ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 596–607

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984

О ЯВЛЕНИИ ПИНСКИ ДЛЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. **Ш. А. Алимов, Ш. Т. Пирматов**

Получены необходимые условия суммируемости спектральных разложений по собственным функциям эллиптического оператора с оператором Бесселя по одной из переменных в произвольной N-мерной области, примыкающей к гиперповерхности сингулярности. Доказано, что если спектральное разложение произвольной функции в некоторой точке данной гиперповерхности суммируется средними Рисса, то её среднее значение по полушару с центром в указанной точке обладает обобщённой гладкостью.

DOI: 10.31857/S0374064123050047, EDN: CXHCCZ

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

Введение. В работе [1] В.А. Ильин обратил внимание на поведение спектральных разложений кусочно-гладких функций, имеющих разрывы вдоль гладких поверхностей. Он доказал, что разложения по собственным функциям оператора Лапласа в произвольной двумерной области кусочно-гладких функций, имеющих разрывы первого рода вдоль гладких кривых, сходятся к разлагаемой функции в каждой точке. Этот результат является обобщением классического результата Дирихле о том, что одномерный тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходится в каждой точке.

Когда размерность N рассматриваемой области больше двух, спектральные разложения кусочно-гладких функций могут расходиться даже в тех точках, в окрестности которых разлагаемая функции является гладкой, т.е. отсутствует локализация спектральных разложений. В этом случае, как в последующем было показано многими авторами, множество расходимости определяется геометрией поверхности разрыва разлагаемой функции (см. [2–8]).

Отметим, что впервые на это явление, с точки зрения так называемой квазиабсолютной сходимости, обратил внимание В.П. Маслов [9], доказавший, что даже при $N=2$ спектральное разложение функции со слабыми разрывами на гладкой кривой L расходится квазиабсолютно в точках эволюты кривой L. Если, например, в случае $N\geqslant 3$ функция имеет слабый разрыв вдоль некоторой сферы, то спектральное разложение данной функции хуже всего ведёт себя в центре этой сферы. В частности, если функция равна единице внутри шара и нулю вне, то в центре шара её спектральное разложение расходится (см. [10, п. 1.3]).

Рассмотрев в статье [11] спектральное разложение характеристической функции шара, М. Пински сравнил отсутствие локализации с явлением Гиббса, поэтому указанное свойство получило название "явления Пински" ("Pinsky phenomenon", см. [12, 13]).

В работе [14] был изучен вопрос, в некотором смысле обратный к явлению Пински. В частности, из её результатов следует, что если функция имеет носитель в замкнутом шаре, то для сходимости спектрального разложения функции в центре шара необходимо, чтобы интеграл от неё по поверхности шара равнялся нулю.

В настоящей статье мы распространяем результаты работы [14], полученые для оператора Лапласа, на случай B-эллиптических операторов. В определении данных операторов следуем монографии И.А. Киприянова [15].

Рассмотрим евклидово полупространство $\mathbb{R}_N^+$, точки которого обозначим (x',x_N), где $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{N-1})$, причём $x_N>0$. Пусть ограниченная область Ω^+ с кусочно-гладкой границей Γ расположена в полупространстве $\mathbb{R}_N^+$ и прилегает к гиперплоскости $x_N=0$. Часть границы Γ, расположенную в $\mathbb{R}_N^+$, обозначим Γ^+, а часть границы Γ, лежащую на гиперплоскости $x_N=0$, обозначим через Γ^0.

В области Ω^+ рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \frac{1}{x_N^k}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(x_N^k\frac{\partial}{\partial x_N}\right) + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

где k – фиксированное положительное число. Данный бесселевский параметр k играет важную роль в формулировке полученных результатов.

Областью определения оператора Δ_B будем считать множество функций $u\in C_0^\infty(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} = 0, \quad x\in\Gamma^0.$$

Введём гильбертово пространство $L_{2,k}(\Omega^+)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_k = \int\limits_{\Omega^+} u(x)v(x)x_N^k\,dx$$

и ассоциированной с ним нормой $\|u\|_k = \sqrt{(u,u)_k}$.

Оператор Δ_B в гильбертовом пространстве $L_{2,k}(\Omega^+)$ является симметрическим:

$$(\Delta_B u, v)_k = -(\nabla u, \nabla v)_k = (u, \Delta_B v)_k,$$

и отрицательным:

$$(\Delta_B u, u)_k = -\|\nabla u\|_k^2.$$

Обозначим через A произвольное положительное самосопряжённое расширение в $L_{2,k}(\Omega^+)$ оператора $-\Delta_B$ такое, что обратный оператор A^{-1} является компактным в $L_{2,k}(\Omega^+)$ (см. [15, § 5.4]). В этом случае собственные значения λ_n оператора A положительны и стремятся к $+\infty$, а собственные функции $u_n(x)$ удовлетворяют уравнению $\Delta_B u_n(x)+\lambda_n u_n(x)=0$ и образуют полную ортонормированную систему в $L_{2,k}(\Omega^+)$.

Спектральное разложение произвольной функции $f\in L_{2,k}(\Omega^+)$ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n<\lambda} f_n u_n(x), \quad f_n = (f, u_n)_k, \tag{2}$$

а их средние Рисса порядка s определяются равенством

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) = \int\limits_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x). \tag{3}$$

Нашей целью является изучение спектральных разложений (2) и их средних Рисса (3) в случае, когда точка x находится внутри границы Γ^0. Тогда вместо шара с центром в точке x приходится рассматривать полушар

$$B^+(x,r) = \{y\in\mathbb{R}^N : |y-x|\leqslant r, \quad y_N>0\},$$

расположенный в полупространстве $x_N\geqslant 0$. Ниже будем предполагать, что точка x и радиус r данного полушара выбраны так, что указанный полушар не выходит за пределы области Ω^+.

Среднее значение порядка $\alpha>0$ функции $f\in L_{2,k}(\Omega^+)$ по полушару радиуса r с центром в точке $x\in\Gamma^0$ определим равенством

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{1}{\omega_N(k,\alpha)r^{N+k}}\int\limits_{\substack{|y|<r\\ y_N>0}}\left(1-\frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y)y_N^k\,dy, \tag{4}$$

где

$$\omega_N(k,\alpha) = \int\limits_{\substack{|y|<1\\ y_N>0}} (1-|y|^2)^{\alpha-1} y_N^k\, dy.$$

Заметим, что для любого $\alpha > 0$ и любой ограниченной (и, в частности, кусочно-гладкой) функции f средние (4) непрерывно зависят от радиуса r на интервале $0 < r < \mathrm{dis}\,(x,\Gamma^+)$.

Введём также среднее значение функции по полусфере радиуса r с центром в точке $x \in \Gamma^0$

$$S_r f(x) = \frac{1}{\omega_N(k) r^{N+k-1}} \int\limits_{\substack{|y|=r\\ y_N>0}} f(x+y) y_N^k\, d\sigma(y), \tag{5}$$

где

$$\omega_N(k) = \int\limits_{\substack{|y|=1\\ y_N>0}} y_N^k\, d\sigma(y).$$

Так как

$$\int\limits_{\substack{|y|\leqslant r\\ y_N>0}} \left(1-\frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y) y_N^k\, dy = \int\limits_0^r \left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} d\rho \int\limits_{\substack{|y|=\rho\\ y_N>0}} f(x+y)\, y^k\, d\sigma(y),$$

то, принимая во внимание определения (4) и (5), можем записать

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{\beta}{r^{N+k}} \int\limits_0^r \left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} \rho^{N+k-1} S_\rho f(x)\, d\rho, \tag{6}$$

где $\beta = \omega_N(k)/\omega_N(k,\alpha)$.

Из определения (5) следует равенство

$$\int\limits_0^R S_r f(x) r^{N+k-1}\, dr = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\ y_N>0}} f(x+y) y_N^k\, dy,$$

справедливое для любого R из интервала $0 < R < \mathrm{dis}\,(x,\Gamma^+)$.

По теореме Фубини для любой функции $f \in L_{1,k}(\Omega^+)$ (т.е. интегрируемой по Ω^+ с весом x_N^k) среднее по полусфере определено для почти всех $r > 0$ таких, что указанная полусфера радиуса r целиком лежит в области Ω^+.

Всюду ниже $S_r^\alpha f(x)$ при $\alpha = 0$ означает среднее по полусфере (5):

$$S_r^0 f(x) = S_r f(x).$$

Как обычно, две функции называются *эквивалентными* на некотором множестве, если почти всюду на этом множестве они принимают одинаковые значения.

Основной результат настоящей статьи заключается в следующем.

Теорема. *Пусть действительные числа $s \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 0$ и целое число $m \geqslant 0$ удовлетворяют условию*

$$s + m - \alpha < (N+k-3)/2. \tag{7}$$

Если спектральное разложение функции $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ суммируется в точке $x \in \Gamma^0$ средними Рисса порядка s, то функция $\varphi_\alpha(r) = S_r^\alpha f(x)$ эквивалентна функции, m раз непрерывно дифференцируемой на интервале $0 < r < \mathrm{dis}\,(x,\Gamma^+)$.

Таким образом, необходимым условием суммируемости ряда Фурье функции из $L_{2,k}(\Omega^+)$ в некоторой граничной точке $x \in \Gamma^0$ является определённая уравновешенность этой функции не только в окрестности данной точки, но и в удалении от неё.

Следствие. *Пусть $N+k > 3$. Если в некоторой точке $x \in \Gamma^0$ средние Рисса (3) порядка $s < (N+k-3)/2$ сходятся, то среднее значение (5) по полусфере радиуса r с центром в этой точке непрерывно зависит от r.*

Например (см. ниже п. 5), если функция f имеет носитель в полушаре $B^+(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant R,\ y_N > 0\}$, то необходимым условием сходимости её ряда Фурье в точке x является выполнение условия

$$\int\limits_{\substack{|y-x|=R\\ y_N>0}} f(y) y_N^k \, d\sigma(y) = 0.$$

Заметим, что характеристическая функция полушара $B^+(x,R)$ данному условию не удовлетворяет, и поэтому её ряд Фурье расходится в точке x.

Доказательство теоремы существенно опирается на результаты И.А. Киприянова [15, гл. 5], где подробно изучены собственные функции оператора (1).

Изложение построено следующим образом: в п. 1 устанавливается основная формула (9), связывающая средние Рисса (3) со средними по полусфере (4) для функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье, в п. 2 полученная формула распространяется на произвольные функции из $L_{2,k}(\Omega^+)$, а в п. 3 на её основе доказывается справедливость утверждения сформулированной теоремы; в п. 4 рассматриваются примеры, связанные с явлением Пински.

1. Связь между средними по полусфере и средними Рисса. Напомним, что рассматриваем произвольное положительное самосопряжённое расширение в $L_{2,k}(\Omega^+)$ оператора $-\Delta_B$ такое, что обратный оператор A^{-1} является компактным в $L_{2,k}(\Omega^+)$. Положим

$$D(A^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m),$$

где $D(A^m)$ – область определения оператора A^m.

Лемма 1. *Пусть числа $\alpha \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ удовлетворяют условию*

$$s < \alpha + \frac{N+k-3}{2}. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f \in D(A^\infty)$, произвольной точки $x \in \Gamma^0$ и любого r из интервала $0 < r < \operatorname{dis}\{x, \Gamma^+\}$ выполняется равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{C(N,k,\alpha,s)}{r^{(N+k)/2+\alpha-s-2}} \int\limits_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) \, d\lambda, \tag{9}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, а $C(N,k,\alpha,s)$ – некоторая положительная постоянная.

Доказательство. 1. Из оценки спектральной функции оператора A (см. [15], § 5.4) следует, что ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x)$$

любой функции $f \in D(A^\infty)$ сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega^+ \bigcup \Gamma^0$.

Зафиксировав $x \in \Gamma^0$ и проинтегрировав ряд Фурье

$$f(x+y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x+y)$$

по полушару $\{|y| < r,\ \ y_N > 0\}$, предварительно умножив его, согласно формуле (4), на соответствующий множитель, получим равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n S_r^\alpha u_n(x). \tag{10}$$

В силу соотношения (6) можем записать

$$S_r^\alpha u_n(x) = \frac{\beta}{r^{N+k}} \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} \rho^{N+k-1} S_\rho u_n(x)\, d\rho. \tag{11}$$

Далее воспользуемся следующей формулой среднего значения (см. [15, формула (5.3.7)]):

$$S_\rho u_n(x) = u(x)\Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right) J_{(N+k-2)/2}(\rho\sqrt{\lambda})\left(\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{-(N+k-2)/2},$$

подставив которую в интеграл (11), получим равенство

$$S_r^\alpha u_n(x) = u_n(x)\frac{\beta\Gamma((N+k)/2)}{r^{N+k}} \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} J_{(N+k-2)/2}(\rho\sqrt{\lambda})\left(\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{-(N+k-2)/2} \rho^{N+k-1}. \tag{12}$$

Последний интеграл простыми преобразованиями сводится к интегралу Сонина (см. [16, формула 12.11.(1)]), который позволяет записать формулу (12) в виде

$$S_r^\alpha u_n(x) = u_n(x) B(N,k,\alpha) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}}, \tag{13}$$

где $B(N,k,\alpha) = 2^{(N+k)/2+\alpha-1}\Gamma((N+k)/2+\alpha)$.

В таком случае из равенств (10) и (13) для средних взвешенных функции $f \in D(A^\infty)$ по полушару радиуса r получаем следующее представление:

$$S_r^\alpha f(x) = B(N,k,\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}} f_n u_n(x). \tag{14}$$

Отметим, что данное представление справедливо для всех $\alpha \geqslant 0$.

2. Рассмотрим теперь интеграл в правой части равенства (9):

$$I(r) = \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{\alpha+s+(N+k)/2}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda. \tag{15}$$

Согласно известным оценкам для функций Бесселя (см. [16, гл. 7])

$$J_\nu(z) = O(z^\nu), \quad J_\nu(z) = O(z^{-1/2}),$$

справедливым при $\nu \geqslant -1/2$ и $z > 0$, интеграл

$$\int_0^\infty |J_{\alpha+s+(N+k)/2}(t)| t^{1+s-\alpha-(N+k)/2}\, dt$$

сходится для всех $\alpha \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $1 + s - \alpha - (N+k)/2 < -1/2$, которое, очевидно, совпадает с условием (8). Отсюда непосредственно следует, что интеграл

(15) для любой функции $f \in D(A^\infty)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \Omega^+ \bigcup \Gamma^0$.

Введём обозначение
$$a_+^s = \begin{cases} a^s, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a \leqslant 0, \end{cases}$$
и преобразуем интеграл (15) с учётом определения (3) следующим образом:
$$I(r) = \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \Bigg[\sum_{\lambda_n<\lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) \Bigg] d\lambda =$$
$$= \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \Bigg[\sum_{\lambda_n<\lambda} (\lambda - \lambda_n)^s f_n u_n(x) \Bigg] d\lambda =$$
$$= \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \Bigg[\sum_{n=1}^\infty (\lambda - \lambda_n)_+^s f_n u_n(x) \Bigg] d\lambda.$$
Поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим равенство
$$I(r) = \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \int_0^\infty (\lambda - \lambda_n)_+^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda})\, d\lambda.$$
Заметим, что интегрирование под знаком суммы фактически ведётся по полупрямой $\lambda > \lambda_n$, поэтому
$$I(r) = \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \int_{\lambda_n}^\infty (\lambda - \lambda_n)^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda})\, d\lambda. \tag{16}$$
Заменив $z = \lambda/\lambda_n$, получим
$$\int_{\lambda_n}^\infty (\lambda - \lambda_n)^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda})\, d\lambda =$$
$$= \lambda_n^{s+1} (\sqrt{\lambda_n})^{-s-\alpha-(N+k)/2} \int_1^\infty (z-1)^s (\sqrt{z})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda_n z}) dz.$$
Далее воспользуемся формулой (см. [17, формула (6.592.10)])
$$\int_1^\infty (z-1)^s (\sqrt{z})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda_n z}) dz = 2^{s+1}\Gamma(s+1) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{s+1}}.$$
В результате из равенства (16) получим
$$I(r) = 2^{s+1}\Gamma(s+1) r^{(N+k)/2+\alpha-s-2} \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}}.$$
Сравнение этого соотношения и (14) даёт равенство
$$S_r^\alpha f(x) = \frac{B(N,k,\alpha)}{2^{s+1}\Gamma(s+1)} r^{s+2-\alpha-(N+k)/2} I(r).$$

С учётом определения (15) интеграла $I(r)$ отсюда следует требуемое соотношение (9) с постоянной $C = 2^{-s-1}B(N,k,\alpha)/\Gamma(s+1)$. Лемма доказана.

2. Распространение основной формулы на функции из $L_{2,k}$. Далее покажем, как можно освободиться от условия $f \in D(A^\infty)$, значительно сужающего класс рассматриваемых функций. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f \in L_{1,k}(\Omega^+)$ основное равенство (9) может не выполняться ни в одной точке ввиду неограниченности спектральных разложений (см. [18, гл. II, § 5]). Более того, даже если функция f имеет гладкость порядка $l < -s + (N-1)/2$, средние Рисса (3) могут в некоторых точках оказаться неограниченными (см. [19]). Тем не менее если предположить, что спектральное разложение функции $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ суммируется в некоторой точке $x \in \Gamma^0$ средними Рисса порядка s, то равенство (9) оказывается верным.

Лемма 2. *Пусть выполняется условие (8). Если средние Рисса $E_\lambda^s f(x)$ функции $f \in L_2(\Omega^+)$ в некоторой точке $x \in \Gamma^0$ ограничены по $\lambda > 0$, то для почти всех r из интервала $0 < r < \operatorname{dis}\{x, \Gamma^+\}$ выполняется равенство (9).*

Доказательство. Пусть f – произвольная функция из пространства $L_{2,k}(\Omega^+)$. Для любого $h > 0$ введём в рассмотрение функцию

$$F(y,h) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-\lambda_n h} u_n(y), \quad y \in \Gamma^0 \bigcup \Omega^+, \tag{17}$$

представляющую собой средние Абеля спектрального разложения f. Средние Рисса спектрального разложения этой функции имеют вид

$$E_\lambda^s F(y,h) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n e^{-\lambda_n h} u_n(y). \tag{18}$$

Очевидно, что функция $F(y,h)$ при каждом $h > 0$ принадлежит $D(A^\infty)$. Следовательно, согласно лемме 1 выполняется равенство

$$S_r^\alpha F(x,h) = \frac{C(N,k,\alpha,s)}{r^{(N+k)/2+\alpha-s-2}} \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s F(x,h)\, d\lambda. \tag{19}$$

Докажем, что при $h \to 0$ это равенство переходит в равенство (9).

1) Для доказательства того, что правая часть (19) при $h \to 0$ стремится к правой части (9), воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 1. *Для любого $s \geqslant 0$ существует функция $\psi_s(t,h,\lambda)$, при всех $\lambda > 0$ равномерно по h из интервала $0 < h < 1$ удовлетворяющая оценке*

$$\int_0^\lambda t^s |\psi_s(t,h,\lambda)|\, dt \leqslant C\lambda^s, \tag{20}$$

такая, что выполняется равенство

$$E_\lambda^s F(x,h) = E_\lambda^s f(x) e^{-\lambda h} + \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\lambda t^s \psi_s(t,h,\lambda) E_\lambda^s f(x)\, dt. \tag{21}$$

Справедливость данного утверждения следует из результатов работы [20].

Предположим, что выполнено условие $|E_\lambda^s f(x)| \leqslant M(x)$, $\lambda > 0$. В этом случае из соотношения (21) и оценки (20) следует, что средние Рисса порядка s функции (17) равномерно по h из интервала $0 < h < 1$ ограничены по $\lambda > 0$:

$$|E_\lambda^s F(x,h)| \leqslant M(x) + M(x)\frac{1}{\lambda^s} \int_0^\lambda t^s |\psi_s(t,h,\lambda)|\, dt \leqslant (1+C)M(x).$$

Тогда из условия (7) и асимптотики функции Бесселя следует, что интеграл в правой части (19) сходится абсолютно и равномерно по $h > 0$.

Далее непосредственно из равенства (18) следует, что

$$\lim_{h\to 0} E_\lambda^s u(x,h) = E_\lambda^s f(x).$$

Стало быть, выполнены все условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [21, Добавление I, п. 3]), согласно которой интеграл в правой части равенства (19) равномерно по r на каждом отрезке положительной полупрямой сходится при $h \to 0$ к интегралу в правой части (9).

2) Докажем теперь, что левая часть равенства (19) стремится к левой части равенства (9) при $h \to 0$. В этом случае, по крайней мере при малых α, мы не можем, в отличие от рассмотренного выше случая, утверждать, что сходимость будет при всех значениях r. Объясняется это тем, что при $\alpha \leqslant 1/2$ средние (4) и (5) для функций из $L_{2,k}(\Omega^+)$ определены лишь для почти всех значений радиуса r, т.е. для бесконечного числа значений радиуса они могут не существовать.

Обозначим величину в правой части (9) символом $\phi_\alpha(r)$. Согласно проведённым выше рассуждениям, для любой функции $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ при выполнении условий леммы 2 функция $\phi_\alpha(r)$ является непрерывной на полупрямой $r > 0$. Кроме того, было установлено, что равенство

$$\lim_{h\to 0} S_r^\alpha F(x,h) = \phi_\alpha(r) \tag{22}$$

выполняется равномерно по $r \in I$, где I – произвольный отрезок, лежащий внутри интервала $0 < r < \operatorname{dis}(x,\Gamma^+)$.

Требуется доказать, что для почти всех r из интервала $0 < r < \operatorname{dis}(x,\Gamma^+)$ справедливо равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \phi_\alpha(r). \tag{23}$$

Для доказательства заметим, что из равенства Парсеваля и определения (17) следует сходимость $F(x,h) \to f(x)$ при $h \to 0$ в метрике $L_{2,k}(\Omega^+)$:

$$\|F(\,\cdot\,,h) - f(\cdot)\|_k^2 = \sum_{n=1}^\infty |f_n|^2 (1 - e^{-\lambda_n h})^2 \to 0, \quad h \to 0.$$

Следовательно, для любой функции $g \in L_{2,k}(\Omega^+)$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega^+} F(y,h) g(y) y_N^k\,dy = \int\limits_{\Omega^+} f(y) g(y) y_N^k\,dy. \tag{24}$$

Докажем сначала справедливость соотношения (23) при $\alpha = 0$. Зафиксируем произвольные ε и R такие, что

$$0 < \varepsilon < R < \operatorname{dis}(x,\Gamma^*). \tag{25}$$

Из определения (5) следует равенство

$$\int\limits_\varepsilon^R S_r F(x,h) r^{N+k-1}\,dr = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\substack{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant R\\ y_N > 0}} F(x+y,h) y_N^k\,dy.$$

Принимая во внимание соотношение (22), устремим в этом равенстве h к нулю. В результате получим

$$\int\limits_\varepsilon^R \phi_0(r) r^{N+k-1}\,dr = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\substack{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant R\\ y_N > 0}} f(x+y) y_N^k\,dy = \int\limits_\varepsilon^R S_r f(x) r^{N+k-1}\,dr.$$

Тогда для всех ε и R, удовлетворяющих условию (25), выполняется равенство

$$\int_{\varepsilon}^{R} [\phi_0(r) - S_r f(x)] r^{N+k-1}\, dr = 0.$$

Отсюда очевидным образом вытекает справедливость при $\alpha = 0$ соотношения (23) для почти всех r из интервала $0 < r < \operatorname{dis}(x, \Gamma^+)$.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$G(r,h) = \int\limits_{\substack{|y|\leqslant r\\ y_N>0}} (r^2 - |y|^2)^{\alpha} F(x+y,h) y_N^k\, dy. \tag{26}$$

Из соотношения (24) и определения (4) следует, что

$$\lim_{h\to 0} G(r,h) = \int\limits_{\substack{|y|\leqslant r\\ y_N>0}} (r^2 - |y|^2)^{\alpha} f(x+y) y_N^k\, dy. \tag{27}$$

С другой стороны, дифференцирование интеграла (26) по r и простые преобразования приводят к равенству

$$G'(r,h) = 2\alpha r^{2\alpha-1} \int\limits_{\substack{|y|\leqslant r\\ y_N>0}} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} F(x+y,h) y_N^k\, dy,$$

откуда с учётом определения (4) получаем

$$G'(r,h) = 2\alpha\omega_N(k,\alpha) r^{N+k+2\alpha-1} S_r^{\alpha} F(x,h).$$

Следовательно, для любых ε и R, удовлетворяющих условию (25), можно записать

$$G(R,h) - G(\varepsilon,h) = 2\alpha\omega_N(k,\alpha) \int_{\varepsilon}^{R} r^{N+k+2\alpha-1} S_r^{\alpha} F(x,h)\, dr.$$

Устремляя в этом равенстве вначале $h \to 0$, а затем $\varepsilon \to 0$, в силу (22) и (27) будем иметь

$$\int\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\ y_N>0}} (R^2 - |y|^2)^{\alpha} f(x+y) y_N^k\, dy = 2\alpha\omega_N(k,\alpha) \int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} \phi_\alpha(r)\, dr.$$

Преобразовав интеграл в левой части с учётом определения (4), окончательно получим

$$\int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} S_r^{\alpha} f(x)\, dr = \int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} \phi_\alpha(r)\, dr.$$

Ввиду произвольности R отсюда следует требуемое соотношение (23). Лемма 2 доказана.

Замечание. При $\alpha > 1/2$ обе части равенства (24) являются непрерывными функциями радиуса r и это равенство выполняется в каждой точке интервала $0 < r < \operatorname{dis}\{x, \Gamma^0\}$.

3. Доказательство теоремы. Основным в дальнейших рассуждениях является равенство (9), которое запишем в следующем виде:

$$S_r^\alpha f(x) = r^2 \int_0^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda, \tag{28}$$

где

$$\Phi(z) = C(N,k,\alpha,s) z^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(z). \tag{29}$$

Напомним, что равенство (28) справедливо для почти всех значений r из интервала $0 < r < \operatorname{dis}\{x, \Gamma^0\}$, хотя правая часть определена для всех $r > 0$.

Далее

$$S_r^\alpha f(x) = r^2 \int_0^1 \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda + r^2 \int_1^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda. \tag{30}$$

Первый интеграл в правой части (31), очевидно, является гладкой функцией r на полупрямой $r > 0$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно при выполнении условия (8) убедиться в непрерывности при $r > 0$ производной порядка m функции

$$\psi_\alpha(r) = \int_1^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda. \tag{31}$$

Продифференцировав формально равенство (31) m раз, получим

$$\psi_\alpha^{(m)}(r) = \int_1^\infty (\sqrt{\lambda})^m \Phi^{(m)}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x)\, d\lambda. \tag{32}$$

Из асимптотического поведения функций Бесселя (см. [16, п. 7.21]) следует, что производные функции (29) при $z \to +\infty$ имеют асимптотику

$$\Phi^{(m)}(z) = A z^{s-\alpha-(N+k+1)/2} \left[\cos^{(m)}(z+\beta) + \frac{O(1)}{z}\right].$$

Следовательно, $|\Phi^{(m)}(z)| \leqslant C z^{s-\alpha-(N+k+1)/2}$, $z \geqslant 1$. Подставив эту оценку в интеграл (32), получим

$$|\psi_\alpha^{(m)}(r)| \leqslant C \int_1^\infty (\sqrt{\lambda})^{m+s-\alpha-(N+k+1)/2} |E_\lambda^s f(x)|\, d\lambda.$$

Таким образом, для абсолютной и равномерной по r на любом отрезке положительной полупрямой сходимости интеграла (32) достаточно выполнения неравенства

$$m + s - \alpha - (N+k+1)/2 < -2,$$

совпадающего с условием (7). Теорема доказана.

4. Примеры. Рассмотрим примеры применения теоремы, связанные с явлением Пински.

Пример 1. Фиксируем произвольную точку $x \in \Gamma^0$ и положительное число $R < \operatorname{dis}(x, \Gamma^+)$. Для произвольной функции $F \in C^\infty(R^N)$ определим следующую функцию:

$$f(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если } |y-x| \leqslant R, \\ 0, & \text{если } |y-x| > R. \end{cases}$$

Этим же символом f обозначим её ограничение на область Ω^+. Для такой функции f среднее значение (5) по полусфере радиуса r имеет вид

$$S_r f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_N(k) r^{N+k-1}} \displaystyle\int\limits_{\substack{|y|=r\\ y_N>0}} F(x+y) y_N^k \, d\sigma(y), & \text{если} \ \ 0 < r \leqslant R, \\ 0, & \text{если} \ \ r > R. \end{cases}$$

Следовательно, $S_r f(x)$ как функция радиуса может иметь разрыв только в точке $r = R$.

Непрерывность средних $S_r f(x)$ означает, что должно выполняться условие

$$\int\limits_{\substack{|y|=R\\ y_N>0}} F(x+y) y_N^k \, d\sigma(y) = 0. \tag{33}$$

Из теоремы следует, что данное условие является необходимым для сходимости спектрального разложения (2) функции f в точке $x \in \Gamma^0$. Более того, в случае больших значений размерности N и показателя k должны обращаться в нуль и производные по R интеграла (33) до определённого порядка.

Заметим, что если функция F принимает только положительные значения, например, $F(y) \equiv 1$, то условие (33) не может быть выполнено. Следовательно, спектральное разложение характеристической функции полушара в его центре должно расходиться (ср. с [11] и [12]).

Пример 2. Для любой области $D \subset \mathbb{R}^N$ символом $\Sigma(D)$ обозначим класс функций с носителем в $\overline{D}$, каждая из которых является следом некоторой функции из $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Иначе говоря, $f \in \Sigma(D)$, если существует функция $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$f(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если} \ \ y \in \overline{D}, \\ 0, & \text{если} \ \ y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{34}$$

Фиксируем произвольную точку $x^* \in \Gamma^0$ и рассмотрим произвольную подобласть D области Ω^+, целиком расположенную в полушаре

$$B(x) = \{y \in \Omega^+ : |y - x| < \operatorname{dis}(x, \Gamma^+)\}.$$

Обозначим символом Γ^* ту часть границы ∂D области D, которая лежит в Ω^+. Ниже будем предполагать, что поверхность Γ^* является звёздной относительно точки x^*, т.е. внутренняя часть отрезка, соединяющего точку x^* с произвольной точкой множества Γ^*, лежит внутри D.

Будем говорить, что для поверхности Γ^* в точке x^* имеет место явление Пински, если существует функция $f \in \Sigma(D)$, спектральное разложение которой расходится в точке x^*.

Точку $y^* \in \Gamma^*$ назовём *сферической относительно* x^*, если окружающая точку y^* некоторая открытая (в топологии Γ^*) часть поверхности Γ^* лежит на сфере с центром в точке x^*.

Утверждение 2. *Если на* Γ^* *лежит хотя бы одна точка, сферическая относительно* x^*, *то для поверхности* Γ^* *в точке* x^* *имеет место явление Пински.*

Действительно, предположим, что точка $y^* \in \Gamma^*$ является сферической относительно x^*. Рассмотрим произвольный выпуклый конус, образованный лучами, исходящими из точки x^* и проходящими через точки Γ^*, которые окружают y^* и лежат на сфере с центром в точке x^*. Обозначим через $F(y)$ функцию, всюду в этом конусе, кроме окрестности точки x^*, равную единице, и продолжим её на всё пространство $\mathbb{R}^N$ так, чтобы она принадлежала $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, была неотрицательной и носитель её лежал в чуть большем аналогичном конусе. Тогда функция $f(y)$, определённая равенством (34), очевидно, принадлежит классу $\Sigma(D)$, а её спектральное разложение, согласно примеру 1, в точке x^* расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* Теорема о разложимости кусочно-гладкой функции в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 442–445.
2. *Colzani L., Crespi A., Travaglini G., Vignati M.* Equiconvergence theorems for Fourier–Bessel expansions with applications to the harmonic analysis of radial functions in Euclidean and noneuclidean spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 338. P. 43–55.
3. *Brandolini L., Colzani L.* Localization and convergence of eigenfunction expansions // J. of Fourier Anal. and Appl. 1999. V. 5. № 5. P. 431–447.
4. *Taylor M.* Pointwise Fourier inversion on tori and other compact manifolds // J. of Fourier Anal. and Appl. 1999. V. 5. № 5. P. 449–463.
5. *Alimov S.A.* On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function // J. of Fourier Anal. and Appl. 2003. V. 9. № 1. P. 67–76.
6. *Alimov S.A.* Sets of uniform convergence of Fourier expansions of piecewise smooth functions // J. of Fourier Anal. and Appl. 2004. V. 10. № 6. P. 635–644.
7. *Ashurov R.R.* On multiple Fourier series of piecewise smooth functions // Dokl. Mathematics. 2007. V. 75. № 3. P. 333–335.
8. *Алимов Ш.А.* О спектральных разложениях кусочно-гладких функций, зависящих от геодезического расстояния // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 820–832.
9. *Маслов В.П.* Свойства абсолютной сходимости многомерных рядов Фурье с точки зрения геометрии слабых разрывов разлагаемых функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 2. С. 275–278.
10. *Alimov Sh.A., Ashurov R.R., Pulatov A.K.* Multiple Fourier series and Fourier integrals // Commutative Harmonic Analysis. IV. Encyclopedia Math. Sci. V. 42. Berlin; Heidelberg, 1991. P. 1–95.
11. *Pinsky M.A.* Pointwise Fourier inversion in several variables // Notices Amer. Math. Soc. 1995. V. 42. № 3. P. 330–334.
12. *Kahane J.-P.* Le phénomène de Pinsky et la géométrie des surfaces // C.R. Acad. Sci. Paris, 1995. Sér. I. V. 321. № 8. P. 1027–1029.
13. *Taylor M.* Eigenfunction expansions and the Pinsky phenomenon on compact manifolds // J. of Fourier Anal. and Appl. 2001. V. 7. № 5. P. 507–522.
14. *Алимов Ш.А.* О гладкости средних значений функций с суммируемым спектральным разложением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 498–508.
15. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
16. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., 1949.
17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
18. *Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31. № 6. С. 27–82.
19. *Алимов Ш.А., Ильин В.А.* О спектральных разложениях, отвечающих произвольному неотрицательному самосопряжённому расширению оператора Лапласа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 9–12.
20. *Алимов Ш.А.* О суммировании спектральных разложений методами Рисса и Абеля // Узб. мат. журн. 2011. № 4. С. 20–35.
21. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М., 1979.

Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент,
Ташкентский государственный технический
университет имени И. Каримова, Узбекистан

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.
После доработки 10.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.