ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 582–587

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОТРЕЗКЕ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

© 2023 г. И. С. Ломов

Исследована первая краевая задача для дифференциального оператора второго порядка с сингулярным коэффициентом на отрезке с условиями сопряжения в его внутренней точке. Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений как прямого, так и сопряжённого операторов. Установлены полнота и безусловная базисность систем собственных функций этих операторов в пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке. Применён метод Ильина и условия Ильина для установления справедливости неравенства Бесселя.

DOI: 10.31857/S0374064123050023, EDN: CWLBJG

К 95-летию выдающегося математика
Владимира Александровича Ильина

1. Постановка задачи. Изучим спектральные свойства следующей модельной задачи:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,1/2)\bigcup(1/2,1), \tag{1}$$

$$y(0)=y(1)=0,\quad y[1/2]=0,\quad y'[1/2]=y'(0) \tag{2}$$

на множестве функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на каждом компакте из интервалов $(0,1/2)$ и $(1/2,1)$ и принадлежащих классу $\mathcal{L}^2(G)$ – функций, интегрируемых с квадратом на множестве $G=(0,1)$. Здесь $y[1/2]=y(1/2+0)-y(1/2-0)$ – скачок функции $y(x)$ в точке $x=1/2$, $q(x)$ – комплекснозначная функция из весового класса

$$\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)=\left\{f(x):\int\limits_0^1 x^{1-\varepsilon}|f(x)|\,dx<\infty\right\}$$

для некоторого числа $\varepsilon\in(0,1]$.

Через L обозначим оператор, действующий в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$, порождённый дифференциальной операцией $ly=-y''+q(x)y$, $x\in G$, краевыми условиями и условиями сопряжения (2). Исследуем спектральные свойства оператора L.

В работе [1] доказана весьма общая теорема о безусловной базисности в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ системы корневых функций нагруженного сингулярного дифференциального оператора второго порядка. Оператор определён на множестве функций, которые сами или их производные могут иметь разрывы первого рода на отрезке $\overline{G}=[0,1]$, возможно, в счётном числе точек. Такие операторы возникают, например, как сопряжённые к операторам с интегральными условиями [2, с. 13]. В случае оператора Шрёдингера, как в данной работе, потенциал $q(x)$ принадлежал классу функций $\mathcal{L}^{1,\varrho}(G)$, т.е. $\varrho(x)q(x)\in\mathcal{L}^1(G)$, где через $\varrho(x)$ обозначено расстояние от точки x до границы интервала G; очевидно, справедливо вложение $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)\subset\subset\mathcal{L}^{1,\varrho}(G)$ для любого значения $\varepsilon\in(0,1]$. Корневые функции понимаются в обобщённом по Ильину смысле [3, с. 347]. Теорема о безусловной базисности, доказанная в работе [1], носит условный характер: результат доказан при выполнении “условий Ильина”, которые будут сформулированы ниже.

В статье [4] рассмотрена задача (1), (2) с потенциалом $q(x) = x^{-3/2}$. Показано, что выполняются условия Ильина и для этой задачи справедлива теорема о безусловной базисности системы корневых функций. Цель настоящей работы – распространить этот результат на задачу (1), (2) с произвольным потенциалом из класса $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$, $\varepsilon \in (0,1]$.

Приведём несколько работ, в которых также исследованы спектральные свойства операторов с сингулярными коэффициентами. Краевая задача для уравнения (1) с потенциалом $q(x)$ из класса $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$, где $\varepsilon \in (1/2,1]$, исследована в работе [5], а именно рассмотрены гладкие на интервале G решения, получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений соответствующего оператора, решена обратная задача по нахождению потенциала. Некоторые идеи из этой статьи будут использованы для получения оценок решения задачи (1), (2). Л.В. Крицковым [6] исследована краевая задача для уравнения (1) с потенциалом из класса $\mathcal{L}^{1,\varrho}(G)$, рассмотрены гладкие на интервале G решения, при выполнении условий Ильина доказана теорема о безусловной базисности в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ системы корневых функций оператора, изучена задача с более общими потенциалами, например с дельта-функцией. В цикле работ А.А. Шкаликова, А.М. Савчука и И.В. Садовничей исследованы спектральные свойства оператора Шрёдингера с потенциалом, являющимся производной от функции из класса $\mathcal{L}^2(G)$ (см., например, [7, 8]). Оператор рассмотрен на множестве гладких функций.

2. Основная теорема. Рассмотрим систему собственных функций $\{u_n(x)\}$ и соответствующих им собственных значений $\{\lambda_n\}$ задачи (1), (2). Обозначим $\mu^2 = \lambda$, $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $\nu = |\operatorname{Im}\mu|$, $\mu_n^2 = \lambda_n$, $\operatorname{Re}\mu_n \geqslant 0$, $\nu_n = |\operatorname{Im}\mu_n|$; $\{v_n(x)\}$ – система собственных функций сопряжённого оператора L^*, биортогонально сопряжённая к системе $\{u_n(x)\}$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть потенциал* $q(x) \in \mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$ *для некоторого числа* $\varepsilon \in (0,1]$. *Тогда корневые функции операторов* L *и* L^* *образуют безусловный базис в пространстве* $\mathcal{L}^2(G)$, *а нормированные системы* $\{\hat{u}_n(x)\}$, $\{\hat{v}_n(x)\}$ *образуют базис Рисса в этом пространстве.*

Доказательство теоремы основано на применении известной теоремы Бари о базисах [9]: *если почти нормированные биортогональные системы полны в пространстве* $\mathcal{L}^2(G)$ *и для каждой из них выполняется неравенство Бесселя, то каждая из этих систем образует базис Рисса в пространстве* $\mathcal{L}^2(G)$ (т.е. безусловный почти нормированный базис).

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение следующих условий (*условий Ильина*):

1) системы $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ полны и минимальны в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$;

2) найдутся постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что справедливо

$$|\operatorname{Im}\mu_n| \leqslant c_1, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{0 \leqslant |\mu_n| - \lambda \leqslant 1} 1 \leqslant c_2 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0; \tag{3}$$

3) найдётся постоянная c_3 такая, что справедливо

$$\|u_n\|_2 \|v_n\|_2 \leqslant c_3, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_2$ обозначает норму в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$.

Для проверки условий 2) и 3) достаточно использовать асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи (1), (2) и сопряжённой задачи.

3. Доказательство теоремы.

3.1. Выведем асимптотические формулы для собственных функций операторов L и L^*.

Запишем задачу, сопряжённую к задаче (1), (2):

$$-v''(x) + \overline{q}(x)v(x) = \overline{\lambda}v(x), \quad x \in G, \tag{5}$$

$$v(0) + v(1/2) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v[1/2] = v'[1/2] = 0, \tag{6}$$

рассматриваемую на множестве функций, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на любом компакте из интервала G.

Оператор L^* действует в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$, порождается дифференциальной операцией $l^*v = -v'' + \overline{q}(x)v$, $x \in G$, и условиями (6).

Обозначим $\widetilde{q}(x) = x^{1-\varepsilon}q(x)$ для $\varepsilon \in (0,1]$, $\overline{\mu}^2 = \overline{\lambda}$, $\operatorname{Re}\overline{\mu} \geqslant 0$.

Для решений задач (1), (2) и (5), (6) автором были установлены асимптотические формулы.

Лемма 1. *Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$ для некоторого числа $\varepsilon \in (0,1]$. Тогда для решения задачи (1), (2) справедливы следующие соотношения:*

$$y(x,\mu) = \frac{\sin\mu x}{\mu} + e^{\nu}O\left(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad |y(x,\mu)| \leqslant \frac{x^{1-\varepsilon}}{|\mu|^{\varepsilon}}e^{\nu+\|\widetilde{q}\|_1}, \quad x \in [0,1/2], \tag{7}$$

$$y(x,\mu) = \frac{\sin\mu x}{\mu} + \frac{\sin\mu(x-1/2)}{\mu} + y_0(x,\mu) + e^{3\nu}O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \tag{8}$$

$$|y(x,\mu)| \leqslant \frac{2+c_q}{|\mu|}e^{2(\nu+\|\widetilde{q}\|_1)}, \quad x \in (1/2,1], \quad c_q = \|\widetilde{q}\|_1 e^{\|\widetilde{q}\|_1},$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве $\mathcal{L}^1(G)$,

$$y_0(x,\mu) = \int\limits_0^{1/2} \frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}q(t)y(t)\,dt, \quad |y_0(x,\mu)| \leqslant \frac{c_q e^{\nu}}{|\mu|^{1+\varepsilon}}, \quad x \in [0,1].$$

Для решения задачи (5), (6) имеет место равенство

$$v(x,\mu) = \frac{\sin\overline{\mu}(1-x)}{\overline{\mu}} + e^{\nu}O\left(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \in [0,1]. \tag{9}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \geqslant 1$, оценки $O(\cdot)$ в правой части равенств равномерны по x.

Подставив в задачи (1), (2) и (5), (6) вместо λ собственные значения λ_n оператора L, получим, что для собственных функций $u_n(x)$ имеют место формулы (7), (8), где следует заменить μ на μ_n, ν на ν_n.

Для получения асимптотической формулы для собственных функций $v_n(x)$ оператора L^* заменим в формуле (9) μ на μ_n и умножим обе части на постоянную c_n, которая выбирается так, чтобы выполнялось равенство $(u_n, v_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Если имеет место первое из условий (3): $\nu_n \leqslant c_1$, $n \in \mathbb{N}$, то из полученных соотношений для функций $u_n(x)$, $v_n(x)$ следует выполнение неравенства (4). При этом системы $\{\mu_n u_n(x)\}$ и $\{\mu_n^{-1}v_n(x)\}$ будут почти нормированными.

3.2. Получим асимптотические формулы для спектральных чисел μ_n. Решением уравнения $y(1,\mu) = 0$ являются собственные значения оператора L. В процессе вывода формулы (8) была найдена оценка

$$\left|y(x,\mu) - \frac{\sin\mu x}{\mu} - \frac{\sin\mu(x-1/2)}{\mu}\right| < \frac{c_q}{|\mu|^{1+\varepsilon}}[e^{\nu x} + e^{\nu(x-1/2)}]$$

при $x \in (1/2,1]$. Положив в этой оценке $x = 1$, имеем

$$\left|y(1,\mu) - \frac{\sin\mu}{\mu} - \frac{\sin(\mu/2)}{\mu}\right| < \frac{c_q}{|\mu|^{1+\varepsilon}}[e^{\nu} + e^{\nu/2}]. \tag{10}$$

Оценим экспоненты в правой части (10) через те же синусы, что находятся в левой части этого неравенства. Для этого применим к нашему случаю доказательство следующей леммы.

Лемма 2 [10, с. 27]. *Пусть числа $z \in \mathbb{C}$ и $|z-\pi n| \geqslant \pi/4$ для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда справедливо неравенство* $\exp|\operatorname{Im} z| < 4|\sin z|$.

Получим соотношение

$$e^{\nu}+e^{\nu/2}\leqslant 2e^{\nu}=2e^{3\nu/4}e^{\nu/4}<60|\sin(3\mu/4)||\cos(\mu/4)|=$$
$$=60|\sin(3\mu/4)\cos(\mu/4)|=30|\sin\mu+\sin(\mu/2)|, \tag{11}$$

справедливое для всех значений μ, удовлетворяющих неравенству $|\mu-6\pi n|>3\pi/6$, $n\in\mathbb{N}$.

Для достаточно больших чисел $|\mu|$ из неравенств (10), (11) имеем

$$\left|y(1,\mu)-\frac{\sin\mu}{\mu}-\frac{\sin(\mu/2)}{\mu}\right|<\frac{c}{|\mu|^{\varepsilon}}\left|\frac{\sin\mu}{\mu}+\frac{\sin(\mu/2)}{\mu}\right|<\left|\frac{\sin\mu}{\mu}+\frac{\sin(\mu/2)}{\mu}\right|.$$

Рассмотрим на комплексной μ-плоскости контуры C_n: $|\mu-6\pi n|=3\pi$ (для достаточно больших чисел n), и функции

$$f(\mu)=\frac{\sin\mu}{\mu}+\frac{\sin(\mu/2)}{\mu},\quad g(\mu)=y(1,\mu)-\frac{\sin\mu}{\mu}-\frac{\sin(\mu/2)}{\mu}.$$

Эти функции аналитичны внутри областей, ограниченных контурами C_n, на самих контурах C_n они непрерывны и удовлетворяют условию $|f(\mu)|>|g(\mu)|$. Тогда по теореме Руше функции $f(\mu)$ и $f(\mu)+g(\mu)=y(1,\mu)$ имеют внутри областей, ограниченных контурами C_n, одинаковое число нулей.

Функция $f(\mu)$ имеет простые нули $2\pi(2n-1)$, $n\in\mathbb{N}$, $2\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, и $-2\pi/3+ 2\pi n$, $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, где учтено условие $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$. Получаем асимптотические формулы для спектрального параметра:

$$\mu_{1n}=2\pi(2n-1)+O(1),\quad \mu_{2n}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n+O(1),\quad \mu_{3n}=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n+O(1),\quad n\geqslant N>1.$$

Из этих формул, в частности, следует, что найдётся постоянная $c_1>0$ такая, что $|\operatorname{Im}\mu_n|= =|\nu_n|\leqslant c_1$ для всех значений $n\in\mathbb{N}$.

Использовав равенство (8), оценку леммы 1 для функции $y_0(x,\mu)$ и равенство $y(1,\mu)=0$, получим соотношение

$$\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\sin(\mu_n/2)}{\mu_n}=O\left(\frac{1}{\mu_n^{\varepsilon}}\right)=O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right),$$

которое позволит уточнить асимптотические формулы для чисел μ_{in} для всех достаточно больших значений n:

$$\mu_{1n}=2\pi(2n-1)+O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right),\quad \mu_{2n}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n+O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right),\quad \mu_{3n}=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n+O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right).$$

Из полученных соотношений следует справедливость неравенств (3).

3.3. Докажем полноту систем $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$. Для обеих систем схема доказательства одинаковая (см. [11]). Изложим её для оператора L^*.

Рассмотрим функцию $f(x)\in\mathcal{L}^2(G)$ такую, что $(f,v_n)=0$ для всех чисел n. Требуется доказать, что $f(x)=0$ в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$.

Пусть числа $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu\neq\mu_n$. Ищем решение задачи

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\mu^2y(x)+f(x),\quad y(0)+y(1/2)=0,\quad y(1)=0. \tag{12}$$

Методом вариации произвольных постоянных получаем решение в следующем виде:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{2}c_jy_j(x)+\int\limits_0^x f(\xi)\frac{y_1(x)y_2(\xi)-y_1(\xi)y_2(x)}{y_1'(\xi)y_2(\xi)-y_1(\xi)y_2'(\xi)}d\xi,\quad x\in\overline{G},$$

где $\{y_j(x)\}$ – фундаментальная система решений уравнения. Для функций $y_j(x)$ выводим асимптотические формулы

$$y_1(x,\mu)=\frac{\sin\mu x}{\mu}+e^{\nu x}O\biggl(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\biggr),\quad y_2(x,\mu)=\cos\mu x+\operatorname{ch}(\nu x)o(1),\quad x\in\overline{G}.$$

Подставляя эти формулы в систему уравнений, после преобразований приходим к неравенству $|\mu y(x)|\leqslant c$ при $\operatorname{Im}\mu<0$ на лучах, не содержащих собственных значений. Применяем теорему Фрагмена–Линделёфа и получаем из уравнения (12), что функция $f(x)=0$ на $\overline{G}$. Это доказывает полноту в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ системы собственных функций оператора L^*.

Минимальность этой системы в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ следует из существования биортогонально сопряжённой системы функций.

3.4. Осталось доказать справедливость неравенства Бесселя для каждой из рассматриваемых систем функций. Рассмотрим схему доказательства с помощью метода В.А. Ильина, подробно изложенного в монографии [2, с. 72–85] для более общего оператора, но при условии $q(x)\in\mathcal{L}^1(G)$, в наших обозначениях.

Требуется доказать, что для любой функции $f(x)\in\mathcal{L}^2(G)$ найдутся положительные постоянные c_1, c_2 такие, что будут справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\hat{v}_n)|^2\leqslant c_1\|f\|_2^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|(f,u_n)|^2\leqslant c_2\|f\|_2^2, \tag{13}$$

где $\hat{v}_n=v_n(x)\|v_n\|_2^{-1}$ – нормированные функции.

Интегральное представление для собственных функций имеет вид

$$u_n(x)=u_n(0)\cos\mu_n x+\frac{1}{\mu_n}u_n'(0)\sin\mu_n x-\frac{1}{\mu_n}\int\limits_0^x q(\tau)u_n(\tau)\sin\mu_n(x-\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Умножим скалярно это равенство на функцию $g(x)=\overline{f}(x)$ и докажем справедливость второго неравенства (13) для каждого слагаемого из представления (14). Для первых двух слагаемых это сделано в [2, с. 74–81]. Докажем справедливость неравенства для третьего слагаемого в формуле (14):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\mu_n|^2}\biggl|\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x q(\tau)u_n(\tau)\sin\mu_n(x-\tau)\,d\tau\,dx\biggr|^2\leqslant c\|f\|_2^2. \tag{15}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского $|(u_n,f))|\leqslant\|u_n\|_2\|f\|_2$ и условия (3), получаем

$$\sum_{|\mu_n|\leqslant 1}|(u_n,f)|^2\leqslant c\|f\|_2^2\sum_{|\mu_n|\leqslant 1}1\leqslant cc_2\|f\|_2^2$$

и убеждаемся в том, что (15) достаточно установить для чисел μ_n, $|\mu_n|>1$. Применив оценку (7) из леммы 1

$$|u_n(x)|\leqslant\frac{x^{1-\varepsilon}}{|\mu_n|^{\varepsilon}}e^{\nu_n+\|\widetilde{q}\|_1},\quad x\in[0,1/2],\quad |\mu_n|>1,$$

неравенство Коши–Буняковского и первое условие (3), получим

$$|\mu_n|^{-2}\biggl|\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x q(\tau)u_n(\tau)\sin\mu_n(x-\tau)\,d\tau\,dx\biggr|^2\leqslant c|\mu_n|^{-2}\|\widetilde{q}\|_1^2\|g\|_2^2\leqslant c|\mu_n|^{-2}\|f\|_2^2.$$

Используя второе условие (3) для последовательности $\{\mu_n\}$, установим сходимость ряда с общим членом $|\mu_n|^{-2}$:

$$\sum_{|\mu_n|>1} |\mu_n|^{-2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n\leqslant|\mu_n|\leqslant n+1} |\mu_n|^{-2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n\leqslant|\mu_n|\leqslant n+1} 1 \leqslant c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Этим завершено доказательство второго неравенства (13). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белянцев О.В.* Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1011–1020.
2. *Ломов И.С.* Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряжённые операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений. М., 2019.
3. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
4. *Белянцев О.В., Ломов И.С.* О свойстве базисности корневых функций одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1187–1189.
5. *Жорницкая Л.А., Серов В.С.* Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2125–2134.
6. *Крицков Л.В.* Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990.
7. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
8. *Садовничая И.В.* Равносходимость в пространствах Соболева и Гёльдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Докл. РАН. 2011. Т. 437. № 2. С. 162–163.
9. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69–107.
10. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. Boston; Orlando; San Diego; New York; Austin; London; Sydney; Tokyo; Toronto, 1987.
11. *Ломов И.С.* Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 358–365.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.
После доработки 01.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.