

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРАМИ ВЕРХНИХ СИЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЗНАКОВ, НУЛЕЙ И КОРНЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2023 г. А. Х. Сташ

Построен пример линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль.

DOI: 10.31857/S0374064123050035, EDN: CWOGNI

Введение. Для заданного натурального числа n рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых наборами $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывных функций, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей в силу теоремы существования и единственности, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) показатели равны между собой и их спектры (т.е. множества значений на ненулевых решениях уравнения) состоят из одного значения [1].

В статье [2] доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные подмножества, состоящие из сколь угодно большого наперёд заданного числа метрически и топологически существенных значений. Кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество метрически и топологически существенных значений. В [3] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работах [4–8] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Также в предположении, что спектры содержат точку нуль, в [4–7] получено обращение этого утверждения. В настоящей работе эти свойства обобщены и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней решений дифференциальных уравнений третьего порядка.

1. Формулировка основного результата. Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [9, 10]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 [9–12]. Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ – число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ – число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$.

Далее для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ введём обозначение $\nu^\gamma(y, m, t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m \rangle, t)$, где $\gamma \in \{-, 0, +\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [8–10]. *Верхние (нижние) частоты Сергеева знаков, нулей и корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \right).$$

Определение 4 [11, 12]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей и корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\gamma(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\gamma(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\gamma(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right). \end{aligned}$$

К определению 2 добавим ещё обозначения

$$\nu^\gamma(y, s, t) \equiv \nu^\gamma(y, t) - \nu^\gamma(y, s), \quad \nu^\gamma(y, m, s, t) \equiv \nu^\gamma(y, m, t) - \nu^\gamma(y, m, s).$$

Определение 5. Множество всех значений показателя $\varkappa: \mathcal{S}_*(a) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ на нетривиальных решениях уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ назовём *спектром* этого показателя уравнения $a \in \mathcal{E}^n$.

Определение 6 [13, с. 489]. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством* прямой $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – *суслинское множество* расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Теперь перейдём к формулировке основного результата.

Теорема. Для любого содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$ существует дифференциальное уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, удовлетворяющее при любом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ равенствам

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

2. Вспомогательные определения и факты. В этом пункте приведём сведения, необходимые для доказательства основного результата.

Лемма 1. Если набор функций $\{y_1, y_2, y_3\}$ является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, то при любом $\alpha > 0$ набор функций

$$z_i(t) = y_i(t) \exp(\exp(\alpha t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

также является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $b \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

Доказательство. Обозначим через $W_{y_1, y_2, y_3}(t)$ и $W_{z_1, z_2, z_3}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, определители Вронского систем функций $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{S}_*(a)$ и z_1, z_2, z_3 соответственно.

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \exp(\exp(\alpha t))(\alpha e^{\alpha t} y_i(t) + \dot{y}_i(t)), \quad i = \overline{1, 3}, \\ \ddot{z}_i(t) &= \exp(\exp(\alpha t))(\alpha^2 e^{\alpha t} (e^{\alpha t} + 1) y_i(t) + 2\alpha e^{\alpha t} \dot{y}_i(t) + \ddot{y}_i(t)), \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{z_1, z_2, z_3}(t) &\equiv \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \exp(3 \exp(\alpha t)) W_{y_1, y_2, y_3}(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что набор функций (1) является [14, с. 86] фундаментальной системой решений следующего уравнения $b \in \tilde{\mathcal{E}}^3$:

$$\frac{1}{W_{z_1, z_2, z_3}(t)} \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) & y \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) & \dot{y} \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) & \ddot{y} \\ \dddot{z}_1(t) & \dddot{z}_2(t) & \dddot{z}_3(t) & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0.$$

Лемма доказана.

Определение 7 [6]. Назовём функцию $y \in C^3([\alpha, \beta])$ *правильно колеблющейся порядка* $p \in \mathbb{N}$ *на отрезке* $[\alpha, \beta]$, если существует последовательность $\alpha = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{4p+2} = \beta$ вещественных чисел такая, что:

1) на отрезках $[\tau_{2i-1}, \tau_{2i}]$, $i = \overline{1, 2p+1}$, функция y имеет постоянную производную r_i , при этом справедливы неравенства $r_1 > 0$ и $r_i r_{i+1} < 0$;

2) на интервалах (τ_{2i}, τ_{2i+1}) , $i = \overline{1, 2p}$, её вторая производная $\ddot{y}$ отлична от нуля.

Класс функций, введённых в определении 7, обозначим через $R_p[\alpha, \beta]$. Из определения 7 вытекает, что для функции $y \in R_p[\alpha, \beta]$ справедливы неравенства $\ddot{y} < 0$ при $t \in (\tau_{4i-2}, \tau_{4i-1})$ и $\ddot{y} > 0$ при $t \in (\tau_{4i}, \tau_{4i+1})$, $i = \overline{1, p}$.

Нетрудно убедиться в том, что для функции $y \in R_p[\alpha, \beta]$ при каждом $c \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$\nu^\gamma(y(t) - c; \alpha, \beta) \leq 2p + 1, \quad \gamma \in \{-, 0, +\}.$$

Определение 8 [6]. Назовём функцию $y \in C^3(\mathbb{R}_+)$ *правильно колеблющейся на положительной полуоси* $\mathbb{R}_+$, если существует такая строго возрастающая последовательность $\{\delta_i\}$ неотрицательных чисел с первым членом $\delta_1 = 0$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ сужение $y|_{[\delta_i, \delta_{i+1}]}$ является правильно колеблющейся на отрезке $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ функцией некоторого порядка $p_i \in \mathbb{N}$, т.е. $y|_{[\delta_i, \delta_{i+1}]} \in R_{p_i}[\delta_i, \delta_{i+1}]$.

Класс функций, введённых в определении 8, обозначим через $R(\mathbb{R}_+)$.

В работах [6, 15] установлено следующее утверждение.

Лемма 2. Для любых натурального числа $p \in \mathbb{N}$ и действительных чисел $\alpha < \beta$ и $b < d$ существует функция $f(\cdot) \equiv f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; p) : [\alpha, \beta] \rightarrow [b, d]$, правильно колеблющаяся порядка p на отрезке $[\alpha, \beta]$, обладающая свойствами:

1) для любых $\tau \in (\alpha, \beta]$, символа $\gamma \in \{0, -, +\}$ и чисел $c_1 \in [b, d]$, $c_2 \in (b, d)$, $c_3 \in \{b, d\}$ и $c_4 \notin [b, d]$ справедливы соотношения

$$\nu^\gamma(f(\cdot) - c_1; \alpha, \tau) \leq (2p + 1)(\tau - \alpha)/(\beta - \alpha) + 1, \quad \nu^\gamma(f(\cdot) - c_2; \alpha, \beta) = 2p + 1,$$

$$\nu^-(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = 0, \quad \nu^0(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = p + 1, \quad \nu^+(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = 2p + 1, \\ \nu^\gamma(f(\cdot) - c_4; \alpha, \beta) = 0;$$

2) уравнение $f(t) = b$ имеет ровно $p + 1$ решение $\mu_1 < \dots < \mu_{p+1}$, уравнение $f(t) = d$ имеет ровно $p + 1$ решение $\nu_1 < \dots < \nu_{p+1}$, причём $\alpha = \mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{p+1} = \beta$;
3) для некоторой константы $M > 0$ выполнены неравенства

$$|\dot{f}(t)| \leq M(2p + 1)(d - b)(\beta - \alpha)^{-1}, \quad |\ddot{f}(t)| \leq M(2p + 1)^2(d - b)^2(\beta - \alpha)^{-2}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Следующая лемма уточняет результат статьи [6, следствие 4] и использует рассуждения [6, лемма 14].

Лемма 3. Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, существует ограниченная функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot) \in R(\mathbb{R}_+)$, обладающая свойством: для любых функций $a_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 2$, удовлетворяющих для некоторых положительных постоянных C и α условию $|a_0(t)| + |a_1(t)| + |a_2(t)| \leq Ce^{-\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, при каждом $c \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\{\hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{A}, \quad (2)$$

$$\hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) \geq \hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \hat{\nu}^+(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c). \quad (3)$$

Доказательство. Через $\mathcal{K}$ обозначим канторово множество [16, с. 138]:

$$\mathcal{K} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^j} \Delta_i^j,$$

где отрезки Δ_i^j , $i = \overline{1, 2^j}$, определяются индукцией по $j \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \sqcup \{0\}$: $\Delta_1^0 = [0, 1]$, а при $j \in \mathbb{N}$ для каждого $i = \overline{1, 2^j}$ отрезки Δ_{2i-1}^j и Δ_{2i}^j по определению – левая и правая трети отрезка Δ_i^{j-1} соответственно. Для любых $j \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1, 2^j}$ обозначим $\Delta_i^j = [\alpha_i^j, \beta_i^j]$, т.е.

$$[\alpha_{2i-1}^{j+1}, \beta_{2i-1}^{j+1}] = [\alpha_i^j, \alpha_i^j + 3^{-(j+1)}], \quad [\alpha_{2i}^{j+1}, \beta_{2i}^{j+1}] = [\beta_i^j - 3^{-(j+1)}, \beta_i^j].$$

Множество точек второго рода [16, с. 141] канторова множества $\mathcal{K}$ обозначим через $\mathcal{K}_2$:

$$\mathcal{K}_2 = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^j} (\alpha_i^j, \beta_i^j).$$

Далее для каждого $j \in \mathbb{N}_0$ определим 2^j отрезков $\tilde{\Delta}_i^j = [\tilde{\alpha}_i^j, \tilde{\beta}_i^j]$, где $\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j + 6^{-(j+2)}$ и $\tilde{\beta}_i^j = \beta_i^j - 6^{-(j+2)}$, $i = \overline{1, 2^j}$.

Занумеруем отрезки $\tilde{\Delta}_i^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1, 2^j}$, натуральными числами и обозначим их в указанной нумерации $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, полагая $\Delta(2^j + i - 1) = \tilde{\Delta}_i^j$. Пусть $\Delta(k) = [b_k, d_k]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $b_k = \tilde{\alpha}_i^j$, $d_k = \tilde{\beta}_i^j$, где $j = \lfloor \log_2 k \rfloor$ и $i = k + 1 - 2^j$ (здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа).

Выберем строго возрастающую последовательность (t_k) с первым членом $t_1 = 0$, удовлетворяющую при $k \rightarrow +\infty$ условию $(t_{k+1} - t_k)/t_{k+1} \rightarrow 1$.

Согласно [16, с. 146–147] существует гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathbb{I}$ между пространством $\mathcal{K}_2$ и пространством $\mathbb{I}$ иррациональных чисел. Для суслинского множества $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ существует [13, с. 489] непрерывное отображение $\psi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\psi(\mathbb{I}) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$. Положим $g = \psi \circ \varphi$. Тогда $g(\mathcal{K}_2) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$.

Функцию $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ определим сначала на отрезках $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ и $[t_{4k-1}, t_{4k}]$ для всех $k \in \mathbb{N}$. На каждом отрезке $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, выберем число $\xi_k \in \Delta(k)$ второго рода и зададим последовательность $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел равенством

$$p_k = [(2\pi)^{-1}(t_{4k-2} - t_{4k-3})g(\xi_k)] + 1.$$

Последовательность $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел зададим равенством $n_k = [(t_{4k} - t_{4k-1})k] + 1$, если $+\infty \in \mathcal{A}$, иначе $n_k = 1$. Положим

$$y_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} f(t; t_{4k-3}, t_{4k-2}; b_k, d_k; p_k) & \text{при } t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}], \\ f(t; t_{4k-1}, t_{4k}; 2, 3; n_k) & \text{при } t \in [t_{4k-1}, t_{4k}], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$. На полуось $\mathbb{R}_+$ функцию $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ продолжим согласно [6, следствие 2] так, чтобы $y_{\mathcal{A}}(\cdot) \in R(\mathbb{R}_+)$ и

$$y_{\mathcal{A}}|_{[t_{4k-2}, t_{4k-1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k-2}, t_{4k-1}], \quad y_{\mathcal{A}}|_{[t_{4k}, t_{4k+1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k}, t_{4k+1}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Построенная функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ является ограниченной на полуоси, как это вытекает из указанного следствия и определения функции $f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; p)$.

В доказательстве леммы 14 и следствия 4 [6] установлено, что при каждом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ справедливо равенство

$$\hat{\nu}^{\gamma}(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \begin{cases} g(c), & \text{если } c \in \mathcal{K}_2, \\ +\infty, & \text{если } c \in (2, 3) \text{ и } +\infty \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, установлены все равенства в (2) и (3). Установим теперь оставшееся неравенство.

Пусть $c \in \mathcal{K}_2$. Тогда в его троичном представлении $c = 0, c_1 c_2 \dots$ (где цифры $c_i \in \{0, 2\}$, $i \in \mathbb{N}$) существует бесконечно много таких $m \in \mathbb{N}$, что $c_m = 0$ и $c_{m+1} = 2$. Обозначим множество таких m через $\mathcal{N}(c)$. Пусть

$$\underline{c}^{(m)} = 0, c_1 c_2 \dots c_{m-1} \quad \text{и} \quad \bar{c}^{(m)} = 0, c_1 c_2 \dots c_{m-1} (2), \quad m \in \mathcal{N}(c).$$

Поскольку троичная запись числа $\underline{c}^{(m)}$ содержит после запятой не более чем $m-1$ цифр 0 и 2, то $\underline{c}^{(m)}$ – левый конец некоторого отрезка $(m-1)$ -го ранга $\Delta_{j(m)}^{m-1}$, $j(m) \in \{1, \dots, 2^{m-1}\}$, а так как $\bar{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m)} = 3^{-(m-1)}$, то $[\underline{c}^{(m)}, \bar{c}^{(m)}] = \Delta_{j(m)}^{m-1}$.

Докажем неравенство

$$\underline{c}^{(m)} + 2 \cdot 6^{-(m+1)} < c < \bar{c}^{(m)} - 2 \cdot 6^{-(m+1)}, \quad m \in \mathcal{N}(c). \quad (4)$$

Действительно, вычитая из всех частей этого неравенства число $\underline{c}^{(m)}$ и затем умножая их на 3^{m+1} , получаем очевидное неравенство

$$2^{-m} < 2 + 0, c_{m+2} \dots < 9 - 2^{-m}.$$

Положим $N^0(c) = \{2^{m-1} + j(m) - 1 : m \in \mathcal{N}(c)\}$. Другими словами, множество $N^0(c)$ состоит из номеров отрезков $\tilde{\Delta}_{j(m)}^{m-1}$, $m \in \mathcal{N}(c)$. Как отмечено выше, множество $N^0(c)$ бесконечно.

Из построения функции $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ и леммы 2 вытекает справедливость неравенств

$$|\dot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leq M(|g(\xi_k)| + 1), \quad |\ddot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leq M(g^2(\xi_k) + 1), \quad t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}],$$

для некоторой постоянной $M > 0$.

Заметим, что $\lim_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} \xi_k = c$, поскольку $|\Delta(k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} g(\xi_k) = g(c)$, поскольку g непрерывна. Значит, множество $\{|g(\xi_k)| : k \in N^0(c)\}$, а с ним и сужения функций $\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ и $\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на объединение отрезков $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$, $k \in N^0(c)$, ограничены некоторой константой $M > 1$.

Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $36C\tilde{M}k^3e^{-\alpha(4k-3)} < 1$ при всех $k \geq k_0$. Тогда для любого $k \in N^0(c) \cap [k_0, +\infty)$ на отрезке $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ функция $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$ имеет не менее $2p_k + 1$ точек строгой смены знака. Действительно, в силу (4) справедлива цепочка

$$\min\{d_k - c, c - b_k\} > 6^{-(m+1)} > 1/(36k^3),$$

где $m = [\log_2 k] + 1$, поэтому по построению функции $y_A(\cdot)$ на отрезке $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ найдутся точки

$$t_{4k-3} = \mu_1^k < \nu_1^k < \dots < \mu_{p_k+1}^k < \nu_{p_k+1}^k = t_{4k-2},$$

в которых функция $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$ принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения.

Таким образом, в силу определения числа p_k справедливо неравенство

$$\nu^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c; t_{4k-3}, t_{4k-2}) \geq \pi^{-1}g(\xi_k)(t_{4k-2} - t_{4k-3}),$$

откуда по лемме 13 [6] получаем, что

$$\hat{\nu}^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c) \geq \overline{\lim}_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} g(\xi_k) = g(c).$$

С другой стороны, в лемме 14 [6] установлено, что $\hat{\nu}^-[y_A(\cdot) - c] = g(c)$.

Пусть теперь $c \in (2, 3)$ и $+\infty \in \mathcal{A}$. Тогда по построению для некоторой постоянной $\tilde{M} > 0$ на каждом из отрезков $[t_{4k-1}, t_{4k}]$, $k \in \mathbb{N}$, выполнены оценки $|\dot{y}_A(t)| \leq \tilde{M}k$, $|\ddot{y}_A(t)| \leq \tilde{M}k$, а значит, сужение функции $a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot)$ на объединение указанных отрезков является бесконечно малым при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, для всех достаточно больших k на отрезке $[t_{4k-1}, t_{4k}]$ найдутся точки

$$t_{4k-1} = \mu_1^k < \nu_1^k < \dots < \mu_{n_k+1}^k < \nu_{n_k+1}^k = t_{4k},$$

в которых функция $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$ принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения. Таким образом, в силу определения числа n_k справедливо неравенство

$$\nu^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c; t_{4k-1}, t_{4k}) \geq 2k(t_{4k} - t_{4k-1}),$$

откуда по лемме 13 [6] получаем, что

$$\hat{\nu}^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c) = +\infty.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство основного результата. Пусть $y_A(\cdot)$ – функция, построенная в лемме 3 по заданному суслинскому множеству $\mathcal{A}$. Согласно лемме 12 [6] существует функция $u(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$ и набор функций $\{1, y_A(\cdot), u(\cdot)\}$ является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

Выберем произвольно и зафиксируем $\alpha > 0$. По лемме 1 набор функций $\exp(\exp(\alpha t))$, $\exp(\exp(\alpha t))y_A(t)$, $\exp(\exp(\alpha t))u(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $\bar{a} \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

Положим $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Каждому ненулевому решению

$$y_c(t) = c_1 + c_2 y_A(t) + c_3 u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ поставим в соответствие решение

$$z_c(t) = \exp(\exp(\alpha t))y_c(t) \in \mathcal{S}_*(\bar{a}).$$

Очевидно, что для любого ненулевого набора нули и точки строгой смены знака двух функций y_c и z_c совпадают между собой. Более того, если в некоторой точке функция y_c имеет кратный нуль, то это же верно и для функции z_c и наоборот. Следовательно, справедливы равенства

$$\hat{\nu}^\gamma(y_c) = \hat{\nu}^\gamma(z_c), \quad \gamma \in \{-, 0, +\}. \quad (5)$$

Покажем, что верхний сильный показатель колеблемости знаков $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c)$ всякого ненулевого решения $z_c \in \mathcal{S}_*(\bar{a})$ совпадает с верхней частотой Сергеева знаков $\hat{\nu}^-(y_c)$ соответствующего решения $y_c \in \mathcal{S}_*(a)$. Из очевидного неравенства $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}^-(z_c)$ и (5) вытекает неравенство $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}^-(y_c)$. Установим обратное неравенство.

Пусть $c_3 \neq 0$. Тогда для любого решения y_c найдётся момент времени $t(c)$, начиная с которого функция y_c будет отлична от нуля. Поэтому выполняется цепочка равенств

$$0 = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\nu}^-(z_c) = \hat{\nu}^-(y_c) = 0. \quad (6)$$

При $c_3 = 0$ для скалярного произведения $\langle \psi z_c(t), m \rangle$ имеем представление

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{\exp(\exp(\alpha t))} &= m_1(c_1 + c_2 y_A(t)) + m_2(\alpha e^{\alpha t}(c_1 + c_2 y_A(t)) + c_2 \dot{y}_A(t)) + \\ &+ m_3((\alpha^2 e^{2\alpha t} + \alpha^2 e^{\alpha t})(c_1 + c_2 y_A(t)) + 2\alpha e^{\alpha t} c_2 \dot{y}_A(t) + c_2 \ddot{y}_A(t)). \end{aligned}$$

1. Если $m_3 \neq 0$, то указанное скалярное произведение принимает вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_3(\alpha e^{2\alpha t} + \alpha^2 e^{\alpha t}) \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_A(t) + a_2(t) \ddot{y}_A(t),$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{0, 2}$, экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

2. Если $m_2 \neq 0$, $m_3 = 0$, то скалярное произведение представимо в виде

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_2 \alpha e^{\alpha t} \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_A(t),$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{0, 1}$, экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

3. Если $m_2 = m_3 = 0$, то скалярное произведение примет вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_1 \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t).$$

Во всех случаях 1–3 выше если $c_2 = 0$, то, начиная с некоторого момента $t(c)$, функция y_c будет отлична от нуля, поэтому справедливы равенства (6). Если $c_2 \neq 0$, то в силу леммы 3 имеем $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \geq \hat{\nu}^-(y_c)$. Таким образом, равенство $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\nu}^-(y_c)$ установлено для всех $c \in \mathbb{R}_*^3$. Из этого равенства, леммы 3 и определений 3 и 4 для любого $c \in \mathbb{R}_*^3$ получаем соотношения

$$\hat{\nu}^-(y_c) = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}_\bullet^\gamma(z_c) \leq \hat{\nu}^\gamma(z_c) = \hat{\nu}^\gamma(y_c) = \hat{\nu}^-(y_c), \quad \gamma \in \{-, 0, +\}.$$

Следовательно, спектры верхних сильных показателей колеблемости и верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней уравнения $\bar{a}$ совпадают со спектром верхней частоты Сергеева знаков уравнения a . Последний, в силу леммы 3, есть в точности множество $\mathcal{A}$. Теорема доказана.

Заключение. Полученный результат усиливает и обобщает теорему 9 работы [6] на большее число разновидностей характеристик колеблемости.

Автор выражает благодарность И.Н. Сергееву за обсуждение результатов и доценту В.В. Быкову за ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
2. *Сташ А.Х.* О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22.
3. *Сташ А.Х.* О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (12). С. 9–17.
4. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.
5. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320.
6. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609.
7. *Войделевич А.С.* О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.
8. *Быков В.В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.
9. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
10. *Сергеев И.Н.* Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.
11. *Сергеев И.Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577.
12. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
13. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М., 1966.
14. *Филлипов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.
15. *Войделевич А.С.* Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 17–23.
16. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

Адыгейский государственный университет,
г. Майкоп

Поступила в редакцию 24.12.2022 г.
После доработки 05.04.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.