ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 619–634

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

МЕТОД РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН

© 2023 г. А. В. Боровских

Представлен обзор развития метода распространяющихся волн для одномерных сред. Приведены основные результаты и изменения в постановках задачи представления решений линейных систем уравнений с частными производными через “распространяющиеся волны” (а точнее – через систему уравнений переноса волн). Показано, что по мере усложнения исследования систем задача представления решения методом распространяющихся волн оказывается применимой не только для гиперболических систем, но и для систем, содержащих (даже неявно) и параболические, и эллиптические составляющие, и приближается тем самым к общей задаче декомпозиции произвольной системы линейных уравнений в систему уравнений первого порядка с главной частью канонического типа и с подчинённой ей линейной частью.

DOI: 10.31857/S0374064123050060, EDN: CXQKDF

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

Введение. Данная работа носит обзорный характер. В ней на основе результатов, полученных автором и его учениками, показана эволюция *метода распространяющихся волн* и сформулировано сложившееся к настоящему времени представление об этом методе.

Тематика эта, по крайней мере на первых этапах её развития, оказалась близкой к исследованиям Владимира Александровича Ильина, автор был постоянным участником и регулярно делал доклады на его научном семинаре. Связь с семинаром была не формальной: первые результаты в этой области – формула распространяющихся волн и её приложения – были получены в 2002–2004 гг. [1–3], что совпало по времени с интересом В.А. Ильина, его коллег и учеников [4–9] к задачам граничной управляемости для волнового уравнения и его обобщений (см., например, [10]). Полученное автором решение задачи управляемости для неоднородной струны с помощью формулы распространяющихся волн оказалось очень близким к этому направлению [11–13].

Со временем, однако, стало очевидно, что формула распространяющихся волн, хотя и выражает суть процесса, является слишком громоздкой и гораздо эффективнее пользоваться вместо неё системой *уравнений переноса волн*, позволяющей решать самые разнообразные задачи (классические граничные, характеристические, полухарактеристические и др.). Уже в этой форме метод стал распространяться на другие задачи, а именно на волновые уравнения с памятью [14–16].

Самым существенным и неочевидным в методе распространяющихся волн было то, что решения системы переноса волн не являлись решениями исходного уравнения. Они давали решение только *в сумме*. Именно это отличало его от достаточно известного *метода функционально-инвариантных решений* [17–22], когда функция типа волны искалась среди решений исходного уравнения.

1. Формула распространяющихся волн для неоднородной струны. Уравнение неоднородной струны, хотя и записывается в общем виде как

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[b(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

обычно приводится к форме

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s \tag{2}$$

с помощью замены $s = \int_0^x \sqrt{a(\sigma)/b(\sigma)}\,d\sigma$ пространственной переменной (при этом $k^2(s) = a(x)b(x)|_{x=x(s)}$). Преимущество этой формы в том, что характеристиками оказываются прямые $s \pm t = \mathrm{const}$. При указанной замене пространственная ось параметризуется так, что расстояние между точками оказывается равным времени распространения возмущения.

Нам же будет удобнее использовать эквивалентное (2) уравнение

$$z_{tt} = z_{ss} - [\phi'(s) + \phi^2(s)]z, \tag{3}$$

получаемое из (2) заменой $z(t,s) = \sqrt{k(s)}u(t,s)$ (при этом $\phi(s) = k'(s)/2k(s)$), которое также можно считать канонической формой уравнения (1).

Все результаты в этом пункте формулируются в предположениях, при которых решения уравнений являются классическими. Это, во первых, предположение о дважды непрерывной дифференцируемости и положительности $k(s)$ (или, соответственно, о непрерывной дифференцируемости $\phi(s)$), которое далее повторяться не будет. Во-вторых – предположение о соответствующей гладкости начальных или граничных данных. На самом деле эти предположения необходимы только лишь для упрощения и могут быть естественным образом ослаблены, но для этого нужен переход на язык обобщённых решений того или иного класса.

Формула распространяющихся волн для уравнения (2) имеет вид [2, 3]

$$\begin{aligned} u(t,s) = {} & \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}V(s-t) + \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}W(s+t) + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right)dy - \\ & - \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)J\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right)dy + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right)dy - \\ & - \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\tilde{J}\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right)dy, \end{aligned} \tag{4}$$

а для уравнения (3) формула решения получается удалением радикалов, содержащих $k(s)$ (см. также [2, 3]):

$$\begin{aligned} z(t,s) = {} & f(s-t) + g(s+t) + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} f(y)J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right)dy - \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} g(y)J\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right)dy + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} g(y)\tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right)dy - \frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t} f(y)\tilde{J}\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right)dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $V(\cdot)$ и $W(\cdot)$ ($f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ соответственно) – две произвольные (достаточно гладкие) функции, играющие ту же роль, что и $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ в классической формуле $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$ для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ в однородной среде. Они связаны с начальными условиями Коши $u(0,s) = u_0(s)$, $u_t'(0,s) = u_1(s)$ соотношениями

$$V(s) + W(s) = u_0(s), \quad -[k(s)V(s)]' + [k(s)W(s)]' = k(s)u_1(s)$$

в случае уравнения (2) и равенствами

$$f(s)+g(s)=z_0(s), \quad -f(s)'+g(s)'=z_1(s) \tag{6}$$

в случае уравнения (3). Волны определяются с точностью до добавления к одной функции и одновременного вычитания из другой аддитивного слагаемого $C/k(s)$ в случае уравнения (2) и константы в случае уравнения (3), не влияющих на значения решений (4) и (5) соответственно.

Ядра $J(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\tilde J(\alpha,\beta,\gamma)$ определяются из системы интегральных уравнений Вольтерры (интегрирование происходит только по первому и второму аргументам, так что γ здесь присутствует как параметр)

$$J(\alpha,\beta,\gamma)=-\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\phi(\sigma-\beta)\tilde J(\sigma,\beta,\gamma)\,d\sigma, \quad \tilde J(\alpha,\beta,\gamma)=\phi(\alpha)+\int\limits_{\beta}^{0}\phi(\alpha-\tau)J(\alpha,\tau,\gamma)\;d\tau. \tag{7}$$

Вычисление коэффициентов переноса J и $\tilde J$ из (7) методом последовательных приближений даёт их представление в виде рядов (сходящихся равномерно на каждом компакте)

$$J=J_2+J_4+\ldots+J_{2n}+\ldots, \quad \tilde J=J_1+J_3+\ldots+J_{2n+1}+\ldots,$$

в которых слагаемое J_m оказывается коэффициентом переноса той части исходной волны, которая испытала точно m отражений (см. [5]). Поэтому J есть коэффициент переноса волн, испытавших чётное число отражений, а $\tilde J$ – коэффициент переноса волн, испытавших нечётное число отражений.

Сама формула (7), по существу, есть формула итерирования отражений: коэффициент $\phi(s)$ есть инфинитезимальный аналог коэффициента отражения от границы раздела двух сред (в случае кусочно-постоянной $k(\cdot)$ в (2) коэффициент отражения от i-й точки разрыва равен $(k_{i+1}-k_i)/(k_{i+1}+k_i)$). Дальнейшее изложение мы будем вести в терминах уравнения (3), имея в виду, что в термины уравнения (2) он переносится переобозначениями.

Прежде всего, нетрудно заметить, что все слагаемые в (5) разбиваются на две группы: у одних в аргументах функций стоит $s-t$, а у других – $s+t$. Если обозначим их соответственно через $z^-(t,s)$ и $z^+(t,s)$, то получим представление решения уравнения (3) в виде

$$z(t,s)=z^-(t,s)+z^+(t,s), \tag{8}$$

где функции

$$z^-(t,s)=f(s-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}f(y)J\left(\frac{s-t+y}{2},\frac{s-t-y}{2},s\right)dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}g(y)\tilde J\left(\frac{s-t+y}{2},\frac{s-t-y}{2},s\right)dy,$$

$$z^+(t,s)=g(s+t)-\frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}g(y)J\left(\frac{s+t+y}{2},\frac{s+t-y}{2},s\right)dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}f(y)\tilde J\left(\frac{s+t+y}{2},\frac{s+t-y}{2},s\right)dy$$

оказываются решением уравнений переноса волн

$$z_t^-+z_s^-=\phi(s)z^+, \quad z_t^+-z_s^+=-\phi(s)z^-. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что для любого решения (9) сумма (8) является решением уравнения (3).

Собственно говоря, метод распространяющихся волн и состоит в переходе от уравнения (3) (или какого-то более общего уравнения) к системе (9) (или аналогичной ей).

2. Формула прохождения волны через узел сети. Для того чтобы сделать понятной общую постановку проблемы, нам понадобится некоторое историческое отступление.

Поводом для стартовой постановки задачи оказалась формула прохождения волны через узел сети, полученная F. Ali Mehmeti в [23]. Автор тогда работал в Воронеже в научной школе Ю.В. Покорного, которая занималась исследованием уравнений на геометрических графах (пространственных сетях) [24]. В основном тогда разбирались со спектральными свойствами типа теорем Штурма (см., например, [25]) и только-только начинали интересоваться эволюционными задачами на сетях.

Результат F. Ali Mehmeti был следующий: если к узлу сети примыкает n одинаковых ребер, на которых задано одно и то же уравнение $u_{tt}=u_{xx}$ (и поэтому на каждом ребре можно пользоваться классической формулой распространяющихся волн), и по одному из них бежит волна (возмущение типа $u(t,x)=f(x+t)$ с ограниченным носителем), то после прохождения этой волны через узел она отразится с коэффициентом $-1+2/n$ и пройдёт на все остальные ребра с коэффициентом $2/n$.

Естественно возник вопрос: а если струны разные? Оказалось, что результат будет почти тот же самый: волна отразится с коэффициентом $-1+\theta$, а на остальные ребра пройдёт с одинаковым (что удивительно!) коэффициентом θ, который выражается через скорости распространения волн по каждому ребру и коэффициенты условий согласования в узле. Более точно, если на i-м ребре задано уравнение $u^i_{tt}=a_i^2u^i_{xx}$, а условия согласования в узле (можно считать, что ему отвечает $x=0$) имеют вид $u^i(t,0)=u^j(t,0)$ (условие непрерывности) и $\sum_{i=0}^n \varkappa_i(a_iu^i_x)(t,0+)=0$ (условие “гладкости”; “$0+$” означает, что производные считаются в направлении от узла), то если ребро, по которому идет исходная волна, считается нулевым, имеет место формула

$$\theta=2\varkappa_0\biggl(\sum_{i=0}^n\varkappa_i\biggr)^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство этой формулы элементарное. Достаточно для каждого отдельно взятого ребра рассмотреть решения, отвечающие условию закреплённого конца $(u(t,0)=0)$:

$$u^i_-(t,x)=f(t+x/a_i)-f(t-x/a_i),$$

и решения, отвечающие условию свободного конца $(u_x(t,0)=0)$:

$$u^i_+(t,x)=f(t+x/a_i)+f(t-x/a_i),$$

скомбинировать из них $n+1$ решений уже на всём пучке: одно “чётное”

$$u_0(t,x)=\{u^i_0(t,x)\}_{i=0}^n,\quad u^i_0(t,x)=\begin{cases}f(t+x/a_0)+f(t-x/a_0), & i=0,\\ f(t+x/a_i)+f(t-x/a_i), & i\neq 0,\end{cases}$$

и n “нечётных” $(j=\overline{1,n})$:

$$u_j(t,x)=\{u^i_j(t,x)\}_{i=0}^n,\quad u^i_j(t,x)=\begin{cases}\varkappa_j[f(t+x/a_0)-f(t-x/a_0)], & i=0,\\ \varkappa_0[f(t+x/a_j)-f(t-x/a_j)], & i=j,\\ 0, & i\neq 0,j,\end{cases}$$

удовлетворяющих всем условиям согласования в узле, а затем уже из этих функций построить такую комбинацию, чтобы на нулевом ребре функция $f(t+x/a_i)$ оказалась с коэффициентом, равным единице, а на остальных – нулю.

Для этой комбинации до прохождения волны через узел решение $u(t,x)=\{u^i(t,x)\}_{i=0}^n$ будет равно

$$u^0(t,x)=f(t+x/a_0),\quad u^i(t,x)=0,\quad i\neq 0,$$

а после прохождения волны

$$u^0(t,x) = (-1+\theta)f(t-x/a_0), \quad u^i(t,x) = \theta f(t-x/a_i), \quad i \neq 0, \tag{11}$$

где θ определяется формулой (10).

С помощью формул (10), (11) впоследствии в работе [26] был получен аналог формулы распространяющихся волн для уравнения на графе (правда, для случая однородных рёбер), введено естественное понятие *эйконала* и описан процесс многократного расщепления траекторий исходного волнового импульса с течением времени (позднее в статьях [27, 28] М.И. Белишев очень удачно назвал эту совокупность путей "гидрой").

3. Метод распространяющихся волн. Формулы (10), (11) послужили поводом для простых, в общем-то, вопросов. Во-первых, что будет, если в узле стыкуется только два ребра, т.е. мы имеем дело с одномерным уравнением с кусочно-постоянными коэффициентами? Во-вторых, можно ли построить аналог формулы распространяющихся волн для кусочно-однородной среды? И, в-третьих, можно ли от кусочно-однородной среды перейти каким-то предельным переходом к неоднородной общего типа?

И если ответ на первый вопрос оказался хорошо известным – это формулы Баранова–Кюнеца [29], ответ на второй присутствовал только в рамках приближённых вычислений (где использовались только несколько первых отражений), то на третий, как оказалось, никто и не пытался отвечать, хотя представление решения уравнения $u_{tt} = u_{xx} + V(x)u$ в виде

$$u(t,x) = f(x-t) + g(x+t) + \text{интеграл}$$

систематически использовалось, например, в теории обратных задач (см., например, [30–32]), а также для обоснования метода Фурье в случае коэффициентов, не имеющих избыточной гладкости [33].

Получить аналог формулы распространяющихся волн для кусочно-однородной среды, отправляясь от формулы Баранова–Кюнеца, автору удалось в работе [1] в виде суммы довольно громоздких выражений (в которой k-е слагаемое отвечало за k отражений исходной волны). И, что было большой удачей, удалось совершить предельный переход при измельчении разбиения, получив формулы (4), (7). Именно в смысле этого предельного перехода выше упоминалось, что $J_n(\alpha,\beta,\gamma)$ отвечает за n-кратные отражения исходных волн. Таким образом, оказалось, что термины распространяющихся волн применимы не только для однородной среды, но и для любой неоднородной, по крайней мере одномерной.

Первый успех породил естественное желание использовать формулу распространяющихся волн для решения различных задач. Результаты этой работы были опубликованы в статье [3]. Там были рассмотрены классическая смешанная задача, характеристическая задача Гурса и полухарактеристическая задача (*задача Фридландера* [34]). Для примера возьмём формулу решения граничной задачи (с нулевыми, для упрощения, начальными данными и граничным значением решения при $x = l$, и ненулевым условием $u(t,0) = \nu(t)$).

Теорема [3]. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $\nu(t)$ задана при $t \geqslant 0$ и $\nu(0) = \nu'(0) = 0$. Тогда классическое решение задачи для уравнения (3) на отрезке $[0,l]$ с условиями $z(0,s) = z_t(0,s) \equiv 0$, $z(t,0) = \nu(t)$, $z(t,l) \equiv 0$ определяется формулой*

$$z(t,s) = \sum_{m=0}^{\infty}[z_0^-(t,s+2lm) + z_0^+(t,s+2lm)] - \sum_{m=1}^{\infty}[z_1^-(t,s-2lm) + z_1^+(t,s-2lm)],$$

где

$$z_0^-(t,s) = \nu(t-s) + \frac{1}{2}\int_0^{t-s}\nu(\tau)\left[J\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right)\right]d\tau,$$

$$z_0^+(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^{t-s}\nu(\tau)\left[J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right)\right]d\tau,$$

$$z_1^-(t,s)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+s}\nu(\tau)\left[J\left(\frac{s-t+\tau}{2},\frac{s-t+\tau}{2},s\right)-\tilde J\left(\frac{s-t+\tau}{2},\frac{s-t+\tau}{2},s\right)\right]d\tau,$$

$$z_1^+(t,s)=\nu(t+s)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+s}\nu(\tau)\left[J\left(\frac{s+t-\tau}{2},\frac{s+t-\tau}{2},s\right)-\tilde J\left(\frac{s+t-\tau}{2},\frac{s+t-\tau}{2},s\right)\right]d\tau,$$

а $\nu(t)$ *считается продолженной на полуось* $t\leqslant 0$ *тождественным нулём.*

Все эти формулы доказывались по одной и той же схеме: выделялись z^- и z^+, проверялось, что они удовлетворяют системе (9) и заданным в задаче данным. На этом пути была передоказана формула среднего значения Е.И. Моисеева, В.В. Тихомирова и Е.А. Козлова [35], установлена связь формулы распространяющихся волн с функцией Римана [36] (при этом оказалось, что функция Римана через волны выражается, а наоборот – нет, так что волны оказываются более “фундаментальным” конструктом) и получен ряд других формул.

Итогом стало понимание, что в методе распространяющихся волн работают в основном не интегралы (4), (5) и их ядра, а именно система (9), и что этот метод можно распространить и на другие классы уравнений.

4. Формулировка проблемы. Получение формулы распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды стало поводом для постановки достаточно принципиального вопроса.

Для решения простейшего уравнения $u_{tt}=u_{xx}$ есть три формы представления:

1) формула распространяющихся волн $u=f(x-t)+g(x+t)$;

2) формула Д’Аламбера

$$u=\frac{1}{2}(u_0(x-t)+u_0(x+t))+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}u_1(s)\,ds,$$

где u_0 и u_1 – начальные данные;

3) разложение в ряд Фурье

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\sin\pi nx(A_n\cos\pi nt+B_n\sin\pi nt)$$

(в случае отрезка [0,1] и условий Дирихле).

И если для третьей формы представления обобщения выведены на предельно абстрактный уровень – метод Фурье разработан для произвольных операторов и в совершенно разнообразных пространствах, для второй формы обобщения также выведены на предельно абстрактный уровень – это фактически теория полугрупп (для уравнений второго порядка см. [37]), то для первой формы представления – формулы распространяющихся волн – обобщений не было не только для многомерного, но и для одномерного случая.

Неестественность такого положения вещей можно подчеркнуть тем фактом, что на самом деле даже для уравнения $u_{tt}=u_{xx}$ третья форма представления применима только для областей (t,x) прямоугольной формы, а вторая – только для случая, когда x лежит на оси (с модификациями для случая отрезка), а для любых других типов краевых или начально-краевых задач (например, с подвижной границей) мы обращаемся именно к формуле $u=f(x-t)+g(x+t)$. Поэтому с точки зрения приложений именно формула распространяющихся волн является наиболее востребованной в различных задачах.

Таким образом, отсутствие систематически разработанного метода распространяющихся волн не только для многомерного, но и для одномерного случая – довольно большая лакуна в теории дифференциальных уравнений. Как исправить эту ситуацию?

Формулы (4)–(9) подсказывают нам естественную постановку задачи, по крайней мере в одномерном (по пространственной переменной) случае. Пусть $Lu=0$ – система линейных уравнений с частными производными от двух переменных (t,x); $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^n$. Пусть эта система гиперболическая (ниже мы покажем, что это, на самом деле, не принципиально), имеющая, для упрощения, различные характеристики $dx/dt = q^i(t,x)$. Метод распространяющихся волн для системы $Lu = 0$ состоит в использовании представления общего решения этой системы через общее решение системы

$$z_t^i + q^i z_x^i = C_j^i(t,x) z^j, \quad z_t + Q z_x = Cz \tag{12}$$

в виде

$$u^i = A_j^i(t,x) z^j, \quad u = Az, \tag{13}$$

где A и C – некоторые матрицы, определяемые из условия, что решение (12), подставленное в (13), должно давать общее решение исходной системы $Lu = 0$.

Фактически речь идет о разложении сложной системы уравнений с частными производными в систему уравнений переноса волн.

В многомерном случае можно заметить, что и уравнения (9), и уравнения (12), и закон прохождения волны через узел (11) аналогичны хорошо известному уравнению переноса излучения (см., например, [38, 39])

$$V_t(t,x,\theta) + \theta V_x(t,x,\theta) = \frac{1}{s_n} \int\limits_{S_{\theta'}} \sigma(t,x,\theta,\theta') V(t,x,\theta')\, dS_{\theta'} \tag{14}$$

в многомерной среде. Действительно, во всех этих уравнениях приходящая волна рассеивается по всем возможным направлениям с некоторыми коэффициентами, разница только в том, что на отрезке таких направлений два, на графе, для которого получены формулы (10), (11), – конечное число, а в пространстве – континуум (“занумерованный” в (14) единичной сферой).

В случае уравнений более высокого порядка (или систем) к этому добавляется большее количество характеристических направлений, так что естественная постановка вопроса о методе распространяющихся волн в многомерном случае состоит в том, как уравнение излучения (или его разумную модификацию) связать с классическим волновым уравнением в $\mathbb{R}^n$?

Это, так сказать, общая постановка задачи. Ниже мы увидим, что по мере получения тех или иных результатов её приходится модифицировать и уточнять.

5. Волновые уравнения с памятью, зависящей от неизвестной функции. Чрезвычайно интересным классом уравнений, давших обширную феноменологию для развития метода распространяющихся волн, оказались волновые уравнения с памятью. Под ними обычно понимаются уравнения двух типов:

$$u_{tt} = u_{xx} + \int\limits_0^\infty \left[\sum_{i=0}^\infty \mu^i e^{-\lambda^i (t-\tau)} u(\tau,x) \right] d\tau \tag{15}$$

и

$$u_{tt} = u_{xx} + \int\limits_0^\infty \left[\sum_{i=0}^\infty \varkappa_i e^{-\lambda^i (t-\tau)} u_{xx}(\tau,x) \right] d\tau. \tag{16}$$

Такие уравнения с интегральным членом типа свёртки с комбинацией экспонент, как раз и называемого “памятью”, возникают в теории усреднения композитных (пористых) сред. Безусловно, при математическом рассмотрении речь идет не только об именно таких уравнениях, но и о различных их обобщениях.

С точки зрения метода распространяющихся волн оба уравнения очень удобны, поскольку эквивалентны системе уравнений с частными производными безо всяких интегралов. Действительно, если обозначить

$$v^i(t,x) = \int\limits_0^t e^{-\lambda^i (t-\tau)} u(\tau,x)\, d\tau$$

в случае уравнения (15) и

$$v^i(t,x)=\int\limits_0^t e^{-\lambda^i(t-\tau)}u_{xx}(\tau,x)\,d\tau$$

в случае уравнения (16), то получим соответственно системы

$$u_{tt}-u_{xx}=\sum_{i=1}^{\infty}\varkappa_i v^i,\quad v^i_t=-\lambda^i v+u$$

и

$$u_{tt}-u_{xx}=\sum_{i=1}^{\infty}\varkappa_i v^i,\quad v^i_t=-\lambda^i v+u_{xx}.$$

Приведём результаты, полученные для такого рода уравнений (как и ранее, мы практически не будем оговаривать условия гладкости, достаточной для того, чтобы все операции дифференцирования были корректны). Начнём с уравнения, предложенного нам Х.Х. Имомназаровым [40] и являющегося как раз моделью фильтрации в пористой среде. В оригинальной формулировке оно имело вид

$$\rho_s(z)u_{tt}=(\mu(z)u_z)_z-\chi(z)\rho_l^2(z)u_t+\chi^2(z)\rho_l^3(z)u-\chi^3(z)\rho_l^4(z)\int\limits_0^t e^{-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau)}u(\tau,z)\,d\tau$$

(ρ_s и ρ_l – плотности твёрдой и жидкой фаз, μ – модуль сдвига, χ – коэффициент трения), а после введения обозначения

$$v(t,s)=\chi(z)\rho_l(z)\int\limits_0^t e^{-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau)}u(\tau,z)\,d\tau$$

свелось к системе (поскольку из этой системы фактически и было получено), которая после замены пространственной переменной принимает вид

$$k(s)u_{tt}+\rho(s)v_{tt}=(k(s)u_s)_s,\quad v_t+\lambda(s)v=\lambda(s)u. \tag{17}$$

Теорема [14]. *Общее решение системы (17) имеет вид*

$$u(t,s)=\frac{f^-(t,s)+f^+(t,s)}{\sqrt{k(s)}},\quad v(t,s)=\frac{f^0(t,s)}{\sqrt{k(s)}},$$

где функции $f^\alpha(t,s)$ *являются общим решением системы*

$$f^-_t+f^-_s=-\psi(s)f^-+[\phi(s)-\psi(s)]f^++\psi(s)f^0,$$

$$f^-_t-f^-_s=-[\phi(s)+\psi(s)]f^--\psi(s)f^++\psi(s)f^0,\quad f^0_t=\lambda(s)f^-+\lambda(s)f^+-\lambda(s)f^0, \tag{18}$$

здесь $\phi(s)=k'(s)/(2k(s))$, $\psi(s)=\lambda(s)\rho(s)/(2k(s))$.

Как видим, усложнение системы (17) по сравнению с уравнением (2) не повлияло на сам факт представимости решения через волны и лишь изменило правую часть уравнения (причём, обратим внимание, аддитивно: $\phi(s)$ как равнялась $k'(s)/(2k(s))$, такой и осталась, а появление в (17) дополнительного уравнения и дополнительных слагаемых в старом уравнении просто добавило точно так же в (18) новое уравнение и новые слагаемые в старых уравнениях).

6. Волновые уравнения с памятью, зависящей от второй производной. Вторым типом уравнений, изменивших взгляд на метод распространяющихся волн, оказалось уравнение с памятью, выраженной через вторую производную [41]. В простейшем случае оно имеет вид

$$u_{tt} = u_{ss} + \mu \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s)\, d\tau, \tag{19}$$

где $\mu \neq 0$ и λ – некоторые константы, и обозначением интеграла через v сводится к системе

$$u_{tt} = u_{ss} + \mu v, \quad u_{ss} = v_t + \lambda v. \tag{20}$$

Как оказалось [15], в этом случае представление (12), (13) приходится модифицировать: выражения искомых функций через волны в виде комбинации соответствующих функций не существует и необходимо привлекать ещё и производные. В итоге решение системы (20) представляется методом распространяющихся волн в виде

$$u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s), \quad v(t,s) = -\lambda f^-(t,s) - \lambda f^+(t,s) + \lambda f^0(t,s) - f_s^-(t,s) + f_s^+(t,s), \tag{21}$$

где

$$f_t^-(t,s) + f_s^-(t,s) = \frac{\mu}{2} f^-(t,s) + \frac{\mu}{2} f^+(t,s) - \frac{\mu}{2} f^0(t,s),$$
$$f_t^+(t,s) - f_s^+(t,s) = \frac{\mu}{2} f^-(t,s) + \frac{\varkappa}{2} f^+(t,s) - \frac{\mu}{2} f^0(t,s),$$
$$f_t^0(t,s) = (\lambda+\mu) f^-(t,s) + (\lambda+\mu) f^+(t,s) - (\lambda+\mu) f^0(t,s). \tag{22}$$

При этом явно выделяется "особый" случай $\lambda + \mu = 0$, так как при доказательстве того, что (21), (22) даёт все решения системы (20), вырождение проявляется в начальных условиях. Нетрудно видеть, что соответствие между начальными условиями для u, v и начальными условиями для f^α, имеющее вид

$$u_0(s) = f^-(0,s) + f^+(0,s), \quad u_1(s) = -f_s^-(0,s) + f_s^+(0,s) + \mu f^-(0,s) + \mu f^+(0,s) - \mu f^0(0,s),$$
$$v_0(s) = -f_s^-(0,s) + f_s^+(0,s) - \lambda f^-(0,s) - \lambda f^+(0,s) + \lambda f^0(0,s),$$

при $\lambda + \mu = 0$ становится конфликтным: из него следует, что $v_0(s) = u_1(s)$, хотя с точки зрения системы (20) они должны полагаться независимыми.

Однако тот факт, что $\lambda + \mu = 0$, позволяет комбинацией уравнений (20) получить уравнение $u_{tt} = v_t$, которое интегрируется один раз, после чего удаётся понять в чем проблема. Оказывается, что в этом особом случае в формуле (21) нужно использовать не только первые, но и вторые производные, что даёт в результате представление

$$u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \mu f^0(t,s), \quad v(t,s) = f_{ss}^0(t,s),$$
$$f_t^-(t,s) + f_s^-(t,s) = \frac{\mu}{2} f^-(t,s) + \frac{\mu}{2} f^+(t,s), \quad f_t^+(t,s) - f_s^+(t,s) = \frac{\mu}{2} f^-(t,s) + \frac{\mu}{2} f^+(t,s),$$
$$f_t^0(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s),$$

для которого соответствие между начальными условиями восстанавливается. Действительно, в этом случае они принимают вид

$$u_0(s) = f^-(0,s) + f^+(0,s) - \mu f^0(0,s), \quad u_1(s) = -f_s^-(0,s) + f_s^+(0,s), \quad v_0(s) = f_{ss}^0(0,s).$$

Из последнего условия простым интегрированием получаем $f^0(0,s)$, а из первых двух условий стандартным образом находятся $f^-(0,s)$ и $f^+(0,s)$.

Следует отметить, что возможен и другой вариант представления решения

$$u(t,s)=f^-(t,s)+f^+(t,s)-\mu f^0(t,s),$$

$$v(t,s)=-\lambda f^-(t,s)-\lambda f^+(t,s)-f_s^-(t,s)+f_s^+(t,s)+f_{ss}^0(t,s),$$

$$f_t^-(t,s)+f_s^-(t,s)=\frac{\mu}{2}f^-(t,s)+\frac{\mu}{2}f^+(t,s),\quad f_t^+(t,s)-f_s^+(t,s)=\frac{\mu}{2}f^-(t,s)+\frac{\mu}{2}f^+(t,s),$$

$$f_t^0(t,s)=0, \tag{23}$$

который примечателен в двух аспектах: во-первых, становится понятным, что в формуле (13) в общем случае стоит не линейная комбинация волн, а некоторое линейное дифференциальное выражение от этих волн; а во-вторых, формула (23) показывает, что рассматриваемый нами процесс фактически распадается на два независимых (один – для $f^\pm$, другой – для f^0), что ни из системы (20), ни тем более из исходного уравнения (19) усмотреть было невозможно.

Аналогичный результат получается и в более общем случае. Первое естественное обобщение – случай суммы нескольких экспонент под интегралом:

$$u_{tt}=u_{ss}+\sum_{i=1}^n\mu_i\int\limits_0^t\exp\{-\lambda^i(t-\tau)\}u_{ss}(\tau,s)\,d\tau.$$

Здесь введением переменных v^i вместо интегралов с соответствующими экспонентами получаем систему

$$u_{tt}-u_{ss}=\sum_{i=1}^n\mu_iv^i,\quad u_{ss}=v_t^i+\lambda^iv^i,\quad i=\overline{1,n},$$

решения которой представляются через систему переноса волн. При обозначениях

$$\mu=\sum_{i=1}^n\mu_i,\quad \sigma=\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\lambda^i}$$

(если одно из $\lambda^i=0,$ то формулы несколько модифицируются) и $\sigma\neq-1$ это представление выражается формулами

$$u(t,s)=f^-(t,s)+f^+(t,s),$$

$$v^i(t,s)=-\lambda^if^-(t,s)-\lambda^if^+(t,s)+\lambda^if^i(t,s)-f_s^-(t,s)+f_s^+(t,s),$$

$$f_t^-(t,s)+f_s^-(t,s)=\frac{\mu}{2}f^-(t,s)+\frac{\mu}{2}f^+(t,s)-\frac12\sum_{j=1}^n\mu_jf^j(t,s),$$

$$f_t^+(t,s)-f_s^+(t,s)=\frac{\mu}{2}f^-(t,s)+\frac{\mu}{2}f^+(t,s)-\frac12\sum_{j=1}^n\mu_jf^j(t,s),$$

$$f_t^i(t,s)=(\lambda^i+\mu)f^-(t,s)+(\lambda^i+\mu)f^+(t,s)-\lambda^if^i(t,s)-\sum_{j=1}^n\mu_jf^j(t,s),$$

а при $\sigma=-1$ – формулами

$$u(t,s)=f^-(t,s)+f^+(t,s)-\sum_{i=1}^n\mu_if^i(t,s),\quad v^i(t,s)=f_{ss}^i(t,s),\quad i=\overline{1,n}, \tag{24}$$

$$f_t^-(t,s)+f_s^-(t,s)=\frac{\mu}{2}f^-(t,s)+\frac{\mu}{2}f^+(t,s)-\frac12\sum_{j=1}^n\mu_j(\lambda^j+\mu)f^j(t,s),$$

$$f_t^+(t,s) - f_s^+(t,s) = \frac{\mu}{2} f^-(t,s) + \frac{\mu}{2} f^+(t,s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\lambda^j + \mu) f^j(t,s),$$

$$f_t^i(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \lambda^i f^i(t,s) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j f^j(t,s). \tag{25}$$

Эти формулы позволяют найти результат и для предельно общего (для этого класса уравнений) случая – когда интегрирование идет по произвольной мере:

$$u_{tt} = u_{ss} + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s)\, d\tau\, d\mu(\lambda).$$

Обозначив

$$v(t,s,\lambda) = \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau,s)\, d\tau,$$

получим систему

$$u_{tt} - u_{ss} = \int\limits_0^\infty v\, d\mu(\lambda), \quad u_{ss} = v_t + \lambda v,$$

для которой точно так же приходим к представлениям через волны при $\sigma \neq -1$:

$$u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s),$$

$$v(t,s,\lambda) = -\lambda f^-(t,s) - \lambda f^+(t,s) + \lambda g(t,s,\lambda) - f_s^-(t,s) + f_s^+(t,s),$$

$$f_t^-(t,s) + f_s^-(t,s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t,s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t,s) - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

$$f_t^+(t,s) - f_s^+(t,s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t,s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t,s) - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

$$g_t(t,s,\lambda) = (\lambda + \bar{\mu}) f^-(t,s) + (\lambda + \bar{\mu}) f^+(t,s) - \lambda g(t,s,\lambda) - \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

(здесь $\bar{\mu} = \int_0^{+\infty} d\mu(\lambda)$, $\sigma = \int_0^{+\infty} \lambda^{-1}\, d\mu(\lambda)$) и при $\sigma = -1$:

$$u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad v(t,s,\lambda) = g_{ss}(t,s,\lambda), \tag{26}$$

$$f_t^-(t,s) + f_s^-(t,s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t,s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t,s) - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (\lambda + \bar{\mu}) g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

$$f_t^+(t,s) - f_s^+(t,s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t,s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t,s) - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (\lambda + \bar{\mu}) g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

$$g_t(t,s,\lambda) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \lambda g(t,s,\lambda) - \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)\,d\mu(\lambda). \tag{27}$$

Отметим, что формулы (26), (27), так же как и формулы (24), (25), пригодны не только для $\sigma = -1$, но и для любого значения σ, так что особенность этого случая связана только с порядком того дифференциального оператора, через который выражаются функции u и v, а не с особым поведением волн.

7. Волновые уравнения с памятью и вязкостью. Наконец, приведём ещё один тип волновых уравнений с памятью, который отличается от предыдущих наличием члена с производной u_{txx}, интерпретируемого как вязкость (см., например, [41]):

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \mu \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau,s)\,d\tau,$$

где $\alpha \neq 0$, $k \neq 0$, $\mu \neq 0$ и λ – некоторые константы. Здесь, как и в предыдущих случаях, обозначение интеграла через v приводит к системе

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \mu v, \quad v_t + \lambda v = u_{xx} \tag{28}$$

или, если подставить u_{ss} из второго уравнения в первое, к системе

$$u_{tt} - \alpha v_{tt} = (k+\alpha\lambda)v_t + (\mu + k\lambda)v, \quad u_{ss} = v_t + \lambda v. \tag{29}$$

Представление (29) удобно тем, что по нему легко определить двукратные семейства характеристик $t = \mathrm{const}$ и $s = \mathrm{const}$.

Соответственно решение (28) записывается в виде (здесь приводятся в несколько модифицированной форме результаты из статьи [16])

$$u(t,s) = \alpha f(t,s), \quad v(t,s) = f(t,s) - g(t,s), \tag{30}$$

где четыре "волны" (наличие характеристик $t = \mathrm{const}$ обуславливает запись этого слова в кавычках) – функции f, g, r и не фигурирующая в (30) функция h – определяются соотношениями

$$f_t(t,s) - h_s(t,s) = \frac{k}{\alpha}f(t,s) - \frac{k}{\alpha}g(t,s) + \frac{1}{\alpha}r(t,s), \quad f_s(t,s) = \frac{1}{\alpha}h(t,s),$$
$$g_t(t,s) = \left(\frac{k}{\alpha}+\lambda\right)f(t,s) - \left(\frac{k}{\alpha}+\lambda\right)g(t,s) + \frac{1}{\alpha}r(t,s),$$
$$r_t(t,s) = (\mu+k\lambda)f(t,s) - (\mu+k\lambda)g(t,s),$$

или, если исключить функцию $h(t,s)$, равенствами

$$f_t(t,s) - \alpha f_{ss}(t,s) = \frac{k}{\alpha}f(t,s) - \frac{k}{\alpha}g(t,s) + \frac{1}{\alpha}r(t,s),$$
$$g_t(t,s) = \left(\frac{k}{\alpha}+\lambda\right)f(t,s) - \left(\frac{k}{\alpha}+\lambda\right)g(t,s) + \frac{1}{\alpha}r(t,s),$$
$$r_t(t,s) = (\mu+k\lambda)f(t,s) + (\mu+k\lambda)g(t,s).$$

Это представление, фактически, выводит метод распространяющихся волн за рамки чисто гиперболической теории. Тем же приёмом, что и в методе распространяющихся волн, мы разделили параболическую (так что "волны" оказались совсем не волнами) и гиперболическую составляющие нашей системы.

Результат, как и в п. 6, переносится на случай уравнения с интегралом от комбинации экспонент

$$u_{tt} - \alpha u_{tss} = ku_{ss} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int\limits_0^t \exp\{-\lambda^i (t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s)\, d\tau, \quad n \geqslant 1.$$

Обозначение интеграла от каждой экспоненты через v^i даёт систему

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v^i, \quad v_t^i + \lambda^i v^i = u_{ss}, \quad i = \overline{1, n},$$

решение которой имеет вид

$$u(t,s) = \alpha f(t,s), \quad v^i(t,s) = f(t,s) - g^i(t,s) + r(t,s), \quad i = \overline{1,n},$$

$$f_t(t,s) - \alpha f_{ss}(t,s) = \frac{k}{\alpha}\left[f(t,s) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g^j(t,s)\right],$$

$$g_t^i(t,s) = \frac{k}{\alpha}\left[f(t,s) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g^j(t,s)\right] + \lambda^i [f(t,s) - g^i(t,s) + r(t,s)] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^i}{n} + \frac{\mu_i}{k}\right)\left[f(t,s) - g^i(t,s) + r(t,s)\right],$$

$$r_t(t,s) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^i}{n} + \frac{\mu_i}{k}\right)[f(t,s) - g^i(t,s) + r(t,s)].$$

В случае уравнения с интегралом по произвольной мере

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau,s)\, d\tau\, d\mu(\lambda)$$

введение функции

$$v(t,x,\lambda) = \int\limits_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau,s)\, d\tau$$

приводит к системе

$$u_{tt} - \alpha u_{tss} = ku_{ss} + \int\limits_0^\infty v(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad u_{ss} = v_t + \lambda v,$$

решение которой представляется в виде

$$u(t,s) = \alpha f(t,s), \quad v(t,s,\lambda) = f(t,s) - g(t,s,\lambda) + r(t,s)$$

$$f_t(t,s) - \alpha f_{ss}(t,s) = \frac{k}{\alpha}\left[f(t,s) - \frac{1}{\bar{\mu}}\int\limits_0^\infty g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda)\right],$$

$$g_t(t,s,\lambda) = \frac{k}{\alpha}\left[f(t,s) - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty g(t,s,\lambda)\, d\mu(\lambda)\right] + \lambda[f(t,s) - g(t,s,\lambda) + r(t,s)] -$$

$$-\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\bar\mu}+\frac{1}{k}\right)[f(t,s)-g(t,s,\lambda)+r(t,s)]\,d\mu(\lambda),$$

$$r_t(t,s)=-\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\bar\mu}+\frac{1}{k}\right)[f(t,s)-g(t,s,\lambda)+r(t,s)]\,d\mu(\lambda).$$

Заключение. Подчеркнём, что метод распространяющихся волн явно выходит за рамки рассмотрения гиперболических систем. Возможность выделения параболической составляющей, которая была продемонстрирована в примере, конечно, может быть вполне дополнена и возможностью выделения эллиптической составляющей. Действительно, если характеристики вдруг окажутся мнимыми, мы можем рассмотреть уравнения вида

$$f_t(t,s)-g_s(t,s)=\ldots,\quad g_t(t,s)+f_s(t,s)=\ldots$$

и другие уравнения переноса, где многоточиями обозначены линейные алгебраические выражения от различных "волн", и найти представления решения исходной системы через функции f, g и остальные "волны", которые будут фигурировать в системе переноса.

Таким образом, в результате развития метода распространяющихся волн он трансформируется в метод декомпозиции линейной системы уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными и представления её решений через решения линейной системы первого порядка, левые части которой представляют собой элементарные формы, связанные с простейшими эллиптическими, гиперболическими и параболическими уравнениями, а правые являются линейными алгебраическими выражениями от всех неизвестных функций.

При этом решения исходной системы через решения такой "канонической" системы могут выражаться не только алгебраически, но и линейными дифференциальными (по пространственной переменной) операторами не только первого, но и более высокого порядка. Так что окончательно задача (12), (13) приобретает следующий общий вид: для произвольной линейной системы $Lu=0$ относительно вектор-функции $u(t,x)$ от двух независимых переменных t и x представить её решение в виде $u=M_xz$, где M_x – некоторый обыкновенный дифференциальный оператор с дифференцированием по переменной x, а $z(t,x)$ – решение системы канонических уравнений $Pz_t+Qz_x=Cz$, где левая часть определяется характеристиками системы, матрица P – диагональная (с возможными нулями), а C – некоторая матрица.

Нельзя не отметить, что представленные результаты, конечно, не являются общими. Их скорее можно рассматривать как некоторый набор феноменов, демонстрирующий и возможности метода, и смысл его применения в различных задачах. Все представления, которые обсуждались, получены, в конечном счёте, подбором (поскольку они определяются неоднозначно и даже для уравнений с постоянными коэффициентами возникают несколько "степеней свободы", позволяющих представить решение исходной системы через волны несколькими способами, как эквивалентными между собой, так и не сводящимися друг к другу). Построение же общей теории обсуждаемого метода ещё предстоит.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2023-939).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А.В.* Распространение волн в одномерной неоднородной среде // Деп. в ВИНИТИ 13.12.00. № 3134-В00.
2. *Боровских А.В.* Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 758–767.
3. *Боровских А.В.* Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2004. Т. 24. С. 3–43.
4. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

5. *Ильин В.А.* Граничное управление сферически симметричными колебаниями трёхмерного шара // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 144–155.
6. *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 3. С. 393–403.
7. *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 529–537.
8. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 730–734.
9. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 2. С. 154–158.
10. *Komornik V.* Exact Controlability and Stabilization. Chichester; New York; Paris, 1994.
11. *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 64–89
12. *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. II // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 5. P. 656–666.
13. *Боровских А.В.* Распространение волн в неоднородной среде: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2006.
14. *Боровских А.В., Царицанский А.Н.* Формула распространяющихся волн для среды с памятью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 901–902.
15. *Царицанский А.Н.* Задача о распространии волн в неоднородной среде с памятью // Мат. заметки. 2015. Вып. 98. № 3. С. 436–447.
16. *Царицанский А.Н.* Дискретный и непрерывный случаи в задаче о распространении волн в среде с памятью // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 3. С. 489–503.
17. *Соболев С.Л.* Функционально-инвариантные решения уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.
18. *Friedlander F.G.* Simple progressive solutions of the wave equation // Math. Proc. of the Cambridge Philos. Soc. 1947. V. 43. № 3. P. 360–373.
19. *Еругин Н.П., Смирнов М.М.* Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 853–865.
20. *Никольский Э.В.* Обобщенные функционально-инвариантные решения и эквивалентные системы уравнений математической физики. Новосибирск, 1997.
21. *Киселев А.П.* Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 2001. Т. 275. С. 100–103.
22. *Киселев А.П., Перель М.В.* Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1128–1129.
23. *Ali-Mehmeti F.* Nonlinear waves in networks // Math. Research. V. 80. Berlin, 1994.
24. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.
25. *Покорный Ю.В., Прядиев В.Л.* Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. № 3. С. 115–150.
26. *Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В.* Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 1. С. 16–18.
27. *Belishev M.I., Wada N.* A C^*-algebra associated with dynamics on a graph of strings // J. Math. Soc. Japan. 2015. V. 67. № 3. P. 1239–1274.
28. *Белишев М.И., Каплун А.В.* Канонические формы алгебры эйконалов метрического графа и его геометрия // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2022. Т. 519. С. 35–66.
29. *Баранов В., Кюнец Ж.* Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями // Проблемы сейсмической разведки. М., 1962. С. 179–188.
30. *Благовещенский А.С.* О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 115. С. 28–38.
31. *Белишев М.И.* О нарушении условия разрешимости обратной задачи для неоднородной струны // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. Вып. 4. С. 57–58.
32. *Авдонин С.А., Белишев М.И., Иванов С.А.* Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$ // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 307–331.
33. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991.
34. *Friedlander F.G.* On the integrals of a partial differential equation // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1947. V. 43. № 3. P. 348–359.

35. *Моисеев Е.И., Тихомиров В.В., Козлов Е.А.* Формула среднего значения для регулярного решения гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 10. С. 1802–1803.
36. *Боровских А.В.* Выражение функции Римана для волнового уравнения в неоднородной среде через коэффициенты переноса // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6. С. 851.
37. *Fattorini H.O.* Second-Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam, 1985.
38. *Аниконов Ю.Е., Пестов Л.Н.* Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, 1990.
39. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991.
40. *Имомназаров Х.Х.* Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4. № 2. С. 154–165.
41. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 114–146.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Научно-образовательный математический центр
Северо-Осетинского государственного университета
имени К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.
После доработки 14.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.