ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 652–657

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.954

О ВЛИЯНИИ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ НА РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2023 г. Л. Е. Россовский, Р. В. Шамин

Рассмотрена неоднородная краевая задача со смешанными краевыми условиями для уравнения Лапласа в области, представляющей такое возмущение Π_γ прямоугольника Π, при котором одна из его сторон заменена некоторой кривой γ минимальной гладкости. Получена оценка разности решений возмущённой и невозмущённой задач в норме пространства Соболева H^1 на общей области их определения.

DOI: 10.31857/S0374064123050096, EDN: CYGMPB

Введение. В гидродинамике идеальной жидкости со свободной поверхностью возникает необходимость решения задачи Дирихле–Неймана для уравнения Лапласа, которая состоит в нахождении гармонической функции $u(x,y)$ в плоской области, ограниченной горизонтальным отрезком $\{y=h,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\}$, двумя вертикальными отрезками $\{x=0,\ -h\leqslant y\leqslant h\}$ и $\{x=2\pi,\ -h\leqslant y\leqslant h\}$ и кривой γ, соединяющей точки $x=0,\ y=-h$ и $x=2\pi,\ y=-h$, и моделирующей неровности дна. При этом $u(x,y)$ является 2π-периодической функцией по переменной x, удовлетворяет условию Дирихле с заданной граничной функцией на $\{(x,h): x\in(0,2\pi)\}$ и однородному условию Неймана на γ. Такие задачи часто возникают при моделировании волн цунами и "волн-убийц" [1, 2]. Как правило, их решение не имеет теоретических и вычислительных трудностей, но важным остаётся вопрос о влиянии нерегулярности дна на динамику поверхностных волн. В реальных ситуациях морское дно представляет собой весьма нерегулярную поверхность, что в нашей модели отражено отсутствием предположений о гладкости кривой γ. Естественным образом возникает задача анализа зависимости решения (функции $u(x,y)$) от γ.

Рассматриваются обобщённые решения из пространства Соболева H^1 задач в прямоугольнике и в возмущённой области. Эти решения существуют и единственны, для них приводится вариационное свойство, позволяющее оценить разность этих решений по норме пространства H^1 на общей области их определения корнем квадратным из максимальной высоты "неровностей дна". Стоит отметить, что подход, основанный на вариационных свойствах собственных функций и собственных значений (minimax principle), играет фундаментальную роль в вопросах спектральной устойчивости при возмущении области краевых задач для эллиптических дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [3–7]).

Зафиксировав $h>0$, рассмотрим следующую периодическую по x краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике $\Pi_{-h}=(0,2\pi)\times(-h,h)$:

$$\Delta u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Pi_{-h}, \tag{1}$$

$$u|_{y=h}=\varphi(x),\quad x\in(0,2\pi), \tag{2}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=2\pi},\quad u_x|_{x=0}=u_x|_{x=2\pi},\quad y\in(-h,h), \tag{3}$$

$$u_y|_{y=-h}=0,\quad x\in(0,2\pi). \tag{4}$$

Её формальное решение $u=u_{-h}$, найденное методом разделения переменных, имеет вид

$$u_{-h}(x,y)=\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(k(y+h))}{\operatorname{ch}(2kh)}(\varphi_{k,1}\cos(kx)+\varphi_{k,2}\sin(kx)), \tag{5}$$

где числа φ_0, $\varphi_{k,1}$, $\varphi_{k,2}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по тригонометрической системе

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx, \quad \varphi_{k,1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx, \quad \varphi_{k,2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\sin(kx)\,dx, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Все функции и используемые функциональные пространства вещественные. Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (5) в пространстве Соболева $H^1(\Pi_{-h})$ является сходимость числового ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\varphi_{k,1}^2 + \varphi_{k,2}^2) < \infty. \tag{6}$$

Последнее условие эквивалентно принадлежности граничной функции $\varphi(x)$ следовому пространству $H^{1/2}(S^1)$ на окружности S^1. Этот факт элементарно проверяется и хорошо известен. Будем предполагать, что условие (6) выполнено, тогда функция $u_{-h}(x,y)$, заданная формулой (5), принадлежит пространству $H^1(\Pi_{-h})$, удовлетворяет в смысле следов условию (2) и первому из условий (3), а также оценке

$$\|u_{-h}\|_{H^1(\Pi_{-h})} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)}$$

с положительной постоянной c, зависящей лишь от h.

1. Обобщённые решения возмущённой и невозмущённой задач. Для того чтобы сформулировать понятие обобщённого решения краевой задачи (1)–(4), введём в $H^1(\Pi_{-h})$ замкнутое подпространство

$$\widetilde{H}^1(\Pi_{-h}) = \{v\in H^1(\Pi_{-h}) : v|_{y=h} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}\}$$

со скалярным произведением

$$(v_1, v_2)_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} = \iint\limits_{\Pi_{-h}} \nabla v_1 \nabla v_2\,dx\,dy,$$

эквивалентным стандартному скалярному произведению в $H^1(\Pi_{-h})$.

Формально умножив уравнение (1) на произвольную функцию v из пространства $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$, проинтегрировав по области Π_{-h} и воспользовавшись формулой Остроградского, получим

$$\iint\limits_{\Pi_{-h}} \nabla u \nabla v\,dx\,dy = 0, \tag{7}$$

поскольку

$$\int\limits_{\partial\Pi_{-h}} \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS = \int\limits_0^{2\pi} u_y(x,h)v(x,h)\,dx - \int\limits_0^{2\pi} u_y(x,-h)v(x,-h)\,dx + \int\limits_{-h}^{h} u_x(2\pi,y)v(2\pi,y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{-h}^{h} u_x(0,y)v(0,y)\,dy = 0.$$

Действительно, первый интеграл в средней части обращается в нуль за счёт условия $v|_{y=h} = 0$, второй – в силу (4), а для третьего и четвёртого интегралов, используя второе из условий (3), будем иметь

$$\int\limits_{-h}^{h} u_x(2\pi,y)v(2\pi,y)\,dy - \int\limits_{-h}^{h} u_x(0,y)v(0,y)\,dy = \int\limits_{-h}^{h} u_x(2\pi,y)(v(2\pi,y) - v(0,y))\,dy = 0,$$

так как $v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}$.

Назовём функцию $u \in H^1(\Pi_{-h})$ *обобщённым решением* задачи (1)–(4), если она удовлетворяет условию (2) и первому из условий (3) в смысле следов функций из $H^1(\Pi_{-h})$, и для всякой функции $v \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$ выполняется интегральное тождество (7). Легко проверить, что функция u_{-h}, заданная рядом (5), является обобщённым решением задачи (1)–(4).

Для последующих рассуждений удобно сделать все краевые условия однородными. Определим срезающую функцию $\eta(y) \in C^\infty(-\infty, h]$:

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & h/2 < y < h, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

и положим $\Phi(x,y) = \eta(y)u_{-h}(x,y)$. Имеем $\Phi \in H^1(\Pi_{-h})$, $\Phi|_{y=h} = \varphi$ и $\Phi|_{x=0} = \Phi|_{x=2\pi}$, причём $\Phi = 0$ при $y < 0$. Понятно, что функция u является обобщённым решением задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда функция $w = u - \Phi$ принадлежит пространству $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$(w, v)_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} = -\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-h}), \tag{8}$$

где $\Pi_0 = (0, 2\pi) \times (0, h)$. Поскольку правая часть равенства (8) является по v непрерывным линейным функционалом на пространстве $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$, существование и единственность обобщённого решения $w = w_{-h}$ краевой задачи с однородными краевыми условиями очевидным образом следуют из теоремы Рисса. При этом на функции $w_{-h} \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$ функционал

$$\frac{1}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy\right|$$

достигает своего максимума на пространстве $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$. Действительно,

$$\|w_{-h}\|^2_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} = -\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy$$

в силу (8). Поэтому справедливы равенства

$$\frac{1}{\|w_{-h}\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy\right| = \|w_{-h}\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} = \sup_{v \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} \frac{1}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy\right|.$$

В то же время, конечно, $w_{-h} = (1-\eta)u_{-h}$, где u_{-h} – функция, определяемая по формуле (5).

Наряду с исходным прямоугольником Π_{-h}, будем рассматривать также "возмущённый прямоугольник" Π_γ, удовлетворяющий следующим требованиям: граница Π_γ состоит из горизонтального отрезка $\{y = h,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, двух вертикальных отрезков $\{x = 0,\ -h \leqslant y \leqslant h\}$ и $\{x = 2\pi,\ -h \leqslant y \leqslant h\}$ и некоторой кривой γ, соединяющей точки $x = 0$, $y = -h$ и $x = 2\pi$, $y = -h$. При этом Π_γ является областью (т.е. связным множеством) и, кроме того, γ целиком содержится в прямоугольнике $[0, 2\pi] \times [-h, -\kappa h]$ для некоторого числа $\kappa \in (0, 1)$, так что $\Pi_{-\kappa h} \subset \Pi_\gamma \subset \Pi_{-h}$, где $\Pi_{-\kappa h} = (0, 2\pi) \times (-\kappa h, h)$.

Гильбертовы пространства $\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)$, $\widetilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$ вводятся аналогично $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$, например,

$$\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma) = \{v \in H^1(\Pi_\gamma) : v|_{y=h} = 0, \ \ v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}\}.$$

Для того чтобы интеграл

$$(v_1, v_2)_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)} = \iint\limits_{\Pi_\gamma} \nabla v_1\nabla v_2\,dx\,dy$$

задавал в $\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)$ эквивалентное скалярное произведение, потребуем выполнения для функций из $H^1(\Pi_\gamma)$, имеющих нулевой след при $y = h$, неравенства Фридрихса, что связано (в отличие от пространства $\mathring{H}^1(\Pi_\gamma)$) с существованием непрерывного оператора продолжения из $H^1(\Pi_\gamma)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Построение такого оператора возможно, если граница $\partial\Pi$ удовлетворяет условиям *минимальной гладкости*. Точная формулировка приведена в книге [8, с. 224], но обычно просто пишут $\partial\Pi_\gamma \in \mathrm{Lip}\,1$.

Имеют место естественные непрерывные вложения $\widetilde{H}^1(\Pi_{-h}) \subset \widetilde{H}^1(\Pi_\gamma) \subset \widetilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$ (с нормами, не превосходящими единицы).

При неизменной граничной функции φ нас будет интересовать решение задачи, аналогичной (1)–(4) в области Π_γ:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Pi_\gamma, \tag{9}$$

$$u|_{y=h} = \varphi(x), \quad x \in (0, 2\pi), \tag{10}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi}, \quad y \in (-h, h), \tag{11}$$

$$(\partial u/\partial n)|_\gamma = 0. \tag{12}$$

Под обобщённым решением краевой задачи (9)–(12) мы понимаем функцию $u \in H^1(\Pi_\gamma)$, удовлетворяющую в смысле следа условию (10) и первому из условий (11), и обращающую в нуль интеграл $\iint_{\Pi_\gamma} \nabla u \nabla v\,dx\,dy$ при любой функции $v \in \widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)$. Тогда легко видеть, что обобщённое решение $u = u_\gamma$ задачи (9)–(12) существует и единственно и может быть представлено в виде $u_\gamma = w_\gamma + \Phi$, где функция Φ та же, что и раньше, а функция $w_\gamma \in \widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)$ однозначно определяется из интегрального тождества

$$(w, v)_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)} = -\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Pi_\gamma). \tag{13}$$

При этом функционал

$$\frac{1}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy\right|$$

принимает на функции w_γ наибольшее значение, равное $\|w_\gamma\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$. Отметим, что интегралы в (8) и (13) берутся по одному и тому же прямоугольнику Π_0, независимо от того, в какой области определяется решение.

2. Сравнение решений. Основная цель работы – сравнить u_γ и u_{-h} на общей области определения Π_γ. Положим $l = (1-\kappa)h$ (можно сказать, что l – это максимальная высота "неровностей дна").

Теорема. *Справедлива оценка*

$$\|u_\gamma - u_{-h}\|_{H^1(\Pi_\gamma)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)}\left(\frac{l}{h-l}\right)^{1/2}, \tag{14}$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от h.

Доказательство. Учтём, что разность $u_\gamma - u_{-h}$ совпадает с $w_\gamma - w_{-h}$, поэтому достаточно оценить функцию $w_\gamma - w_{-h}$ по норме пространства $\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)$. Для краткости будем обозначать $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\gamma = (\,\cdot\,,\cdot\,)_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$, $\|\cdot\|_\gamma = \|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$ (и аналогично с заменой γ на $-h$ или на $-\kappa h$). Опираясь на определение функций w_{-h} и w_γ, т.е. на интегральные тождества (8) и (13), будем иметь

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 = \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \|w_{-h}\|_\gamma^2 - 2(w_\gamma, w_{-h})_\gamma \leqslant \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \|w_{-h}\|_{-h}^2 - 2(w_\gamma, w_{-h})_\gamma =$$

$$= \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy + 2\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy =$$

$$= \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy = \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2. \tag{15}$$

Здесь мы воспользовались тем, что сужение w_{-h} на Π_γ можно подставлять в качестве пробной функции v в интегральное тождество (13), обеспечивая равенство

$$(w_\gamma, w_{-h})_\gamma = -\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-h}\,dx\,dy.$$

Заметим, что из соотношения (15) вытекает, в частности, монотонность нормы решения по области: $\|w_{-h}\|_{-h} \leqslant \|w_\gamma\|_\gamma$. По той же причине $\|w_\gamma\|_\gamma \leqslant \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}$, где $w_{-\kappa h} \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$ – решение соответствующей задачи в $\Pi_{-\kappa h}$, так что

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 \leqslant \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2 \leqslant \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2. \tag{16}$$

По функции $w_{-\kappa h} \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$ определим функцию $g(x,y)$ в Π_{-h} формулой

$$g(x,y) = \begin{cases} w_{-\kappa h}(x,y), & 0 < y < h, \\ w_{-\kappa h}(x,\kappa y), & -h < y < 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $g \in \widetilde{H}^1(\Pi_{-h})$, при этом имеют место соотношения

$$\|g\|_{-h}^2 = \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \iint\limits_{\Pi_{-h}\setminus\Pi_0} ((w_{-\kappa h})_x^2(x,\kappa y) + \kappa^2 (w_{-\kappa h})_y^2(x,\kappa y))dx\,dy =$$

$$= \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \iint\limits_{\Pi_{-\kappa h}\setminus\Pi_0} (\kappa^{-1}(w_{-\kappa h})_x^2 + \kappa(w_{-\kappa h})_y^2)dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \kappa^{-1} \iint\limits_{\Pi_{-\kappa h}\setminus\Pi_0} |\nabla w_{-\kappa h}|^2\,dx\,dy \leqslant \kappa^{-1}\|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}^2,$$

так что

$$\frac{1}{\|g\|_{-h}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla g\,dx\,dy\right| \geqslant \kappa^{1/2}\frac{1}{\|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla w_{-\kappa h}\,dx\,dy\right| = \kappa^{1/2}\|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}.$$

Отсюда следует, что

$$\|w_{-h}\|_{-h} = \sup_{v\in\widetilde{H}^1(\Pi_{-h})} \frac{1}{\|v\|_{-h}}\left|\iint\limits_{\Pi_0} \nabla\Phi\nabla v\,dx\,dy\right| \geqslant \kappa^{1/2}\|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}.$$

Используя это неравенство в (16), будем иметь

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 \leqslant (\kappa^{-1} - 1)\|w_{-h}\|_{-h}^2.$$

Если вспомнить что $w_{-h} = (1-\eta)u_{-h}$ и перейти к обозначению l, то полученную оценку можно записать в виде

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma \leqslant \left(\frac{l}{h-l}\right)^{1/2}\|(1-\eta)u_{-h}\|_{-h}$$

или, окончательно,

$$\|u_\gamma - u_{-h}\|_{H^1(\Pi_\gamma)} \leqslant c(h)\|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)}\left(\frac{l}{h-l}\right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2023-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.А.* Конформные отображения с приложениями к некоторыми вопросам механики. М., 1946.
2. *Шамин Р.В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Соврем. математика. Фунд. направления. 2008. Т. 28. С. 3–144.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1953.
4. *Babuška I., Výborný R.* Continuous dependence of the eigenvalues on the domain // Czechoslovak Math. J. 1965. V. 15. P. 169–178.
5. *Arrieta J.M., Hale J.K., Qing Han.* Eigenvalue problems for nonsmoothly perturbed domains // J. Differ. Equat. 1991. V. 91. P. 24–52.
6. *Burenkov V.I., Davies E.B.* Spectral stability of the Neumann laplacian // J. Differ. Equat. 2002. V. 186. P. 485–508.
7. *Россовский Л.Е.* О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2011. Т. 90. № 6. С. 885–901.
8. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
МИРЭА – Российский технологический
университет, г. Москва

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.
После доработки 02.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.