)$, в которой функции (3.12), (3.13) и (3.19) обращают при подстановке в тождество первые $2n$ уравнений системы (3.7), а именно

$$g(x^{[0]}, x^{[1]}) = 0, \quad g(x^{[1]}, x^{[2]}) = 0.$$

Продолжая процесс, можно найти все векторы (3.5).

По построению в области $\mathcal{V}_0(0)$ функции $\phi(x_1^{[k-1]})$ и $\phi_0(x_1^{[0]})$ из (3.5), (3.6) обладают всеми перечисленными в формулировке теоремы свойствами.

Если вектор $x_1^{[0]} \neq 0$ достаточно близок к нулю, то система (3.5), (3.6) будет иметь нетривиальное решение, которое располагается в достаточно малой окрестности нулевого решения. Это нетривиальное решение будет обращать в тождество все уравнения системы (3.1). Теорема доказана.

Рассмотрим систему уравнений более общего вида

$$g_k(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[k]}) = 0, \quad k = \overline{1, \rho}, \quad (3.25)$$

где $x^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{0, k}$, – искомые векторы, m_k -мерная вектор-функция g_k определена в некоторой окрестности $\mathcal{V}_k(\alpha_k)$ точки $\alpha_k = (\alpha^{[0]}, \alpha^{[1]}, \dots, \alpha^{[k]})$, $\alpha^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{0, k}$. При этом

$$g_k(\alpha_k) = 0.$$

Будем предполагать, что в указанных областях $\mathcal{V}_k(\alpha_k)$ функции g_k непрерывны и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и

$$\det \frac{\partial g_k}{\partial x^{[k]}} \equiv 0.$$

Запишем (3.25) в виде

$$\mathcal{F}_\rho(\bar{x}_\rho) = 0, \quad (3.26)$$

где $\bar{x}_\rho = (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]})$, $\mathcal{F}_\rho(\bar{x}_\rho) = \text{col}(g_1(x^{[0]}, x^{[1]}), g_2(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}), \dots, g_\rho(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]}))$.

Введём обозначения

$$\mathcal{D}_\rho(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[0]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[1]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[\rho]}), \quad \Gamma_r(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[1]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r]}),$$

$$\Lambda_r(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r+1]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r+2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[\rho]}), \quad m_* = \sum_{k=1}^{\rho} m_k, \quad n_* = \sum_{i=0}^{\rho} n_i.$$

Предполагается, что $m_* \leq n_*$. Отметим, что матрица $\mathcal{D}_\rho(\bar{x}_\rho)$ имеет размеры $m_* \times n_*$.

Теорема 5. Пусть $g_k(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[k]}) \in C^1(\mathcal{V}_k(\alpha_k))$ ($k = \overline{1, \rho}$) и, кроме того, при некотором $1 \leq r \leq \rho$:

1) $\text{rank } \Lambda_r(\bar{x}_\rho) = \lambda = \text{const}$ для любого $\bar{x}_\rho \in \mathcal{V}(\alpha_\rho)$;

2) в матрице $\mathcal{D}_\rho(\alpha_\rho)$ имеется обратимая $m_* \times m_*$ -подматрица, которая включает в себя все столбцы матрицы $\Gamma_r(\alpha_\rho)$ и λ столбцов матрицы $\Lambda_r(\alpha_\rho)$.

Тогда существует окрестность $\mathcal{V}_\alpha(\alpha_\rho)$, в пределах которой определена неявная функция (непрерывная и имеющая непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов), удовлетворяющая в этой окрестности системе (3.26). Часть компонент этой неявной функции имеет вид

$$\text{col}(x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = \varphi(x_1^{[0]}),$$

где $x^{[0]} = Q \text{col}(x_1^{[0]}, x_2^{[0]})$, $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n-d}$, $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$, $d = m_* - \lambda - \sum_{i=1}^r n_i$, Q – некоторая матрица перестановок строк.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство существования неявной функции (3.12), (3.13), (3.11) для системы (3.7).

Следует отметить, что теорема 5 позволяет находить локальное решение системы (3.25) по шагам аналогично тому, как это было продемонстрировано в примере 1.

Заключение. В статье исследованы классы вырожденных систем уравнений с дискретным временем, которые либо вообще не рассматриваются в литературе, либо изучаются при сильных ограничениях на внутреннюю структуру. В линейном случае это, в частности, объясняется тем, что на данный момент не существует хорошей структурной теории пучков трёх и более матриц (в отличие от (0.1)).

Для систем вида (0.3) и (2.1) получены условия, при которых можно найти часть искомых векторов из заданного конечного числа уравнений (теоремы 1 и 2). Показано, что нестационарные системы такого вида целесообразнее рассматривать на конечном горизонте. Предложенный подход может быть использован для пошагового нахождения решения (пример 1).

Для линейной системы с непрерывным и дискретным временем (2.2) доказано существование линейного оператора (2.7), действие которого преобразует (2.2) к виду (2.22), (2.23). Получены условия, при которых этот оператор обладает левым обратным оператором. Последнее обстоятельство позволяет получить явное представление (2.26), (2.27) для общего решения рассматриваемой системы.

Исследована локальная разрешимость нелинейных систем вида (3.1) и (3.25). Решение можно получить в виде неявной функции (либо части компонент неявной функции), удовлетворяющей уравнениям (3.1) или (3.25) в некоторой окрестности нуля (теоремы 4 и 5). Предложенный подход не только позволяет доказать теоремы о существовании решений, но и автоматически решает проблему согласования начальных данных.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы для исследования различных качественных свойств вырожденных систем с дискретным временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luenberger A., Arbel D.G. Singular dynamic Leontief systems // *Econometrica*. 1977. V. 45. P. 991–995.
2. Hemami H., Wyman B.F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. V. 24. P. 526–535.
3. Stevens B.L., Lewis F.L. Aircraft Modelling, Dynamics and Control. New York, 1991.
4. Zhai D., Zhang Q.L., Li J.H. Fault detection for singular multiple time-delay systems with application to electrical circuit // *J. Franklin Inst.* 2014. V. 351. P. 5411–5436.
5. Zhao F., Zhang Q., Zhang Y. H_∞ filtering for a class of singular biological systems // *IET Control Theory Appl.* 2015. № 9. P. 2047–2055.
6. Zerrougui M., Darouach M., Boutat-Baddas L., Ali H.S. H_∞ filtering for singular bilinear systems with application to a single-link flexible-joint robot // *Int. J. Control Autom. Syst.* 2014. № 12. P. 590–598.
7. Balaji S. A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane–Emden type equations arising in astrophysics // *J. Comput. Nonlin. Dynam.* 2016. V. 11. № 5. P. 051013–11.
8. Dai L. Singular Control System. New York, 1989.
9. Kaczorek T. Linear Control Systems. New York, 1992.
10. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М., 2015.
11. Cao M., Liao F. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor system with state delay // *Int. J. of Systems Sci. Principles and Applications of Systems and Integration*. 2015. V. 46. № 5. P. 932–943.
12. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М., 1988.
13. Debeljkovic D., Stojanovic S., Nestrovic T. The stability of linear continuous singular and discrete descriptor time delay systems over the finite time interval: an overview – part II discrete case // *Sci. Tech. Rev.* 2012. V. 62. № 2. P. 62–75.
14. Hadjmohammadi R., Mobayen S. An efficient observer design method for singular discrete-time systems with delays and nonlinearity: LMI approach // *Scientia Iranica. D*. 2017. V. 26. № 3. P. 1690–1699.
15. Lin Y. Observer design for rectangular discrete-time singular systems with time-varying delay // *Int. J. Phys. Sci.* 2012. V. 7. № 3. P. 423–431.
16. Men B., Zhang Q., Wang G., Zhou J. Stabilization of discrete-time switched linear singular systems via a stochastic approach // *Appl. Math. Inf. Sci.* 2013. V. 7. № 2L. P. 631–637.
17. Kaczorek T. Positive descriptor time-varying discrete-time linear systems and their asymptotic stability // *TransNav*. 2015. V. 9. № 1. P. 83–89.
18. Nikoukhah R., Willsky A.S., Levy B.C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems // *IEEE Trans. Aut. Control*. 1991. V. 37. № 9. P. 1–36.
19. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М., 1972.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН
имени В.М. Матросова, г. Иркутск

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.
После доработки 10.01.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.