ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 642–651

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Для гиперболической системы с некратными характеристиками в n-мерном пространстве независимых переменных доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Определена матрица Римана–Адамара и построено решение задачи Дарбу в терминах указанной матрицы. В качестве примера применения полученных результатов подробно построено решение задачи Дарбу для системы в случае четырёх независимых переменных.

DOI: 10.31857/S0374064123050084, EDN: CXXBYD

Введение. В теории гиперболических уравнений и систем существенную роль играют задачи Дарбу. В частности, задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась в работах [1, гл. 3, § 1; 2, с. 7–15, 90–122; 3; 4], для уравнений Бианки – в статьях [5, 6], при этом решения задач строились в терминах функции Римана–Адамара.

Гиперболические системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)u_j+f_i(x_1,\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

исследовались многими авторами (см., например, статьи [7–10] и библиографии к ним). Отметим, что в [9, 10] решения задач Дарбу для системы (1) с двумя и тремя независимыми переменными построены в терминах матриц Римана–Адамара.

В настоящей работе для системы (1) с n независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся развитием метода Римана, который естественно назвать *методом Римана–Адамара.*

1. Основной результат. Линейное преобразование искомых функций приводит систему (1) к случаю, когда $a_{ii}\equiv 0,\ i=\overline{1,n}$. Далее считаем эти условия выполненными.

Пусть D – область, ограниченная плоскостями $X_i:\ x_i=0,\ X_{i0}:\ x_i=x_{i0}>0,\ i=\overline{1,n-1}$; $T:\ x_n=x_1$. Считаем, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij}\in C(\overline{D}),\ f_i\in C(\overline{D}),\ i,j=\overline{1,n}$.

Определим класс функций $C^{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ следующим образом: функция $f\in C^{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$, если существуют непрерывные производные $\partial^{r_1+r_2+\ldots+r_n}f/(\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\ldots\partial x_n^{r_n}),\ r_i=\overline{0,k_i}$.

Решение $u_1\in C^{(1,0,\ldots,0)}(D),\ u_2\in C^{(0,1,0,\ldots,0)}(D),\ \ldots,\ u_n\in C^{(0,\ldots,0,1)}(D)$ назовём *регулярным* в области D.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X}_i}=\varphi_i,\quad u_n|_{\overline{T}}=\psi,\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{2}$$

где $\varphi_i\in C(\overline{X}_i),\ \psi\in C(\overline{T})$ – заданные функции, причём φ_i зависят от всех независимых переменных, кроме x_i, а функция $\psi=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$.

Сведём систему (1) с учётом условий (2) к системе интегральных уравнений Вольтерры

$$u_i(x_1,\ldots,x_n)=\varphi_i+\int\limits_0^{x_i}\Bigl(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j+f_i\Bigr)dx_i,\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$u_n(x_1,\ldots,x_n)=\psi+\int\limits_{x_1}^{x_n}\Bigl(\sum_{j=1}^n a_{nj}u_j+f_n\Bigr)dx_n, \tag{3}$$

решение которой существует и единственно в классе непрерывных функций. Задача Дарбу (1), (2) и система (3) эквивалентны. Действительно, система (3) – следствие (1) и (2). Обратно, дифференцируя уравнения системы (3) по переменным x_1, $\ldots$, x_n, получаем систему (1) с условиями (2).

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если выполняются условия* $a_{ij}\in C(\overline{D})$, $f_i\in C(\overline{D})$, $i,j=\overline{1,n}$, *то решение задачи Дарбу (1), (2) существует и единственно.*

Перейдём к построению решения задачи Дарбу в терминах матрицы Римана–Адамара.

Запишем систему (1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U})=\mathbf{F},\quad L(\mathbf{U})\equiv\sum_{i=1}^n\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i}-\mathbf{B}\mathbf{U},\quad \mathbf{U}=\operatorname{colon}(u_1,u_2,\ldots,u_n), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad \mathbf{A}_n=\begin{pmatrix}0&\ldots&0&0\\0&\ldots&0&0\\0&\ldots&0&0\\0&\ldots&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&0&a_{23}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{n\,n-1}&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\operatorname{colon}(f_1,f_2,\ldots,f_n).$$

Введём матрицу Римана [11]

$$\mathbf{R}=\operatorname{colon}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\ldots,\mathbf{R}_n),$$

где $\mathbf{R}_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=(r_{i1},r_{i2},\ldots,r_{in})$, $i=\overline{1,n}$, являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\delta_{i1}-\int\limits_{\xi_1}^{x_1}(a_{21}r_{i2}+a_{31}r_{i3}+\ldots+a_{n1}r_{in})(\alpha_1,x_2,\ldots,x_n)\,d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\delta_{i2}-\int\limits_{\xi_2}^{x_2}(a_{12}r_{i1}+a_{32}r_{i3}+\ldots+a_{n2}r_{in})(x_1,\alpha_2,x_3,\ldots,x_n)\,d\alpha_2,$$

$$r_{i3}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\delta_{i3}-\int\limits_{\xi_3}^{x_3}(a_{13}r_{i1}+a_{23}r_{i2}+\ldots+a_{n3}r_{in})(x_1,x_2,\alpha_3,x_4,\ldots,x_n)\,d\alpha_3,\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad r_{in}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\delta_{in}-\int\limits_{\xi_n}^{x_n}(a_{14}r_{i1}+a_{24}r_{i2}+\ldots+a_{n-1\,n}r_{in-1})(x_1,x_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n, \tag{5}$$

а δ_{ij} – символ Кронекера. Решения систем (5) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым n аргументам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряжённой к (4) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i \mathbf{V})_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Из систем (5), в частности, следует, что выполняются тождества

$$r_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)|_{x_j=\xi_j} \equiv \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{6}$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i \mathbf{U})_{x_i}, \tag{7}$$

которое может быть проверено непосредственно.

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получим область D_P, ограниченную плоскостями X_i, $i = \overline{1, n-1}$, $x_i = \xi_i$, $i = \overline{1, n}$, а также плоскостью $T:\ x_n = x_1$. Плоскость $x_n = \xi_1$, разбивает область D_P на две части: D^1 (отвечает условию $x_n > \xi_1$ и определяется неравенствами $0 < x_1 < \xi_1$, $0 < x_2 < \xi_2$, $\ldots$, $0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}$, $\xi_1 < x_n < \xi_n$) и D^2 (соответствует условию $x_n < \xi_1$ и может быть задана двумя системами неравенств:

1) $0 < x_1 < \xi_1$, $0 < x_2 < \xi_2$, $\ldots$, $0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}$, $x_1 < x_n < \xi_1$;
2) $0 < x_1 < x_n$, $0 < x_2 < \xi_2$, $0 < x_3 < \xi_3$, $\ldots$, $0 < x_n < \xi_1$).

Обозначим пересечение замыкания области D^1 с плоскостями X_i, $i = \overline{1, n-1}$, через X_i^1, с плоскостью $x_n = \xi_1$ – через E^1, с плоскостями $x_i = \xi_i$ – через D_i^1, $i = \overline{1, n}$. Аналогично обозначим пересечение замыкания области D^2 с плоскостями X_i, $i = \overline{1, n-1}$, через X_i^2, с плоскостью $x_n = \xi_1$ – через E^2, с плоскостью T – через S, с плоскостями $x_i = \xi_i$ – через D_i^2, $i = \overline{2, n-1}$.

Определим матрицу Римана–Адамара $\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (h_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, задачи Дарбу:

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} \mathbf{R}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^1, \\ \mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^2. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{Q} = \operatorname{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n)$, где вектор-функции $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in})$ являются решениями задачи Дарбу в области D^2 для сопряжённой системы

$$q_{i1x_1} = -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3} - \ldots - a_{n1}q_{in}, \quad q_{i2x_2} = -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3} - \ldots - a_{n2}q_{in}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad q_{inx_n} = -a_{1n}q_{i1} - a_{2n}q_{i2} - \ldots - a_{n-1\,n}q_{in-1}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_n=x_1} = 0, \quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2} = 0, \quad \ldots, \quad q_{in-1}|_{x_{n-1}=\xi_{n-1}} = 0, \quad q_{in}|_{x_n=\xi_1} = r_{in}|_{x_n=\xi_1}. \tag{8}$$

Последнее условие в (8) можно записать в виде $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1} = 0$, где $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1}$ – скачок функции h_{in} на плоскости $x_n = \xi_1$.

Строка с номером i в тождестве (7) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} (r_{ij}u_j)_{x_j} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}f_j. \tag{9}$$

Проинтегрируем равенство (9) по области D^1:

$$\iint\limits_{D_1^1} r_{i1}u_1(\xi_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_2-\iint\limits_{X_1^1} r_{i1}u_1(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_2+$$

$$+\iint\limits_{D_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1,\xi_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_3\,d\alpha_1-$$

$$-\iint\limits_{X_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1,0,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_3\,d\alpha_1+\ldots$$

$$\ldots+\iint\limits_{D_{n-1}^1} r_{in-1}u_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},\xi_{n-1},\alpha_n)\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1-$$

$$-\iint\limits_{X_{n-1}^1} r_{in-1}u_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},0,\alpha_n)\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{D_n^1} r_{in}u_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\xi_n)\,d\alpha_{n-1}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1-$$

$$-\iint\limits_{E^1} r_{in}u_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\xi_1)\,d\alpha_{n-1}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1=$$

$$=\iint\limits_{D^1}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}f_j)(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{10}$$

Здесь у r_{ij} указаны только первые n аргументов, остальные везде $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

В (10) интегралы по многообразиям D_j^1, согласно (6), обращаются в тождественный нуль, если $i\neq j$; кроме того, в интеграле по D_i^1 $r_{ii}\equiv 1$, $i=\overline{1,n}$.

Теперь проинтегрируем (9) по области D^2:

$$\iint\limits_{S} q_{i1}u_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_1)\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots\,d\alpha_{n-1}-\iint\limits_{X_1^2} q_{i1}u_1(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_3\,d\alpha_2+$$

$$+\iint\limits_{D_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1,\xi_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_3\,d\alpha_1-$$

$$-\iint\limits_{X_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1,0,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots\,d\alpha_3\,d\alpha_1+\ldots$$

$$\ldots+\iint\limits_{D_{n-1}^2} q_{in-1}u_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},\xi_{n-1},\alpha_n)\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1-$$

$$-\iint\limits_{X_{n-1}^2} q_{i3}u_3(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},0,\alpha_n)\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots\,d\alpha_2\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{E^2} q_{in}u_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\xi_1)\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 -$$

$$-\iint\limits_{S} q_{in}u_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_1)\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 =$$

$$=\iint\limits_{D^2}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}f_j)(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,d\alpha_n\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{11}$$

В (11) тоже у q_{ij} указаны только первые n аргументов, остальные n аргументов везде $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, и, согласно (8), интегралы по многообразиям D^1_j, $j=\overline{2,n-1}$, обращаются в тождественный нуль.

Складывая равенства (10) и (11) при $i=\overline{1,n}$, будем иметь

$$\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_2}\ldots\int\limits_0^{\xi_{i-1}}\int\limits_0^{\xi_{i+1}}\ldots\int\limits_0^{\xi_{n-1}}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_n} u_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\xi_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-1}\ldots$$

$$\ldots d\alpha_{i+1}\,d\alpha_{i-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 = \iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{i1}u_1\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{i2}u_2\,d\alpha_n\ldots d\alpha_3\,d\alpha_1+\ldots$$

$$\ldots+\iint\limits_{X_{i-1}^1+X_{i-1}^2} h_{i\,i-1}u_{i-1}\,d\alpha_n\ldots d\alpha_i\,d\alpha_{i-2}\ldots d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_{i+1}^1+X_{i+1}^2} h_{i\,i+1}u_{i+1}\,d\alpha_n\ldots d\alpha_{i+2}\,d\alpha_i\ldots d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_{n-1}^1+X_{n-1}^2} h_{i\,n-1}u_{n-1}\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{i\,n}u_n\,d\alpha_{n-1}\,d\alpha_{n-2}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}f_j\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_2}\ldots\int\limits_0^{\xi_{n-1}} u_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\xi_n)\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 =$$

$$=\iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{n1}u_1\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{n2}u_2\,d\alpha_n\ldots d\alpha_3\,d\alpha_1+\ldots$$

$$\ldots+\iint\limits_{X_{n-1}^1+X_{n-1}^2} h_{n\,n-1}u_{n-1}\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-2}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{nn}u_n\,d\alpha_{n-1}\,d\alpha_{n-2}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{j=1}^{n} h_{nj}f_j\,d\alpha_n\,d\alpha_{n-1}\ldots d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{13}$$

Правые части формул (12), (13) считаем известными функциями, поскольку они выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (12) и (13), получим

$$u_i(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\frac{\partial^{n-1}F_i(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_1\partial\xi_2\ldots\partial\xi_{i-1}\partial\xi_{i+1}\ldots\partial\xi_{n-1}\partial\xi_n},\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$u_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\frac{\partial^{n-1}F_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_1\partial\xi_2\ldots\partial\xi_{n-1}},\tag{14}$$

где F_k – соответствующие правые части формул (12), (13). Соотношения (14) представляют собой решение задачи Дарбу (1), (2) в терминах матрицы Римана–Адамара $\mathbf{H}$.

2. Пример. В качестве примера реализации описанного выше метода построения решения задачи Дарбу рассмотрим гиперболическую систему четвёртого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)u_j+f_i(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad i=\overline{1,4}.\tag{15}$$

Как и выше, считаем, что выполняются условия $a_{ii}\equiv 0,\ \ i=\overline{1,4}$.

Задача Дарбу для системы четвёртого порядка. В области D найти регулярное решение системы (15), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X}_i}=\varphi_i,\quad i=\overline{1,3},\quad u_4|_{\overline{T}}=\psi,\tag{16}$$

$$\varphi_i\in C(\overline{X}_i),\quad \psi\in C(\overline{T}),$$

где функции φ_i зависят от всех независимых переменных, кроме x_i, а $\psi=\psi(x_1,x_2,x_3)$.

Считаем, что все условия гладкости, указанные для задачи (1), (2), выполняются. Из сформулированной выше теоремы вытекает, что решение задачи Дарбу для системы четвёртого порядка существует и единственно.

Запишем (15) в векторно-матричной форме:

$$L(\mathbf{U})=\mathbf{F},\quad L(\mathbf{U})\equiv\sum_{i=1}^{4}\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i}-\mathbf{B}\mathbf{U},\quad \mathbf{U}=\operatorname{colon}(u_1,u_2,u_3,u_4),\tag{17}$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&0&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\operatorname{colon}(f_1,f_2,f_3,f_4).$$

Матрица Римана в данном случае имеет вид

$$\mathbf{R}=\operatorname{colon}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_4),$$

где $\mathbf{R}_i(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(r_{i1},r_{i2},r_{i3},r_{i4}),\ \ i=\overline{1,4}$, являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\delta_{i1}-\int_{\xi_1}^{x_1}(a_{21}r_{i2}+a_{31}r_{i3}+a_{41}r_{i4})(\alpha_1,x_2,x_3,x_4)\,d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\delta_{i2}-\int_{\xi_2}^{x_2}(a_{12}r_{i1}+a_{32}r_{i3}+a_{42}r_{i4})(x_1,\alpha_2,x_3,x_4)\,d\alpha_2,$$

$$r_{i3}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\delta_{i3}-\int\limits_{\xi_3}^{x_3}(a_{13}r_{i1}+a_{23}r_{i2}+a_{43}r_{i4})(x_1,x_2,\alpha_3,x_4)\,d\alpha_3,$$

$$r_{i4}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\delta_{i4}-\int\limits_{\xi_4}^{x_4}(a_{14}r_{i1}+a_{24}r_{i2}+a_{34}r_{i3})(x_1,x_2,x_3,\alpha_4)\,d\alpha_4, \qquad (18)$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Решения систем (18) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым четырём аргументам (x_1,x_2,x_3,x_4) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряжённой к (17) системе

$$L^*(\mathbf{V})=0,\quad L^*(\mathbf{V})\equiv-\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{A}_i\mathbf{V})_{x_i}-\mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Из систем (18) следует выполнение тождеств

$$r_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|_{x_j=\xi_j}\equiv\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases} \qquad (19)$$

Условие (7) принимает вид

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U})=(\mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_{x_1}+(\mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_{x_2}+(\mathbf{R}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_{x_3}+(\mathbf{R}\mathbf{A}_4\mathbf{U})_{x_4}. \qquad (20)$$

Перейдём к построению решения задачи Дарбу для системы четвёртого порядка. Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$. Проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получаем область D_P, ограниченную плоскостями X_i, $i=\overline{1,3}$, $x_i=\xi_i$, $i=\overline{1,4}$, а также плоскостью T. Плоскость $x_4=\xi_1$ разбивает область D_P на две части: D^1 (отвечает условию $x_4>\xi_1$ и определяется неравенствами $0<x_1<\xi_1$, $0<x_2<\xi_2$, $0<x_3<\xi_3$, $\xi_1<x_4<\xi_4$) и D^2 (соответствует условию $x_4<\xi_1$ и может быть задана двумя системами неравенств:

1) $0<x_1<\xi_1$, $0<x_2<\xi_2$, $0<x_3<\xi_3$, $x_1<x_4<\xi_1$;
2) $0<x_1<x_4$, $0<x_2<\xi_2$, $0<x_3<\xi_3$, $0<x_4<\xi_1$).

Обозначим пересечение замыкания области D^1 с плоскостями X_i, $i=\overline{1,3}$, через X_i^1, с плоскостью $x_4=\xi_1$ – через E^1, с плоскостями $x_i=\xi_i$ – через D_i^1, $i=\overline{1,4}$. Аналогично обозначим пересечение замыкания области D^2 с плоскостями X_i, $i=\overline{1,3}$, через X_i^2, с плоскостью $x_4=\xi_1$ – через E^2, с плоскостью T – через S, с плоскостями $x_i=\xi_i$ – через D_i^2, $i=2,3$.

Матрица Римана–Адамара задачи Дарбу имеет вид

$$\mathbf{H}(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(h_{ij}),\quad i,j=\overline{1,4},$$

при этом

$$\mathbf{H}(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\begin{cases}\mathbf{R}(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4), & (x_1,x_2,x_3,x_4)\in D^1,\\ \mathbf{Q}(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4), & (x_1,x_2,x_3,x_4)\in D^2.\end{cases} \qquad (21)$$

Здесь $\mathbf{Q}=\operatorname{colon}(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_3,\mathbf{Q}_4)$, где вектор-функции $\mathbf{Q}_i=(q_{i1},q_{i2},q_{i3},q_{i4})$ являются решениями задачи Дарбу в D^2 для сопряжённой системы

$$q_{i1x_1}=-a_{21}q_{i2}-a_{31}q_{i3}-a_{41}q_{i4},\quad q_{i2x_2}=-a_{12}q_{i1}-a_{32}q_{i3}-a_{42}q_{i4},$$

$$q_{i3x_3}=-a_{13}q_{i1}-a_{23}q_{i2}-a_{43}q_{i4},\quad q_{i4x_4}=-a_{14}q_{i1}-a_{24}q_{i2}-a_{34}q_{i3}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_4=x_1}=0,\quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2}=0,\quad q_{i3}|_{x_3=\xi_3}=0,\quad q_{i4}|_{x_4=\xi_1}=r_{i4}|_{x_4=\xi_1}. \tag{22}$$

Последнее условие в (22) можно записать в виде $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1}=0$, где $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1}$ – скачок функции h_{i4} на плоскости $x_4=\xi_1$.

Строка с номером i в (20) имеет вид

$$(r_{i1}u_1)_{x_1}+(r_{i2}u_2)_{x_2}+(r_{i3}u_3)_{x_3}+(r_{i4}u_4)_{x_4}=r_{i1}f_1+r_{i2}f_2+r_{i3}f_3+r_{i4}f_4. \tag{23}$$

Проинтегрируем тождество (23) по области D^1:

$$\iint\limits_{D_1^1} r_{i1}u_1(\xi_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2-\iint\limits_{X_1^1} r_{i1}u_1(0,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2+$$

$$+\iint\limits_{D_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1,\xi_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1-\iint\limits_{X_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{D_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1,\alpha_2,\xi_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1-\iint\limits_{X_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1,\alpha_2,0,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{D_4^1} r_{i4}u_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\xi_4)\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1-\iint\limits_{E^1} r_{i4}u_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\xi_1)\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1=$$

$$=\iint\limits_{D^1}(r_{i1}f_1+r_{i2}f_2+r_{i3}f_3+r_{i4}f_4)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{24}$$

Здесь у r_{ij} указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$. В (24), согласно (19), первые слагаемые в каждой строке обращаются в тождественный нуль, если $i\neq j$; если же $i=j$, то $r_{ij}\equiv 1$.

Теперь проинтегрируем (23) по области D^2:

$$\iint\limits_{S} q_{i1}u_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3-\iint\limits_{X_1^2} q_{i1}u_1(0,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2+$$

$$+\iint\limits_{D_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1,\xi_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1-\iint\limits_{X_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{D_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1,\alpha_2,\xi_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1-\iint\limits_{X_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1,\alpha_2,0,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1+$$

$$+\iint\limits_{E^2} q_{i4}u_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\xi_1)\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1-\iint\limits_{S} q_{i4}u_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1=$$

$$=\iint\limits_{D^2}(q_{i1}f_1+q_{i2}f_2+q_{i3}f_3+q_{i4}f_4)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{25}$$

Здесь снова у q_{ij} указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$. В (25), согласно (22), первые слагаемые в первых трёх строках обращаются в тождественный нуль.

Складывая (24) и (25) при $i=\overline{1,4}$, получаем

$$\int\limits_0^{\xi_2}\int\limits_0^{\xi_3}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_4} u_1(\xi_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2 = \iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{11}u_1\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{12}u_2\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_3^1+X_3^2} h_{13}u_3\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{14}u_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{i=1}^4 h_{1i}f_i\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1, \tag{26}$$

$$\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_3}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_4} u_2(\alpha_1,\xi_2,\alpha_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1 = \iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{21}u_1\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{22}u_2\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_3^1+X_3^2} h_{23}u_3\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{24}u_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{i=1}^4 h_{1i}f_i\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1, \tag{27}$$

$$\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_2}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_4} u_3(\alpha_1,\alpha_2,\xi_3,\alpha_4)\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1 = \iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{31}u_1\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{32}u_2\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_3^1+X_3^2} h_{33}u_3\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{34}u_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{i=1}^4 h_{1i}f_i\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_2}\int\limits_0^{\xi_3} u_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\xi_4)\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1 = \iint\limits_{X_1^1+X_1^2} h_{41}u_1\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2 + \iint\limits_{X_2^1+X_2^2} h_{42}u_2\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_1 +$$

$$+\iint\limits_{X_3^1+X_3^2} h_{43}u_3\,d\alpha_4\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{S} h_{44}u_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1 + \iint\limits_{D^1+D^2}\sum_{i=1}^4 h_{1i}f_i\,d\alpha_4\,d\alpha_3\,d\alpha_2\,d\alpha_1. \tag{29}$$

Правые части равенств (26)–(29), которые обозначим через F_k, $k=\overline{1,4}$, известны, поскольку выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (26)–(29), получим

$$u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \frac{\partial^3 F_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_2\partial\xi_3\partial\xi_4}, \quad u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \frac{\partial^3 F_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_1\partial\xi_3\partial\xi_4},$$

$$u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \frac{\partial^3 F_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_1\partial\xi_2\partial\xi_4}, \quad u_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \frac{\partial^3 F_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_1\partial\xi_2\partial\xi_3}. \tag{30}$$

Это решение задачи Дарбу (15), (16) в терминах матрицы Римана–Адамара (21).

Работа выполнена за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. *Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г.* Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
4. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.* Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
5. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
6. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 349–363.
7. *Бицадзе А.В.* О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
8. *Чекмарев Т.В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
9. *Mironova L.B.* Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.
10. *Миронов А.Н., Миронова Л.Б.* Метод Римана–Адамара для одной системы в трёхмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1063–1070.
11. *Миронова Л.Б.* О методе Римана в $\mathbb{R}^n$ для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

Самарский государственный
технический университет,
Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского)
федерального университета

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.
После доработки 02.02.2023 г.
Принята к публикации 16.03.2023 г.