

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

© 2023 г. С. Н. Тимергалиев

Доказывается существование решений краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных изотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесённых к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064123050102, EDN: CYVKAG

1. Постановка задачи. В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}(DT^{j\lambda})_{\alpha\lambda} + DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu} + DR^j &= 0, \quad j = 1, 2, \\ (DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha\mu})_{\alpha\lambda} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha\lambda} + DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} + DR^3 &= 0, \\ (DM^{j\lambda})_{\alpha\lambda} - DT^{j3} + DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu} + DL^j &= 0, \quad j = 1, 2,\end{aligned}\tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$\begin{aligned}D(T^{j1} d\alpha^2/ds - T^{j2} d\alpha^1/ds) &= P^j(s), \quad j = 1, 2, \\ D(T^{13} d\alpha^2/ds - T^{23} d\alpha^1/ds + T^{1\lambda} w_{3\alpha\lambda} d\alpha^2/ds - T^{2\lambda} w_{3\alpha\lambda} d\alpha^1/ds) &= P^3(s), \\ D(M^{j1} d\alpha^2/ds - M^{j2} d\alpha^1/ds) &= N^j(s), \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}T^{ij} &\equiv T^{ij}(\gamma) = D_{\lambda-1}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D_{\lambda}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \\ \gamma &= (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k, \gamma_{22}^k, \gamma_{23}^k, \gamma_{33}^k), \quad k = 0, 1; \\ D_m^{ijkn} &= D_m^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2) = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) (\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0, 2}, \quad i, j, k, n = 1, 2, 3; \\ B^{1111} &= B^{2222} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B^{1122} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad B^{1212} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad B^{1313} = B^{2323} = \frac{E\kappa^2}{2(1 + \nu)}; \\ \gamma_{jj}^0 &= w_{j\alpha j} - G_{jj}^{\lambda} w_{\lambda} - B_{jj} w_3 + w_{3\alpha j}^2/2, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_{12}^0 &= w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} w_{\lambda} - 2B_{12} w_3 + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \quad \gamma_{jj}^1 = \psi_{j\alpha j} - G_{jj}^{\lambda} \psi_{\lambda}, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_{12}^1 &= \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} \psi_{\lambda}, \quad \gamma_{j3}^0 = w_{3\alpha j} + \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1 \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3;\end{aligned}\tag{3}$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$, $j = 1, 2$, – уравнения кривой Γ , s – длина дуги Γ ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ , $\lambda = 1, 2$.

Если выражения T^{ij} , M^{ij} из (3) подставить в систему (1), то относительно функций w_1 , w_2 , w_3 , ψ_1 , ψ_2 получим систему пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно w_1 , w_2 , ψ_1 , ψ_2 и нелинейных относительно w_3 . Совместно с граничными условиями (2) система (1) описывает состояние равновесия упругой полой изотропной неоднородной оболочкой с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к криволинейной системе координат. При этом T^{ij} – усилия, M^{ij} – моменты; γ_{ij}^k , $i, j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1$, – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки гомеоморфной области Ω ; w_j , $j = 1, 2$, и w_3 – соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0 ; ψ_i , $i = 1, 2$, – углы поворота нормальных сечений S_0 ; B_{ij} , $i, j = 1, 2$, – составляющие тензора кривизны поверхности S_0 , G_{ij}^λ – символы Кристоффеля, которые в изометрической системе координат даются формулами [2, с. 18]

$$G_{jj}^1 = (-1)^{j-1} \Lambda_{\alpha^1} / (2\Lambda), \quad G_{jj}^2 = (-1)^j \Lambda_{\alpha^2} / (2\Lambda), \quad G_{12}^j = G_{21}^j = \Lambda_{\alpha^{3-j}} / (2\Lambda), \quad j = 1, 2; \quad (4)$$

R^j , P^j , $j = 1, 2, 3$, L^k , N^k , $k = 1, 2$, – компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, κ^2 – коэффициент сдвига, $D = D(\alpha^1, \alpha^2) = \sqrt{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$ – якобиан (A_{ij} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0 ; в изометрических координатах $A_{11} = A_{22} = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$, $A_{12} = 0$ и $D = \Lambda$), $h_0 = \text{const}$ – толщина оболочки; α^1 , α^2 – декартовы координаты точек области Ω .

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам – от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

В настоящее время достаточно полно изучена разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих состояние равновесия оболочек в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява [2–5]. В то же время актуальной задачей является исследование подобных краевых задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява [2, с. 349]. Имеется ряд работ [6–13], в которых в рамках сдвиговой модели Тимошенко исследована разрешимость и доказаны теоремы существования обобщённых решений в соболевских пространствах нелинейных задач для пологих оболочек, отнесённых к евклидовой системе координат. В основе исследований в [6–13] лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям.

В данной статье метод работ [6–13] развивается на случай пологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко, отнесённых к изометрической системе координат. Переход к изометрическим координатам, с одной стороны, расширяет класс рассматриваемых оболочек, а с другой – существенно усложняет систему дифференциальных уравнений.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(а) имеют место включения

$$B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega) \cap C_\beta(\overline{\Omega})) \times L_1[-h_0/2, h_0/2], \quad i, j, k, n = 1, 2, 3,$$

$$B_{\lambda\mu}(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad \lambda, \mu, k = 1, 2;$$

(б) якобиан $D = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\overline{\Omega}$ и имеет место включение $\Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(4)}(\Omega)$;

(с) компоненты внешних сил R^j , $j = 1, 2, 3$, и L^k , $k = 1, 2$, принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j , $j = 1, 2, 3$, N^k , $k = 1, 2$, – пространству $C_\beta(\Gamma)$; внешние силы самоуравновешены;

(д) Ω – произвольная односвязная область с границей $\Gamma \in C_\beta^1$.

Здесь и далее $2 < p < 4/(2 - \beta)$, $0 < \beta < 1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ обобщённым решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Обозначим $W_p^{(j)}(\Omega)$ – пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha = (p-2)/p$. Заметим, что при $2 < p < 4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha < \beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \quad (5)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} e_{sjj}^0 &= w_{j\alpha^j}, \quad e_{sj3}^0 = \gamma_{j3}^0, \quad e_{sjj}^1 = \psi_{j\alpha^j}, \quad j = 1, 2, \quad e_{s12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad e_{s12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \\ e_{cjj}^0 &= -G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3, \quad e_{cjj}^1 = -G_{jj}^\lambda \psi_\lambda, \quad j = 1, 2, \quad e_{c12}^0 = -2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3, \\ e_{c12}^1 &= -2G_{12}^\lambda \psi_\lambda, \quad \chi_{jj}^0 = w_{3\alpha^j}^2/2, \quad j = 1, 2, \quad \chi_{12}^0 = w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \\ \chi_{ij}^1 &= \chi_{j3}^0 = e_{s33}^0 = e_{sj3}^1 = e_{cij}^k \equiv 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Построение интегральных представлений для обобщённых перемещений. Введём в рассмотрение две комплексные функции:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \omega_j(z) = D\{D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + \\ &+ i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})]\}, \quad j = 1, 2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (1) усилия T^{jk} , моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ_{jk}^n заменим их выражениями из (3), (5). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i , а к четвёртому уравнению – пятое, умноженное также на i , систему (1) при помощи функций $\omega_j(z)$ из (7) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\begin{aligned} \omega_j \bar{z} + h^j(a) &= f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1, 2, \\ DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) &= f_c^3(a) + f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_j \bar{z} &= (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1, 2, \\ h^j(a) &= (-1)^{\mu-1}[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^3-\mu} \nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + i(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^\mu} \nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}] - (j-1)DD_0^{1313}(\gamma_{13}^0 + i\gamma_{23}^0)/2, \\ \nu_{1j} &= w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1, 2; \quad h^3(a) = (DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (DD_0^{1313} \psi_\lambda)_{\alpha^\lambda}; \\ f_c^j(a) &= (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2, \quad f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2, \quad j = 1, 2, \\ f_c^3(a) &= f_{c3}(a), \quad f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -(DT^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(e), \\ f_{c3+j}(a) &= -(DM^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi j}(a) = -(DT^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\chi), \\ f_{\chi 3+j}(a) &= -(DM^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\chi), \quad j = 1, 2, \\ f_{c3}(a) &= -DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi 3}(a) = -(DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} - DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\chi), \\ F^1 &= D(R^1 + iR^2)/2, \quad F^2 = D(L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = DR^3; \\ e &= e_s + e_c, \quad e_s = (e_s^0, e_s^1), \quad e_c = (e_c^0, e_c^1), \quad e_s^k = (e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k), \\ e_c^k &= (e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k), \quad k = 0, 1, \quad \chi = (\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0); \end{aligned} \quad (9)$$

$e_{sij}^k, e_{cij}^k, \chi_{ij}^k$ определены в (6).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ , поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(-i)^j t' \omega_k(t)] + 2(-1)^j DD_{k+\delta-2}^{1212} \nu_{\delta 3-j\alpha} d\alpha^\lambda/ds &= \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \\ &+ \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\ DD_0^{1313} [(w_{3\alpha^2} + \psi_2) d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1) d\alpha^2/ds] &= \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{cj}(a)(t) &= D[T^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{c3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - \\ &- M^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{\chi j}(a)(t) = D[T^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds], \\ \varphi_{\chi 3+j}(a)(t) &= D[M^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds], \quad j = 1, 2, \quad \varphi_{c3}(a)(t) \equiv 0, \\ \varphi_{\chi 3}(a)(t) &= D[(T^{11}(\gamma)w_{3\alpha^1} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^2}) d\alpha^2/ds - (T^{22}(\gamma)w_{3\alpha^2} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^1}) d\alpha^1/ds], \\ F^{3+j} &= -P^j, \quad j = 1, 2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

усилия T^{jk} , моменты M^{jk} определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (8) при граничных условиях (10) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j , $j = 1, 2, 3$, ψ_k , $k = 1, 2$.

Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar{z}} = \rho^j, \quad j = 1, 2, \quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \quad (12)$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ – произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (12) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения даются формулами [14, с. 29]

$$\begin{aligned} \omega_j(z) &= \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j; \rho^j)(z), \\ T\rho^j(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Phi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\bar{\Omega})$.

Известно [14, с. 39–41, 46], что T – вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\bar{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\bar{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\bar{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial T f}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial T f}{\partial z} \equiv S f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad (14)$$

где S – линейный ограниченный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$, $p > 1$, и $C_\alpha^k(\bar{\Omega})$.

Представления (13) в свою очередь при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega_{j\bar{z}}^0 = i(d_{2j-1}[\omega_1] + d_{2j}[\omega_2]) \equiv iT_j\omega, \quad j = 1, 2, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad (15)$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\omega(z) \equiv \omega_j^0(\Psi_j; \omega)(z), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

В (15), (16) приняты обозначения

$$\begin{aligned} d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda] &= d_{2j+\lambda-2}^1 \omega_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d_{2j+\lambda-2}^2 \overline{\omega_\lambda}, \quad j, \lambda = 1, 2, \\ d_{3k-2}^j &= \frac{1}{4D} \left(\frac{D_1^{1111}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D_1^{1212}}{\delta_1} \right), \quad d_2^j = d_3^j = \frac{1}{4D} \left(\frac{D_1^{1212}}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D_1^{1111}}{\delta_0} \right), \quad k, j = 1, 2, \\ \delta_0 &= D_0^{1111} D_2^{1111} - (D_1^{1111})^2, \quad \delta_1 = D_0^{1212} D_2^{1212} - (D_1^{1212})^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ – произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (12) запишем в виде

$$w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3/(DD_0^{1313}), \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = \operatorname{Re} \Psi_3(z) - \tilde{T} \tilde{\rho}_3 \equiv w_3(\Psi_3; \rho_3)(z), \quad \tilde{T} \tilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \tilde{\rho}_3(\zeta) \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\xi d\eta, \quad (18)$$

где $\Psi_3(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ – произвольная голоморфная функция.

Соотношения (16), (18) являются искомыми интегральными представлениями для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (13)–(18) и (8.20) из [14, с. 58] получаем

$$\begin{aligned} \nu_{jk\alpha^k} &= \operatorname{Im} [\omega_{j\bar{z}}^0 - (-1)^k \omega_{jz}^0], \quad \nu_{jk\alpha^n} = \operatorname{Re} [\omega_{jz}^0 + (-1)^k \omega_{j\bar{z}}^0], \quad k \neq n, \quad j, k, n = 1, 2, \\ \omega_{jz}^0 &= \Psi_j'(z) + iST_j\omega(z), \quad \omega_{j\bar{z}}^0 = iT_j\omega, \quad w_{3\alpha^j} = 2\operatorname{Re}(i^{j-1}w_{3z}), \quad j = 1, 2, \\ w_{3z} &= \Psi_3'(z)/2 + T\tilde{\rho}_3(z)/4, \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -\operatorname{Re} \{i^n[\omega_{kz\bar{z}}^0 + (-1)^j(\omega_{kz\bar{z}}^0 + \omega_{k\bar{z}z}^0)]\}, \\ \nu_{kn\alpha^1\alpha^2} &= \operatorname{Re} \{i^{n-1}(\omega_{kzz}^0 - \omega_{k\bar{z}\bar{z}}^0)\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\bar{z}} + (-1)^{j-1}\operatorname{Re} w_{3zz}], \quad k, n, j = 1, 2, \\ w_{3\alpha^1\alpha^2} &= -2\operatorname{Im} w_{3zz}, \quad \omega_{kz\bar{z}}^0 = T_{k1}\omega + S_{k1}(\Phi_0'; \rho_0), \quad \omega_{k\bar{z}z}^0 = T_{k2}\omega + S_{k2}(\Phi_0'; \rho_0), \\ \omega_{kzz}^0 &= \Psi_k''(z) + S\omega_{k\zeta\bar{\zeta}}^0(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{T_k\omega(\tau)}{(\tau-z)^2} d\bar{\tau}, \quad k = 1, 2, \quad \Phi_0' = (\Phi_1', \Phi_2'), \quad \rho_0 = (\rho^1, \rho^2), \\ w_{3zz} &= \Psi_3''(z)/2 + S\tilde{\rho}_3/4, \quad w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad T_{jk}\omega = i[d_{2j+\mu-2,k}^1\omega_\mu + (-1)^{j+\mu}d_{2j+\mu-2,k}^2\overline{\omega_\mu}], \\ S_{jk}(\Phi_0'; \rho_0) &= i[d_{2j+\mu-2}^1\omega_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu}d_{2j+\mu-2}^2\overline{\omega_{\mu,3-k}}], \quad \omega_{j,1} \equiv \omega_{jz} = \Phi_j'(z) + S\rho^j(z), \\ \omega_{j,2} \equiv \omega_{j\bar{z}} &= \rho^j, \quad d_{m,1}^j \equiv d_{mz}^j, \quad d_{m,2}^j \equiv d_{m\bar{z}}^j, \quad j, k = 1, 2, \quad m = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (19)$$

3. Решение задачи (1), (2). Интегральные представления (16), (18) для обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $j = 1, 2$, $\Psi_k(z)$, $k = 1, 2, 3$, и произвольные функции $\rho^j(z)$, $j = 1, 2, 3$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (8) и граничным условиям (10), при этом правые части уравнений (8) и граничных условий (10) временно считаем известными. С этой целью соотношения (16), (18), (19) подставим в левые части системы (8) и граничных условий (10). В результате система уравнений (8) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\Phi)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) - F^j(z), \quad j = 1, 2, 3, \quad z \in \Omega, \quad (20)$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (9), которые содержат функции $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (10) с учётом представлений

$$\begin{aligned}
 S(T_j \Phi_0)^+(t) &= -(\bar{t}')^2 [d_{2j-1}^1(t) \Phi_1(t) + d_{2j}^1(t) \Phi_2(t)] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2), \\
 K_{0j}(\Phi_0)(t) &= -\frac{d_{2j+\mu-2}^1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\tau - t} \Phi_{\mu}(\tau) d\tau - (-1)^{j+\mu} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(t)}{2\pi i} \times \\
 &\times \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\bar{\tau} - \bar{t}} \overline{\Phi_{\mu}(\tau)} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^1(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^1(t)}{(\zeta - t)^2} \Phi_{\mu}(\zeta) d\xi d\eta - \\
 &- \frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^2(t)}{(\zeta - t)^2} \overline{\Phi_{\mu}(\zeta)} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \\
 \psi(\tau, t) &= (\bar{\tau} - \bar{t})/(\tau - t), \quad \psi(t, t) = (\bar{t}')^2,
 \end{aligned} \tag{21}$$

получаемых при помощи соотношений (13)–(15), формул (4.7), (4.9) из [14, с. 28] и формул Сохоцкого [15, с. 66], преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 &(-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} [i^j t' \Phi_{\lambda}(t)] - 2DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} [i^{j-1} t' \Psi'_{\lambda}(t)] - 2DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} [i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)] + \\
 &+ H_{3(k-1)+j} \rho(t) = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\
 &DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [it' \Psi'_3(t)] + K_{03}(\Phi)(t) + H_3 \rho(t) = \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),
 \end{aligned} \tag{22}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 H_{3(k-1)+j} \rho(t) &= \operatorname{Re} [(-i)^j t' T \rho^k(t)] - 2DD_{k+\lambda-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} \{i^j t' (I + S)(T_{\lambda} T \rho_0)^+(t)\}, \quad k, j = 1, 2, \\
 H_3 \rho(t) &= DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [it' (T \tilde{\rho}_3(t)/2 + T T_2 T \rho_0(t))], \\
 K_{03}(\Phi)(t) &= DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} \{t' [\Psi_2(t) + i T T_2 \Phi_0(t)]\}, \\
 d_{kj}(t) &= (-1)^{j-1} [2(-1)^{\lambda} DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) d_{2\lambda+j-2}^2(t) + 3 - k - j], \quad k, j = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{23}$$

I – тождественный оператор, операторы T , S , T_{λ} и функции $d_j^k(t)$ определены в (13), (14), (15) и (17) соответственно; $\Phi_{\lambda}(t) \equiv \Phi_{\lambda}^+(t)$, $t \in \Gamma$; символ $\Phi_{\lambda}^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_{\lambda}(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω .

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, $\Phi_k(z) \in C_{\alpha}(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2$, $\Psi_j(z) \in C_{\alpha}^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2, 3$, получили систему уравнений (20), (22). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями

$$\Phi_k(z) = \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k = 1, 2,$$

$$\Psi_j'(z) = i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \Psi_j'(\mu_{2j-1})(z), \quad j = 1, 2, 3, \quad \Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)}, \tag{24}$$

где $\mu_j(t) \in C_{\alpha}(\Gamma)$, $j = \overline{1, 5}$, – произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ – элемент длины дуги кривой Γ .

Для функций $\Psi_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, имеем представления

$$\begin{aligned}
 \Psi_j(z) &= i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j = 1, 2, 3, \\
 \Theta^0(f)(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau'} \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где c_j , $j = \overline{1, 6}$, – произвольные действительные постоянные, под $\ln(1 - z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Используя формулы Сохоцкого [15, с. 66], находим $\Phi_k(t)$, $k = 1, 2$, $\Psi_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, $t \in \Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (25) в систему (20), (22), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho \in L_p(\Omega)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\mu)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) + g_c^j(z) - F^j(z), \quad z \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{n=1}^5 \left[a_{jn}(t) \mu_n(t) + b_{jn}(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + K_j \mu(t) + H_j \rho(t) = \\ = \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g_c^{3+j}(t) - F^{3+j}(t), \quad j = \overline{1, 5}, \quad t \in \Gamma, \quad (26)$$

в которой приняты обозначения

$$K_{3(n-1)+j} \mu(t) = (-1)^j d_{n\lambda}(t) \{ \operatorname{Re} [i^j t' \Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - i \operatorname{Re} (i^{j-1}) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda})(t) \} + \\ + 2DD_{\lambda+n-2}^{1212}(t) \{ \operatorname{Re} [i^{j+1} t' \Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - i \operatorname{Re} (i^j) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda-1})(t) - \operatorname{Re} [i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)] \}, \quad n, j = 1, 2, \\ K_3 \mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [t' \Theta(\mu_5)(t)]; \\ g_c^2(z) = DD_0^{1313}(c_4 + ic_3)/2, \quad g_c^3(z) = -c_4(DD_0^{1313})_{\alpha^1} - c_3(DD_0^{1313})_{\alpha^2}, \\ g_c^6(t) = DD_0^{1313}(t)(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds), \quad g_c^1(z) = g_c^{3+j}(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 4, 5; \\ a_{3(k-1)+j, 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} (i^j)/2, \quad b_{3(k-1)+j, 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} (i^{j-1})/(2\pi), \\ a_{3(k-1)+j, 2\lambda-1}(t) = -DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} (i^{j-1}), \quad b_{3(k-1)+j, 2\lambda-1}(t) = DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} (i^j)/\pi, \\ k, j, \lambda = 1, 2, \quad a_{35}(t) = -DD_0^{1313}(t)/2, \quad (27)$$

остальные a_{jk} , b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j = 1, 2$; $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$, $\mu_0 = (\mu_2, \mu_4)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:

- 1) $h_1^j(\rho)$, $j = 1, 2, 3$, – линейные вполне непрерывные операторы в пространстве $L_p(\Omega)$;
- 2) $h_2^j(\mu)$, $j = 1, 2, 3$, – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu \in (0, 1)$ в $L_p(\Omega)$;
- 3) $K_j \mu$, $j = \overline{1, 5}$, – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\gamma < \beta/2$;
- 4) $H_j \rho$, $j = \overline{1, 5}$, – линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ при всех $\alpha' < \alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;
- 5) имеют место включения $f_c^j(a)(z), f_\chi^j(a)(z), F^j(z), g_c^j(z) \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, $\varphi_{cj}(a)(t), \varphi_{\chi j}(a)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $j, k = \overline{1, 5}$.

Доказательство. Известно [14, с. 26–27], что интеграл типа Коши $\theta(f)$ в (24) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\theta'(f)$ – ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1 < q < 2/(1 - \alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\theta(f)$ – вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при всех $p > 1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ для любого $\alpha' < \alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T , S , определённых в (13), (14), используя представления для производных первого порядка обобщённых перемещений в (19) и выражения для операторов $h^j(a)$ в (9), получаем, что первые утверждения 1), 2) леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau, t) \in C_\beta(\Gamma) \times C_\beta(\Gamma)$ [15, с. 28–32], $d_{k\lambda}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $d_k^j(z), D_0^{1313}(z), D(z) \in C_\beta(\overline{\Omega})$, то, принимая во внимание следствие 4.3 из [16, с. 124], легко убеждаемся в том,

что первые два слагаемых в правой части представления для оператора $K_{0j}(\mu_0)$ в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любого $\gamma < \beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвертое слагаемые этого представления в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$, $\gamma < \beta$. Тогда получаем, что $K_{0j}(\mu_0)$, $j = 1, 2$, – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$, $\gamma < \beta$. Аналогично из представления оператора $K_{03}(\mu)$ в (23) следует, что $K_{03}(\mu)$ – линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu \in (0, 1)$.

Далее два первых слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) преобразуем к виду

$$\frac{(-i)^j}{2} d_{n\lambda}(t) \left\{ \frac{(-1)^j - 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \frac{\tau' - t'}{\tau - t} d\tau + \frac{(-1)^j}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \operatorname{Im} \left(\frac{t'}{\tau - t} \right) d\tau \right\}.$$

Следовательно, с учётом включений $\tau', d_{n\lambda} \in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$\operatorname{Im} [\tau' / (\tau - t)] = k_*(\tau, t) / |\tau - t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau, t) \in C_{\beta/2}(\Gamma) \times C_{\beta/2}(\Gamma)$ [15, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4, 4.5 из [16, с. 125] получаем, что эти слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любых $\nu \in (0, 1)$ и $\gamma < \beta/2$. Аналогично показываем, что третье и четвертое слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) обладают таким же свойством. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$, $j = \overline{1, 5}$, в (27) вытекает справедливость утверждения 3) леммы. Справедливость утверждения 4) следует из представлений операторов $H_j\rho$, $j = \overline{1, 5}$, в (23) с учётом свойств операторов T , S , интеграла типа Коши и соотношений

$$S(T_\lambda T \rho_0)^+(t) = T \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} T_\lambda T \rho_0 \right) (t) - \frac{1}{2} (\bar{t}')^2 T_\lambda T \rho_0(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_\lambda T \rho_0(\tau)}{\tau - t} d\bar{\tau}, \quad \lambda = 1, 2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [14, с. 58] и формул Сохоцкого. Справедливость утверждения 5) леммы непосредственно вытекает из формул (9), (11), (27). Лемма доказана.

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha' < \alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (27), вычисляем определитель

$$\det [A(t) - \pi i B(t)] = D^3 D_0^{1313} \delta_1 / (32 \delta_0) (a_1^2 - a_0 a_2), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = 0, 1, 2,$$

где δ_0 , δ_1 определены в (17), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ – квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det [A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на границе Γ и для индекса системы (26) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det (A - \pi i B)}{\det (A + \pi i B)} \right]_{\Gamma} = 0$$

(здесь символ $[\arg \varphi]_{\Gamma}$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ – решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (24), (25) с постоянными $c_j = 0$, $j = \overline{1, 6}$, соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые в свою очередь по формулам (16), (18) определяют функции w_j , $j = 1, 2, 3$, ψ_k , $k = 1, 2$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (8) ($f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$) и однородным линейным граничным условиям (10) ($\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0$, $j = \overline{1, 5}$). Умножим действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (8) соответственно на w_1

и w_2 , второго уравнения – соответственно на ψ_1 и ψ_2 , а третье уравнение – на w_3 . После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (10) получаем, что w_j , $j = 1, 2, 3$, ψ_k , $k = 1, 2$, удовлетворяют системе $\nu_{j1}\alpha^1 = 0$, $\nu_{j2}\alpha^2 = 0$, $\nu_{j1}\alpha^2 + \nu_{j2}\alpha^1 = 0$, $w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0$, $j = 1, 2$, решение которой имеет вид

$$w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad w_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5, \quad (28)$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0) = 0$, $j = 1, 2, 3$, $w_3(0) = 0$, то из (28) будем иметь $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$, $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$, $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Тогда $\omega_j(z) = 2ic_0DD_{j-1}^{1212}$, $j = 1, 2$, и из уравнений (12) следуют равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0(DD_{j-1}^{1212})\bar{z}, \quad j = 1, 2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \quad (29)$$

Используя формулы (13), (16), (18) и представление для ω_{jz}^0 в (19), находим функции $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2$, $\Psi'_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, подставив которые в (24), получим

$$\mu_1(t)/t' - c_0(\bar{t}')^2 = F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0DD_{j-1}^{1212}(t) = F_{2j}^-(t), \quad j = 1, 2,$$

$$\mu_{2j-1}(t)/t' = F_{2j-1}^-(t), \quad j = 2, 3,$$

где $F_j^-(t)$ – граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана-Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)] = f_j^-(t)$, $j = \overline{1, 5}$, где

$$f_1^-(t) = c_0\operatorname{Re}(it'), \quad f_{2j}^-(t) = 2c_0DD_{j-1}^{1212}(t)\operatorname{Re}t', \quad j = 1, 2, \quad f_{2j-1}^-(t) = 0, \quad j = 2, 3.$$

Используя решение этой задачи [17, с. 253], для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 1, 2, 4, \quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 3, 5, \quad (30)$$

где $\mu_j^k(t)$ – известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0 , β_{0j} – произвольные действительные постоянные.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (20) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, и проинтегрируем по области Ω , а левые части уравнений в (22) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ . После этого их сложим и приравняем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (24), (25) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j(z)} - T_{3+j}v(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re}T_3v(z) = 0, \quad z \in \Omega,$$

$$\operatorname{Re}\{i[T_{3+j}v(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re}[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau'DD_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})\bar{z}v^\lambda](t) - 2\Theta^-(\tau'DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(t) + (j-1)[iT^0g(v)(t) - \\ - T_\Gamma^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \Gamma; \end{aligned}$$

$$v^j = v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1}, \quad j = 1, 2, \quad v^3 = v_3, \quad \nu^3 = \nu_3. \quad (31)$$

В уравнениях (31) приняты обозначения

$$\begin{aligned} T_3 v(z) &= -2Tg(v)(z) + 2DD_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z), \quad T_{3+j}v(z) = \\ &= 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3 v](z), \quad S_j v(z) = S[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})\bar{\zeta}v^\lambda](z) - (DD_{j+\lambda-2}^{1212})_z v^\lambda(z) - \\ &- 2\Theta'(\tau' DD_{j+\lambda-2}^{1212}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1, 2, \quad g(v)(z) = (DD_0^{1313})_{\bar{z}}(z)v_3(z) - DD_0^{1313}(z)v^2(z)/4, \\ T^0 f(z) &= -\frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega} f(\zeta) \ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi d\eta, \quad T_\Gamma^0 f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\tau) \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma, \\ \Theta'(f)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)^2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), \end{aligned} \quad (32)$$

$\Theta^-(f)(t)$ – граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ извне области Ω ; операторы Tf , Sf , $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (13), (14), (17), (24) соответственно.

Система (31), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (31) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $\nu \in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T , T^0 , T_Γ^0 , введённые в (13), (32), определяют функции $Tf(z)$, $T^0 f(z)$, $T_\Gamma^0 f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (31) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} T_{3+j}v(z) - 2\Theta(\tau'\bar{\nu}^j)(z) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z) = 0, \\ T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})\bar{\zeta}v^\lambda](z) - 2\Theta(\tau' DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(z) &+ (j-1)[iT^0 g(v)(z) - T_\Gamma^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0, \\ j = 1, 2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (33)$$

$\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

Из первых трёх равенств в (31) следует, что функции v_j , $j = \overline{1, 5}$, принадлежат пространству $W_{q_1}^{(1)}(\Omega) \cap C_\alpha(\bar{\Omega})$, $1 < q_1 < 2/(1 - \alpha)$. В них перейдём к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω , а в первых трёх равенствах в (33) – извне области Ω , затем последние прибавим к первым трём соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f \in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1, 2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \quad (34)$$

Продифференцировав первые два равенства в (31) по $\bar{z}$, с учётом (14) получим равенства

$$\bar{\nu}^j = 2d_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + d_{2+j}[T_3 v](z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $X_1 = 2S_1 v$, $X_2 = 2S_2 v + T_3 v$ и решая её, будем иметь

$$X_j = D[(D_{j+\lambda-2}^{1111} - D_{j+\lambda-2}^{1212})\bar{\nu}_z^\lambda + (D_{j+\lambda-2}^{1111} + D_{j+\lambda-2}^{1212})v_z^\lambda], \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega. \quad (35)$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}, \quad j = 0, 1, 2, \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega). \quad (36)$$

Используя соотношения для функций $T_3v(z)$, $S_jv(z)$, $j = 1, 2$, в (32), находим $X_{j\bar{z}}$, $j = 1, 2$, которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1 < q_1 < 2/(1 - \alpha)$. Теперь эти выражения $X_{j\bar{z}}$, $j = 1, 2$, подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по $\bar{z}$ равенств (35). Третье равенство в (31) дифференцируем по z и $\bar{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $\tilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением системы линейных уравнений (8) при нулевой правой части.

Далее от решения (v, ν) союзной системы уравнений (31) потребуем, чтобы $\nu(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$. Тогда, как нетрудно видеть, $v(z) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$. Теперь в равенствах (35) переходим к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω , при этом левую часть $X_j^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $(S_jv)(z)$, $T_3v(z)$ в (32). Затем из них вычтем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (33) с последующим переходом в них к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ извне Ω . Далее третьи равенства в (31) и (33) продифференцируем по z , в получившихся равенствах перейдем к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ , используя соотношения (34) и формулы

$$(Sf)^+(t) - (Sf)^-(t) = -f(t) \cdot (\bar{t}')^2, \quad \theta'^+(\tau'f)(t) - \theta'^-(\tau'f)(t) = f_t + f_{\bar{t}} \cdot (\bar{t}')^2, \quad t \in \Gamma,$$

в которых операторы Sf , $\Theta'(f)$ определены в (14), (32), после несложных преобразований приходим к тому, что функции v_1 , v_2 , $2v_3$, v_4 , v_5 удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (10). Таким образом, вектор $\tilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений в (8), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям в (10). Следовательно, в соответствии с (28) для компонент вектора $\tilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (34). Следовательно, решение $(v, \nu)^T$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ союзной системы (31) можно представить как $(v, \nu)^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{k10})$, $k = \overline{1, 6}$, – линейно независимые решения системы (31). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ \operatorname{Re} [(f_c^1 + f_\chi^1 + g_c^1 - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + (f_c^2 + f_\chi^2 + g_c^2 - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)] + \\ & + (f_c^3 + f_\chi^3 + g_c^3 - F^3)(z)\gamma_{k3}(z) \} d\alpha^1 d\alpha^2 + \sum_{j=1}^5 \int_{\Gamma} (\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} + g_c^{3+j} - F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} DR^j d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^j ds + \iint_{\Omega} DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\ & \iint_{\Omega} D(R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1) ds + \iint_{\Omega} D(\alpha^2 G_{\lambda\mu}^1 - \alpha^1 G_{\lambda\mu}^2) T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \\ & \iint_{\Omega} D(\alpha^j R^3 - L^j) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\alpha^j P^3 - N^j) ds + \iint_{\Omega} D\alpha^j B_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{\Omega} DT^{\lambda j}(\gamma) w_{3\alpha^1} d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint_{\Omega} DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\
& \iint_{\Omega} DR^3 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^3 ds + \iint_{\Omega} DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,
\end{aligned} \quad (37)$$

где R^j , P^j , $j = 1, 2, 3$, L^k , N^k , $k = 1, 2$, – компоненты внешних сил, γ – произвольно фиксированный вектор деформации, w_3 – произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (37) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\rho, \mu) &= (\rho_c, \mu_c)(a) + (\rho_\chi, \mu_\chi)(a) + (\rho_*, \mu_*) + (\rho_F, \mu_F), \quad (\rho_c, \mu_c)(a) = \Re f_c(a), \\
(\rho_\chi, \mu_\chi)(a) &= \Re f_\chi(a), \quad (\rho_*, \mu_*) = \Re g_c + (\tilde{\rho}, \tilde{\mu}), \quad (\rho_F, \mu_F) = -\Re F,
\end{aligned} \quad (38)$$

где $f_c(a) = (f_c^1, f_c^2, f_c^3, \varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5})$, $f_\chi(a) = (f_\chi^1, f_\chi^2, f_\chi^3, \varphi_{\chi1}, \dots, \varphi_{\chi5})$, $g_c = (g_c^1, \dots, g_c^8)$, $F = (F^1, \dots, F^8)$; $\Re = (\Re_1, \dots, \Re_8)$; $\Re_j$, $j = 1, 2, 3$, и $\Re_k$, $k = 4, 8$, – линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3)$, $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_5)$ определены формулами (29), (30), а f_c^j , f_χ^j , φ_{ck} , $\varphi_{\chi k}$, g_c^n , F^n – формулами в (9), (11), (27).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (38) подставить в соотношения (24), (25), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z) = (\Phi_0, \Psi)$, $\Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2)$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z) = \Phi_c(a)(z) + \Phi_\chi(a)(z) + \Phi_*(z) + \Phi_F(z), \quad z \in \Omega, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_c(a)(z) &= \Phi(\mu_c(a))(z), \quad \Phi_\chi(a)(z) = \Phi(\mu_\chi(a))(z), \quad \Phi_F(z) = \Phi(\mu_F)(z), \\
\Phi_*(z) &= \Phi(\Re g_c)(z) + \tilde{\Phi}(z), \quad \tilde{\Phi}(z) = (c_0 \beta_0(z), c_0 \beta_1(z), c_0 \gamma_0(z) + c_1 + ic_2, 0, 0), \\
\beta_j(z) &= 2i\Theta(t' D D_j^{1212})(z), \quad j = 0, 1, \quad \gamma_0(z) = \Theta(t' \bar{t})(z),
\end{aligned}$$

функция $\Theta(f)(z)$ определена в (24), c_j – произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (38) и голоморфных функций из (39) подставим в (16), (18). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде

$$\begin{aligned}
\omega_j^0(z) &= \omega_{jc}^0(a) + \omega_{j\chi}^0(a) + \omega_{j*}^0(z) + \omega_{jF}^0(z), \quad j = 1, 2, \\
w_3(z) &= w_{3c}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega,
\end{aligned} \quad (40)$$

где $\omega_{jc}^0(a) = \omega_j^0(\Psi_{jc}(a); \omega_{jc}(a))$, $\omega_c(a) = (\omega_{1c}, \omega_{2c})$, $\omega_{jc}(a) = \omega_j(\Phi_{jc}(a); \rho_c^j(a))$, $j = 1, 2$, $w_{3c}(a) = w_3(\Psi_{3c}(a); \rho_c^3(a))$; остальные слагаемые в системе (40) определяются аналогично; операторы $\omega_j(\Phi_j; \rho^j)$, $\omega_j^0(\Psi_j; \omega_j)$ и $w_3(\Psi_3; \rho^3)$ определены в (13), (16), (18) соответственно.

Отметим, что функции $\omega_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $\omega_{1*}^0(z) = w_{2*} + iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$, $w_{3*}(z)$ имеют место представления (28).

Исследуем разрешимость системы (40) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда

- 1) $\omega_{jc}^0(a)$, $j = 1, 2$, $w_{3c}(a)$ – линейные вполне непрерывные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$;
- 2) $\omega_{j\chi}^0(a)$, $j = 1, 2$, $w_{3\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2$, справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& \|\omega_{j\chi}^0(a^1) - \omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \\
& + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},
\end{aligned} \quad (41)$$

где c – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

3) $\omega_{j*}^0(z), \omega_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Из представлений для $f_c^j(a)$, $f_\chi^j(a)$ в (9), $\varphi_{cj}(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$ в (11) следует, что $f_c^j(a)$ и $\varphi_{cj}(a)$ – линейные вполне непрерывные, а $f_\chi^j(a)$ и $\varphi_{\chi j}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; для $f_\chi^3(a)$, $\varphi_{\chi 3}(a)$ справедливы оценки вида (41), а для $f_\chi^j(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$, $j = 1, 2$, – оценки вида

$$\|f_\chi^j(a^1) - f_\chi^j(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{\chi j}(a^1) - \varphi_{\chi j}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leq c(\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \quad (42)$$

Тогда из (38) с учётом ограниченности операторов $\mathfrak{R}_j$ получим, что $\rho_c^j(a)$ и $\mu_{kc}(a)$ – линейные вполне непрерывные, а $\rho_\chi^j(a)$ и $\mu_{k\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно, и для $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки (41). Следовательно, с учётом свойств интеграла типа Коши из (39) будем иметь, что $\Phi_{kc}(a)$, $\Psi'_{jc}(a)$ – линейные вполне непрерывные, $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, причём для нелинейных операторов $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ справедливы оценки (41).

Исследуем свойства операторов

$$\Phi'_{kc}(a) = \Theta'(\mu_{2kc}(a)), \quad k = 1, 2, \quad \Psi''_{jc}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta'(\mu_{2j-1c}(a)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (43)$$

где оператор $\Theta'(f)$ определён в (32).

Заметим, что функции $\rho_c^j(a)(z)$, $\mu_{kc}(a)(t)$, определённые в (38), являются решениями системы (26) с правой частью $f_c^j(a)(z)$, $j = 1, 2, 3$, $\varphi_{ck}(a)(t)$, $k = \overline{1, 5}$. Поэтому $\mu_c = (\mu_{1c}, \dots, \mu_{5c})$ можно представить в виде

$$\mu_c(a)(t) = A^{-1}(t) \left[\varphi_c(a)(t) - B(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_c(a)(\tau)}{\tau - t} d\tau - K\mu_c(a)(t) - H\rho_c(a)(t) \right], \quad (44)$$

где $A^{-1}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ – матрица, обратная к матрице $A(t)$, $\varphi_c = (\varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5})$, $K = (K_1, \dots, K_5)$, $H = (H_1, \dots, H_5)$, $\rho_c = (\rho_c^1, \rho_c^2, \rho_c^3)$.

Если выражение (44) для $\mu_c(a)(t)$ подставить в (43), после этого переставить порядок интегрирования в повторных интегралах и использовать указанные выше свойства интеграла типа Коши, операторов T , S , соотношений (4.7), (4.9) из [14, с. 28–29] и лемму 1, то после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим, что операторы $\Phi'_{kc}(a)$, $k = 1, 2$, $\Psi''_{jc}(a)$, $j = 1, 2, 3$, суть линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. При помощи аналогичных рассуждений также будем иметь, что $\Phi'_{k\chi}(a)$, $k = 1, 2$, $\Psi''_{j\chi}(a)$, $j = 1, 2, 3$, – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и для них справедливы оценки (41). Теперь, если использовать соотношения (15), (16), (19) и оценки (42), утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Систему (40) запишем в виде

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} L &= (L_1, \dots, L_5), \quad G = (G_1, \dots, G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}), \\ \tilde{a}_F &= (\tilde{w}_{1F}, \tilde{w}_{2F}, \tilde{w}_{3F}, \tilde{\psi}_{1F}, \tilde{\psi}_{2F}), \quad \omega_{1*}^0 = w_{2*} + iw_{1*}, \quad \omega_{2*}^0 = \psi_{2*} + i\psi_{1*}, \quad L_3(a) = w_{3c}(a), \\ G_3(a) &= w_{3\chi}(a), \quad L_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{nc}^0(a)], \quad G_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{n\chi}^0(a)], \quad n, j = 1, 2, \\ \tilde{w}_{jF} &= -\operatorname{Re}[i^j \omega_{1F}^0], \quad \tilde{\psi}_{jF} = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{2F}^0], \quad j = 1, 2, \quad \tilde{w}_{3F} = w_{3F}. \end{aligned}$$

Отметим, что $L(a)$ – линейный вполне непрерывный, $G(a)$ – нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (41); $\tilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора a_* даются формулами (28).

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (26), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 &= 0, \quad j = 1, 2, \\ w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 &= 0, \quad \psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \\ \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda &= 0, \quad w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (46)$$

Выведем условия, при выполнении которых система (46) имеет только нулевое решение. Для этого введём в рассмотрение вспомогательную систему вида

$$\begin{aligned} (\omega_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^2} &= c_1 f_1(\alpha^1, \alpha^2), \quad (\omega_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^1} = c_1 f_2(\alpha^1, \alpha^2), \\ \omega_{1\alpha^1} + \omega_{2\alpha^2} &= c_1 f_3(\alpha^1, \alpha^2) \end{aligned} \quad (47)$$

относительно функций $\omega_1(\alpha^1, \alpha^2)$, $\omega_2(\alpha^1, \alpha^2) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$, где $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, – произвольно фиксированные функции, c_1 – произвольная действительная постоянная.

Решаем систему (47). При помощи комплексной функции $\omega = \omega_1/\Lambda + i\omega_2/\Lambda$ первые два уравнения в (47) представим в виде неоднородного уравнения Коши–Римана $\omega_{\bar{z}} = c_1(f_1 + if_2)/2$, общее решение которого даётся формулой $\omega = \varphi(z) + c_1 T(f_1 + if_2)(z)/2$, откуда для ω_j получаем представления

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \operatorname{Re} \varphi(z) + c_1 g_1(\alpha^1, \alpha^2), \quad \omega_2 = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \operatorname{Im} \varphi(z) + c_1 g_2(\alpha^1, \alpha^2), \\ g_1 &= \Lambda \operatorname{Re} T(f_1 + if_2)/2, \quad g_2 = \Lambda \operatorname{Im} T(f_1 + if_2)/2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\varphi(z)$ – произвольная голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$, оператор T определён в (13). Из условия (b) и указанных выше свойств оператора T следует, что функции g_j , $j = 1, 2$, принадлежат пространству $W_p^{(3)}(\Omega)$.

Выражения решений ω_1 , ω_2 из (48) подставим в третье уравнение системы (47). Тогда относительно голоморфной функции $\varphi(z)$ получим уравнение вида

$$\operatorname{Re} [\varphi'(z) + (\ln \Lambda)_z \varphi(z)] = c_1 g_3(\alpha^1, \alpha^2), \quad g_3(\alpha^1, \alpha^2) = (f_3 - g_{1\alpha^1} - g_{2\alpha^2})/(2\Lambda), \quad (49)$$

где функция g_3 принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Предположим, что в области Ω выполняется условие

$$\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2) = (\ln \Lambda)_{z\bar{z}} \neq 0, \quad (50)$$

т.е. функция $\ln \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$ в области Ω не является гармонической.

Заметим, что условие (50) в силу уравнения Гаусса [18, с. 193] означает, что гауссова кривизна срединной поверхности оболочки не равна нулю.

Найдём решение уравнения (49). Заметим, что функция $\operatorname{Re} \varphi'(z)$, как действительная часть голоморфной функции $\varphi'(z)$, в области Ω является гармонической, т.е. $[\operatorname{Re} \varphi'(z)]_{z\bar{z}} = 0$. Следовательно, в области Ω при любой постоянной c_1 должно выполняться условие $[c_1 g_3 - \operatorname{Re} ((\ln \Lambda)_z \varphi)]_{z\bar{z}} = 0$, которое можно записать в виде $\operatorname{Re} (\Lambda_0 \varphi)_z - c_1 g_{3z\bar{z}} = 0$, $c_1 = \operatorname{const}$, $z \in \Omega$, откуда с учётом условий (50) и $g_{3z\bar{z}} \neq 0$, $z \in \Omega$, получим $\operatorname{Re} (\Lambda_0 \varphi)_z = 0$, $c_1 = 0$. Итак,

голоморфная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет системе уравнений $\operatorname{Re}(\Lambda\varphi)_z = 0$, $\operatorname{Re}(\Lambda_0\varphi)_z = 0$, которая эквивалентна системе

$$2\Lambda u_{\alpha^1} + \Lambda_{\alpha^1}u + \Lambda_{\alpha^2}v = 0, \quad 2\Lambda_0 u_{\alpha^1} + \Lambda_{0\alpha^1}u + \Lambda_{0\alpha^2}v = 0, \\ u_{\alpha^1} = v_{\alpha^2}, \quad u_{\alpha^2} = -v_{\alpha^1}, \quad \Lambda_0/\Lambda \neq \text{const}, \quad (51)$$

где $\varphi(z) = u(\alpha^1, \alpha^2) + iv(\alpha^1, \alpha^2)$, функция $\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2)$ определена в (50).

Исключив из первых двух уравнений в (51) производную u_{α^1} , получим

$$v = \Lambda_1 u, \quad \Lambda_1 \equiv \Lambda_1(\alpha^1, \alpha^2) = -(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2} \in W_p^{(1)}(\Omega). \quad (52)$$

Теперь, если выражение функции v из (52) подставить в первое уравнение (51), относительно функции u получим уравнение

$$u_{\alpha^1} + \Lambda_2 u = 0, \quad \Lambda_2 \equiv \Lambda_2(\alpha^1, \alpha^2) = [(\ln \Lambda)_{\alpha^1} + (\ln \Lambda)_{\alpha^2} \Lambda_1]/2 \in W_p^{(1)}(\Omega),$$

общее решение которого дается формулой

$$u = c(\alpha^2)\Lambda_3, \quad \Lambda_3 \equiv \Lambda_3(\alpha^1, \alpha^2) = \exp \left[- \int_{\alpha_0^1}^{\alpha^1} \Lambda_2(\beta^1, \alpha^2) d\beta^1 \right] \in W_p^{(1)}(\Omega), \quad (53)$$

где $c(\alpha^2)$ – произвольная действительная функция переменной α^2 , принадлежащая пространству C_α^1 , $(\alpha_0^1, \alpha_0^2) \in \overline{\Omega}$ – произвольно фиксированная точка.

Тогда для функции v с учётом (52) будем иметь представление

$$v = \Lambda_1 \Lambda_3 c(\alpha^2). \quad (54)$$

Теперь функции $u(\alpha^1, \alpha^2)$, $v(\alpha^1, \alpha^2)$ из (53), (54) подставим в третье и четвертое уравнения системы (51). В результате относительно функции $c(\alpha^2)$ почти всюду в области Ω получим уравнения

$$\Lambda_3 c'(\alpha^2) + [\Lambda_{3\alpha^2} + (\Lambda_1 \Lambda_3)_{\alpha^1}] c(\alpha^2) = 0, \quad \Lambda_1 \Lambda_3 c'(\alpha^2) - [\Lambda_{3\alpha^1} - (\Lambda_1 \Lambda_3)_{\alpha^2}] c(\alpha^2) = 0,$$

из которых видно, что $c(\alpha^2) \equiv 0$, следовательно, из формул (53), (54) будем иметь $\varphi(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда из соотношений (48) получим $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Перейдём к нахождению функций ψ_1 , ψ_2 . С этой целью четвертое и пятое равенства системы (46) сложим и вычтем друг из друга. Принимая во внимание соотношения (4) для символов Кристоффеля, будем иметь систему

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2} = 0, \quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 0, \quad \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2} = 0,$$

которая получается из системы (47) при $f_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, $\omega_1 = \psi_1$, $\omega_2 = \psi_2$. Поэтому в силу доказанного выше $\psi_1(z) = \psi_2(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и из последних двух равенств в (46) следует, что $w_3 = c_1 = \text{const}$ в $\overline{\Omega}$. Подставляя это значение функции w_3 в первые три равенства системы (46), при помощи аналогичных рассуждений снова приходим к системе вида (47), в которой $\omega_1 = w_1$, $\omega_2 = w_2$, $f_1 = (B_{11} - B_{22})/\Lambda$, $f_2 = 2B_{12}/\Lambda$, $f_3 = B_{11} + B_{22}$. В силу условия (а) имеем $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, при этом условие $g_{3z\bar{z}} \neq 0$ примет вид

$$[(B_{11} + B_{22})/\Lambda - \operatorname{Re}(\ln \Lambda)_z \operatorname{Re} T f + \operatorname{Im}(\ln \Lambda)_z \operatorname{Im} T f - \operatorname{Re} S f]_{z\bar{z}} \neq 0, \\ f = (B_{11} - B_{22} + 2iB_{12})/\Lambda, \quad (55)$$

где операторы T , S определены в (13), (14). Следовательно, $w_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, в $\overline{\Omega}$. Итак, уравнение $a - L(a) = 0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Таким образом, существует

обратный оператор $(I - L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (45) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_F, \quad (56)$$

где $G_*(a) = (I - L)^{-1}G(a)$, $a_F = (I - L)^{-1}\tilde{a}_F$.

Отметим, что вектор $a_c = (I - L)^{-1}a_*$ является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому в силу доказанного выше $a_c \equiv 0$, что и учтено нами при переходе к уравнению (56).

Также отметим, что вектор a_F в (56) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:

1) $G_*(a)$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых векторов $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$, $j = 1, 2$, справедлива оценка

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq c_* (\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

где c_* – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость этой леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I - L)^{-1}$ и G .

Исследуем разрешимость уравнения (56) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq q_* \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1 + r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \quad (57)$$

Тогда к уравнению (56) можно применить принцип сжатых отображений [19, с. 146], согласно которому уравнение (56) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, где $\mathbb{R}$ – резольвента оператора G_* .

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернёмся к условиям разрешимости (37), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (37) выполняются.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (36), (50), (55) и неравенства (57). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2 - \beta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975.
2. Ворovich И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
3. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.
4. Карчевский М.М. Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Уч. зап. Казанского. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. № 3. С. 105–110.

5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек. Казань, 2011.
6. *Тимергалиев С.Н.* О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 40–56.
7. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 373–386.
8. *Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С.* Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 651–664.
9. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2017. № 4. С. 59–75.
10. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. № 1. С. 98–113.
11. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 239–255.
12. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2021. № 4. С. 90–107.
13. *Тимергалиев С.Н.* О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 507–525.
14. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
15. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
16. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.
17. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963.
18. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., 1978.
19. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.
После доработки 13.02.2023 г.
Принята к публикации 16.03.2023 г.