ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 531–553

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+517.929

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© 2023 г. А. В. Метельский

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы с соизмеримыми запаздываниями обоснованы алгоритмы построения регуляторов, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию данной системы. Отличительная черта предложенного подхода в том, что не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы. Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064123040106, EDN: ANUSHI

Введение. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih)+\sum_{i=0}^{m}b_iu(t-ih),\quad t>0. \tag{1}$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}$ – n-вектор решения системы (1) $(n\geqslant 2)$; знак $^{\mathrm{т}}$ означает операцию транспонирования; u – скалярное управление; $h>0$ – заданное число (запаздывание); A_i – постоянные матрицы $(m\geqslant 1)$; b_i – постоянные столбцы; $x(t)$, $u(t)$, $t<0$, – кусочно-непрерывные функции.

Обозначим $A(\lambda)=A_0+A_1\lambda+\ldots+A_m\lambda^m$ $(\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), E_n – единичная матрица n-го порядка, $W(p,e^{-ph})=pE_n-A(e^{-ph})$ – характеристическая матрица $(p\in\mathbb{C})$, $w(p,e^{-ph})=|W(p,e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином однородной $(u=0)$ системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Множество корней $\sigma=\{p\in\mathbb{C}: w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения с учётом их кратностей называют *спектром системы* (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p,e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряжёнными парами.

Задача асимптотической стабилизации заключается в замыкании системы (1) обратной связью по состоянию, обеспечивающей замкнутой системе спектр с отрицательными действительными частями (асимптотически устойчивый спектр). В данной работе задача асимптотической стабилизации решается посредством динамического регулятора.

Рассмотрены также задачи финитной и полной стабилизации замкнутой системы. Под *финитной стабилизацией* понимается полное успокоение [1, с. 358] системы (1) (обнуление фазовых переменных), замкнутой регулятором, за конечное время. Полная стабилизация предполагает финитную стабилизацию системы (1) с одновременной асимптотической стабилизацией замкнутой системы.

Обозначим $b(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\ldots+b_m\lambda^m$. Система (1) называется *спектрально управляемой*, если

$$\operatorname{rank}[pE_n-A(e^{-ph}),b(e^{-ph})]=n,\quad p\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Это условие является достаточным для асимптотической стабилизации, а также необходимым и достаточным для финитной и полной стабилизации системы (1). Задачи финитной и полной стабилизации системы (1) решаются в данной работе через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение).

Основу одного из направлений асимптотической стабилизации [2–4] системы с запаздыванием образует задача FSA (finite spectrum assignment) – назначения замкнутой системе произвольного конечного спектра [5–7], в частности, асимптотически устойчивого. Задача приведения системы запаздывающего типа к некоторому конечному (не произвольному) спектру рассмотрена в статье [8]. Перечисленные задачи известны как задачи управления спектром дифференциальной системы. Они обобщены задачей модальной управляемости [9, 10], которая заключается в назначении замкнутой системе наперёд заданного характеристического квазиполинома с действительными коэффициентами.

Задача стабилизации систем с последействием и связанные с ней задачи управления спектром образуют ядро математической теории управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями. Исследованию финитной стабилизации линейных автономных систем с запаздыванием посвящены работы [11–14]. Задача полного успокоения систем неполного ранга в классе программных управлений изучена в статьях [11, 12]. В статьях [13, 14] построены динамические регуляторы для систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений с последействием. Исследуемые задачи различаются определениями стабилизации, используемыми регуляторами (статическими [4, 6, 10] и динамическими [13, 14]), типом системы управления (запаздывающий [4, 11–14], нейтральный [5, 9], дифференциально-алгебраический [14]), характером запаздываний (сосредоточенные запаздывания, как у системы (1), или распределённые [4, 7, 10], кроме того, запаздывания могут быть соизмеримыми и несоизмеримыми [10]) и т.д.

Как и в работах [7, 9, 15], для построения обратных связей, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию системы (1), используется вспомогательная функция $K(p,\lambda)$ (см. ниже (14), (48)), позволяющая указать линейный алгоритм замыкания системы в терминах стандартных операций над полиномами и полиномиальными матрицами.

1. Модальная управляемость и FSA-регулятор. Построим динамический регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) заданный характеристический квазиполином

$$d(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n+1}\gamma_i(\lambda)p^{n+1-i},\quad \lambda=e^{-ph},\tag{3}$$

где $\gamma_0(\lambda)=1$, $\gamma_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, – полиномы с действительными коэффициентами, тем самым решим задачу модальной управляемости для системы (1). Выбрав в качестве квазиполинома полином, имеющий корни с отрицательными действительными частями, получим для системы (1) асимптотический стабилизатор.

Замечание 1. Квазиполином вида (3), т.е. монический полином со старшим членом $p^{\tilde n}$ и с коэффициентами от λ, будем называть *квазиполиномом запаздывающего типа степени* $\tilde n$.

Пусть в системе (1) $A(\lambda)=[a_{ij}(\lambda)]$, $b(\lambda)=(b_1(\lambda),\ldots,b_n(\lambda))^{\mathrm{т}}$. Запишем матрицу

$$F_\varphi(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p-a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p-a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda)\\ \varphi_1(\lambda) & \ldots & \varphi_{n-1}(\lambda) & \varphi_n(\lambda) & \varphi_{n+1}(p,\lambda)\end{bmatrix},\quad p,\lambda\in\mathbb{C},$$

последняя строка которой образована полиномами с действительными коэффициентами, которые будут определены далее.

Рассмотрим алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda)=(M_1(p,\lambda),\ldots,M_n(p,\lambda),M_{n+1}(p,\lambda))^{\mathrm{т}},\quad M_{n+1}(p,\lambda)=w(p,\lambda).\tag{4}$$

При выполнении условия (2) система полиномиальных уравнений

$$M_i(p,\lambda)=0,\quad (p,\lambda)\in\mathbb{C}^2,\quad i=\overline{1,n+1},\tag{5}$$

относительно переменных p, λ может иметь лишь конечное [15] (в частности, пустое) множество решений. Поэтому редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda>p$) для системы полиномов (4) обязательно содержит полином $d_0(p)$ с действительными коэффициентами, множество корней которого обозначим

$$P_0=\{p_k\in\mathbb{C}: d_0(p_k)=0,\ \ k=\overline{1,\mu}\}.$$

Старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен единице. В частности, возможно, что $d_0(p) = 1$ и тогда $P_0 = \varnothing$.

По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином

$$\widetilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(p,\lambda) = (\widetilde{\varphi}_1(p,\lambda), \ldots, \widetilde{\varphi}_{n+1}(p,\lambda))$$

такой, что справедливо разложение

$$\widetilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(p,\lambda)M(p,\lambda) = d_0(p). \tag{6}$$

Пусть $\nu = \deg d_0(p) \geqslant 0$ и $r = \nu - n$. Согласно [15] равенство (6) можно преобразовать к виду

$$(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p,\lambda))M(p,\lambda) = d_0(p). \tag{7}$$

Здесь $\varphi_{n+1}(p,\lambda) = \sum_{j=0}^{r} \breve{\varphi}_j(\lambda)p^j$, $\breve{\varphi}_r(\lambda) = 1$, если $r \geqslant 0$; $\varphi_{n+1}(p,\lambda) = 0$, если $r < 0$. Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$; $\breve{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{0,r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (7). Разложение (7) можно также получить через построение базиса Грёбнера или с помощью алгоритма Евклида, рассматривая полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n+1}$, как полиномы от λ с дробно-рациональными коэффициентами, зависящими от p. В таком случае полином $d_0(p)$ кроме значений $p_k \in P_0$ может иметь и другие корни.

Замечание 2. В силу системы (5) значения $p_k \in P_0$ войдут в состав корней всякого полинома $\hat{d}_0(p)$, полученного из равенства

$$(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p,\lambda))M(p,\lambda) = \hat{d}_0(p) \tag{8}$$

при подходящем выборе векторного полинома $(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{n+1}(p,\lambda))$. Поэтому значения $p_k \in P_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $d_0(p)$ – *инвариантным полиномом*. Равенство вида (8) будет осуществимо и в случае нарушения условия (2) в конечном множестве точек $p \in \mathbb{C}$. Это следует также из теоремы Гильберта о нулях, применённой к системе полиномов (4).

Равенство (7) равносильно следующему:

$$|F_\varphi(p,\lambda)| = d_0(p).$$

Замечание 3. При построении искомого регулятора используется требование: различным корням p_i полинома $d_0(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Если набор корней полинома $d_0(p)$ содержит комплексно-сопряжённую пару инвариантных спектральных значений $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ такую, что $\sin(\beta h) = 0$, то $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Для решения данной ситуации введём в регуляторе “дробные” запаздывания: $\omega = h/k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда матрица системы (1) примет вид

$$A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^k + \ldots + A_m\lambda^{km}.$$

Натуральное k можно выбрать так, чтобы $\sin(\beta h/k) \neq 0$ для всех пар $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Тогда различным значениям $p_i \in P_0$ будут соответствовать разные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Считаем далее это требование выполненным.

Введём матрицу

$$F_\psi(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) \\ \psi_1 & \ldots & \psi_n & \psi_{n+1} \end{bmatrix},$$

где $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n+1})$ – действительный вектор, образованный числами или полиномами. Её определитель $\Delta(p,\lambda) = |F_\psi(p,\lambda)|$, очевидно, равен

$$\Delta(p,\lambda) = M_1(p,\lambda)\psi_1 + \ldots + M_n(p,\lambda)\psi_n + M_{n+1}(p,\lambda)\psi_{n+1}. \tag{9}$$

Справедлива

Лемма [15, лемма 1]. *При выполнении условия (2) для произвольного набора чисел* $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, \ \ i = \overline{1,\mu}\}$ *найдётся действительный вектор* $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n+1})$ *такой, что*

$$\Delta(p_i, e^{-p_ih}) = M_1(p_i, e^{-p_ih})\psi_1 + \ldots + M_n(p_i, e^{-p_ih})\psi_n + M_{n+1}(p_i, e^{-p_ih})\psi_{n+1} \neq 0, \quad p_i \in P_0. \tag{10}$$

Таким образом, вектор Ψ можно получить, исходя из (10), как указано в работе [15] при доказательстве леммы 1, и затем записать полином $\Delta(p,\lambda)$ согласно (9) (см. ниже пример 3).

Замечание 4. В работе [15] в лемме 1 взято $\psi_{n+1} = 1$, хотя, как очевидно из приведённого там доказательства, это необязательно. Полином $\Delta(p,\lambda)$, удовлетворяющий условию (10), можно строить и с полиномиальными коэффициентами:

$$\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda), \ldots, \psi_{n+1}(p,\lambda)).$$

В частности, в качестве полинома $\Delta(p,\lambda)$, удовлетворяющего условию (10), можно брать элементы базиса Грёбнера для системы полиномов (4) или их линейные комбинации. Соответствующий выбранному полиному $\Delta(p,\lambda)$ набор коэффициентов $\Psi(p,\lambda)$ можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (9) (см. ниже примеры 1, 2).

При построении регулятора модальной управляемости системы (1) будем оперировать характеристической матрицей $(\lambda = e^{-ph})$ замкнутой системы

$$\widetilde{A}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) \\ g_1(p,\lambda) & \ldots & g_n(p,\lambda) & g_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

которую для краткости будем называть системой (11). Регулятор, обеспечивающий замкнутой системе характеристический квазиполином (3), задаётся последней строкой, где $g_i(p,\lambda)$ – линейные комбинации полиномов и дробно-рациональных функций. Вид этих функций конкретизируется в зависимости от решаемой задачи (см. далее теоремы 1–3 и примеры 1–3).

Убрать из конечного спектра замкнутой системы инвариантные спектральные значения $p_k \in P_0$ в классе регуляторов с сосредоточенными запаздываниями не представляется возможным (см. замечание 2), поэтому в регулятор добавлены распределённые запаздывания. Как следствие, в (11) $g_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, – функции, содержащие полиномы относительно p, λ и члены вида

$$\tilde{g}(p,\lambda) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i=0}^{l_k} \tilde{f}_{ki}(\lambda) \int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s} \frac{s^i}{i!}\, ds \tag{12}$$

с полиномиальными коэффициентами $\tilde{f}_{ki}(\lambda)$; p_k, $k = \overline{1,\mu}$, – различные корни полинома $d_0(p)$, l_k – их алгебраические кратности.

В операторной записи уравнений системы (11) λ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования: $p^i\lambda^j x_k(t) = x_k^{(i)}(t - jh)$ $(i, j \geqslant 0$ – целые числа). Интегралам вида (12) соответствуют члены с распределённым запаздыванием:

$$\lambda^l \int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s} s^i\, ds\, x_j(t) = \int\limits_0^h e^{p_k s} s^i x_j(t - lh - s)\, ds$$

$(i, l \geqslant 0$ – целые числа). После применения к членам с комплексно-сопряжёнными $p_{k_{1,2}}$ формулы Эйлера все коэффициенты системы (11) должны быть действительными величинами.

Вычисляя интегралы вида (12), получаем целые дробно-рациональные функции $(\lambda = e^{-ph}$, $\lambda_k = e^{-p_k h})$:

$$\int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s} \frac{s^i}{i!}\, ds = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{d^i}{dp^i} \frac{(\lambda - \lambda_k)}{\lambda_k(p - p_k)}, \quad i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{13}$$

Именно в терминах таких функций будем конструировать векторный полином $(g_1(p,\lambda),\ldots$ $\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))$.

Введём функцию [15]

$$K(p,\lambda)=-(q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p,\lambda)). \tag{14}$$

Здесь $q(\lambda)$ – полином с действительными коэффициентами; полином $\Delta(p,\lambda)=\Psi M(p,\lambda)$ и вектор $\Psi=(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ описаны выше в соотношениях (9), (10); $d(p,\lambda)$ – желаемый квазиполином $(\lambda=e^{-ph})$ замкнутой системы (11).

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (11) имела заданный характеристический квазиполином $d(p,e^{-ph})$ вида (3), достаточно:*

1) найти полиномы $d_0(p)$, $\Phi(p,\lambda)$, $\Delta(p,\lambda)$ и вектор Ψ из условий (7), (10) соответственно;

2) выбрать полином $q(\lambda)$ так, чтобы функция

$$f(p,\lambda)=K(p,\lambda)/d_0(p) \tag{15}$$

при $\lambda=e^{-ph}$ была целой $(p\in\mathbb{C})$;

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi. \tag{16}$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde{A}(p,\lambda)|$ замкнутой системы (11), (16) по последней строке, получаем

$$|\tilde{A}(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi M(p,\lambda).$$

Ввиду (7), (9), (15) имеем

$$|\tilde{A}(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)d_0(p)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=-K(p,\lambda)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda).$$

Заменив $K(p,\lambda)$ согласно (14), получим требуемый квазиполином

$$|\tilde{A}(p,\lambda)|=-(-(q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p,\lambda)))-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=d(p,\lambda).$$

Теорема доказана.

Если необходимо, систему (11), (16) приводим к нормальной форме. Выполняя элементарные операции над её строками, из функций $g_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, убираем полиномы относительно переменной p. Для этого выбираем среди первых n элементов последней строки матрицы (11) элемент (пусть его номер i_0), содержащий одночлен $p^{m_1}\xi(\lambda)$ с наибольшей степенью m_1 относительно p. Умножая i_0-ю строку (она содержит одночлен $p-a_{i_0,i_0}(\lambda)$) на $-p^{m_1-1}\xi(\lambda)$ и прибавляя к последней строке, понижаем степень переменной p. Повторяя этот процесс, приведём последнюю строку к виду, где переменная p будет присутствовать в виде одночлена только в $(n+1)$-й позиции. В результате в последней строке получим элементы $\bar{g}_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, включающие полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ. Поскольку старший член квазиполинома $d(p,\lambda)$ относительно p имеет вид p^{n+1}, то функция $g_{n+1}(p,\lambda)$ заменится на функцию $p+\bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$, где $\bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$ имеет тот же вид, что и $\bar{g}_i(p,\lambda)$. Чтобы записать уравнения замкнутой системы, целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12). Эта процедура в развёрнутой форме продемонстрирована в примере 1.

Поясним, как реализовать условие 2) теоремы 1, т.е. как построить полином $q(\lambda)$.

Полином $q(\lambda)$ может быть найден как решение интерполяционной задачи. Напомним, что $P_0=\{p_k\in\mathbb{C}: d_0(p_k)=0,\ \ k=\overline{1,\mu}\}$ – множество различных корней полинома $d_0(p)$, l_k – их алгебраические кратности. Ввиду замечания 3 все числа множества $\Lambda_0 = \{\lambda_k = e^{-p_k h} : p_k \in \in P_0,\ \ k = \overline{1,\mu}\}$ также различны. Условие 2) теоремы 1 равносильно следующему:

$$\frac{d^i}{dp^i}(q(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d(p, e^{-ph}))\bigg|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in P_0, \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1,\mu}. \tag{17}$$

Поскольку выполнено условие 1) теоремы 1, то согласно лемме $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$ при любом $k \in \overline{1,\mu}$. Поэтому при каждом $k = \overline{1,\mu}$ из уравнения (17) найдём

$$q^{(i)}(\lambda_k), \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1,\mu}, \quad \lambda_k = e^{-p_k h} \in \Lambda_0. \tag{18}$$

Для комплексно-сопряжённых чисел $p,\ \bar{p}$ числа $\lambda = e^{-ph},\ \bar{\lambda} = e^{-\bar{p}h}$ также комплексно-сопряжены. Поэтому система (17) для комплексно-сопряжённых пар $\{p_0, \bar{p}_0\} \in P_0$ имеет комплексно-сопряжённые решения

$$(q(\bar{\lambda}_0), q^{(1)}(\bar{\lambda}_0), \ldots, q^{(l_0-1)}(\bar{\lambda}_0)) = (\bar{q}(\lambda_0), \bar{q}^{(1)}(\lambda_0), \ldots, \bar{q}^{(l_0-1)}(\lambda_0)), \quad l_0 \in \{l_k, k = \overline{1,\mu}\}.$$

Окончательно полином $q(\lambda)$ получаем как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра по значениям (18), найденным из системы (17). Согласно [16, с. 110] полином $q(\lambda)$, построенный по интерполяционным значениям (18), будет иметь действительные коэффициенты.

Предложенная схема построения регулятора модальной управляемости не требует знания какой-либо информации о спектре системы (1). Выбрав в качестве $d(p,\lambda)$ произвольный полином $d(p)$ (в частности, можно обеспечить $\operatorname{Re} p < 0$), получим FSA-регулятор системы (1).

2. Построение асимптотического стабилизатора в общем случае. Если при каком-либо значении $p_0 \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{rank}[p_0 E_n - A(e^{-p_0 h}), b(e^{-p_0 h})] < n,$$

то вектор алгебраических дополнений (4) $M(p_0, e^{-p_0 h}) = 0$. Разлагая определитель характеристической матрицы (11) по последней строке, образованной целыми функциями, получаем, что $|\widetilde{A}(p_0, e^{-p_0 h})| = 0$, т.е. значение p_0 остаётся в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с разностными и интегральными членами. Если $\operatorname{Re} p < 0$, то это значение не препятствует асимптотической устойчивости замкнутой системы (11). Отсюда вытекает следующий критерий (см. [2]) асимптотической стабилизируемости системы (1):

$$\operatorname{rank}[pE_n - A(e^{-ph}), b(e^{-ph})] = n, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Множество различных спектральных значений

$$P^+ = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0, \ \ \operatorname{Re} p \geqslant 0\}$$

для однородной системы $(u = 0)$ вида (1) конечно [2].

Замечание 5. Этапы проверки условий (2), (19) приведены в п. 3.

При построении асимптотического стабилизатора рассмотрим три случая.

2.1. Если наряду с условием (19) имеет место условие спектральной управляемости (2), то согласно п. 1 замкнутой системе (11) можно назначить произвольный самосопряжённый спектр (см. теорему 1).

2.2. Рассмотрим случай, когда выполняется условие (19), но спектральное условие (2) нарушается в конечном числе точек $\operatorname{Re} p < 0$. Тогда редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) содержит инвариантный полином $d_0(p)$ с множеством корней

$$P_0 = \{p_k \in \mathbb{C} : d_0(p_k) = 0, \quad k = \overline{1,\mu}\}$$

(см. замечание 2). Полином $d_0(p)$ представим в виде $d_0(p) = \tilde{d}_0(p) d_1(p)$ согласно следующему условию. Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ выполняется условие $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, для корней полинома

$d_1(p)$ – $\mathrm{Re}\, p < 0$. Ввиду критерия асимптотической устойчивости требуется заменить множество корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ (обозначим его $\tilde{P}_0$): $\tilde{P}_0 \subseteq P^+$. Полиномы $\tilde{d}_0(p)$, $d_1(p)$ взаимно просты, так как наборы их корней различны.

Характеристический квазиполином замкнутой системы возьмём в виде

$$d(p, e^{-ph}) = d_1(p) d_2(p, e^{-ph}), \tag{20}$$

где $d_2(p, e^{-ph})$ – произвольный квазиполином запаздывающего типа или полином

$$(d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p)),$$

для всех корней которого $\mathrm{Re}\, p < 0$. За счёт квазиполинома $d_2(p, e^{-ph})$ обеспечим, чтобы степень N характеристического квазиполинома $d(p, e^{-ph})$ была $N \geqslant n+1$.

Замечание 6. Для части корней полинома $d_1(p)$ может быть выполнено равенство

$$\mathrm{rank}\,[pE_n - A(e^{-ph}), b(e^{-ph})] = n. \tag{21}$$

Если степень полинома $d_1(p)$ больше, чем $n+1$, то, взяв $d_2(p, e^{-ph}) = 1$ и включив часть корней полинома $d_1(p)$, для которых имеет место (21), в множество $\tilde{P}_0$ нулей, подлежащих замене, можно понизить степень характеристического полинома $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)$ замкнутой системы. При этом к полиному $\tilde{d}_0(p)$ от полинома $d_1(p)$ добавится множитель, соответствующий этим корням. Если число корней полинома $d_1(p)$ (с учётом кратности), для которых условие (21) не выполняется, больше, чем $n+1$, то степень характеристического полинома $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)$ также будет больше, чем $n+1$.

Модифицируем приведённую выше схему построения асимптотического стабилизатора для данного случая.

Функцию $K(p, \lambda)$ возьмём в виде

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d_2(p, \lambda)). \tag{22}$$

Вектор $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{n+1})$, в частности, векторный полином $\Psi(p, \lambda) = (\psi_1(p, \lambda), \ldots$ $\ldots, \psi_{n+1}(p, \lambda))$ (см. замечание 4), подбираем таким, чтобы

$$\Delta(p_i, \lambda_i) = M_1(p_i, \lambda_i)\psi_1 + \ldots + M_{n+1}(p_i, \lambda_i)\psi_{n+1} \neq 0, \quad \lambda_i = e^{-p_i h}, \quad p_i \in \tilde{P}_0. \tag{23}$$

Это возможно, так как согласно условию (19)

$$(M_1(p_i, \lambda_i), \ldots, M_{n+1}(p_i, \lambda_i)) \neq 0, \quad \lambda_i = e^{-p_i h}, \quad p_i \in \tilde{P}_0. \tag{24}$$

Полином $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция

$$f(p, e^{-ph}) = K(p, e^{-ph}) / \tilde{d}_0(p), \quad p \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

была целой. Поэтому интерполяционные значения для полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения

$$\frac{d^i}{dp^i}(q(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d_2(p, e^{-ph}))\bigg|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \quad i = \overline{0, \tilde{l}_k - 1}, \quad k = \overline{1, \tilde{\mu}}, \tag{26}$$

где $p_k \in \tilde{P}_0$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$, – различные корни полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\tilde{l}_k$ – их алгебраические кратности. Согласно лемме на корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$, поэтому уравнение (26) при всех $i = \overline{0, \tilde{l}_k - 1}$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$ имеет единственное решение.

Замечание 7. При интерполировании полинома $q(\lambda)$ используется требование: различным корням $p_i \in \tilde{P}_0$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ должны соответствовать разные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Способ обеспечения этого требования, если оно нарушается, указан в замечании 3.

Построение асимптотического стабилизатора для данного случая подытожим следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть выполнен критерий асимптотической стабилизируемости (19), а условие спектральной управляемости (2) нарушается в конечном числе точек – корнях полинома* $d_1(p)$, $\operatorname{Re} p < 0$.

Для того чтобы замкнутая система (11) имела асимптотически устойчивый характеристический квазиполином $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)d_2(p, e^{-ph})$ *запаздывающего типа степени* $N \geqslant n+1$ *(или полином, если* $d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p)$*), где* $d_2(p, e^{-ph})$ *– произвольный асимптотически устойчивый квазиполином, достаточно:*

1) найти полиномы $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, $\Phi(p, \lambda)$, $\Delta(p, \lambda)$ *и вектор* Ψ *из условий (7), (23) соответственно;*

2) построить полином $q(\lambda)$ *как решение интерполяционной задачи (26), чтобы функция (25) была целой;*

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p, \lambda), \ldots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - q(\lambda)d_1(p)\Psi. \tag{27}$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ замкнутой системы (11), (27) по последней строке, ввиду (7), (9), (25) имеем

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -K(p, \lambda)/\tilde{d}_0(p)(\tilde{d}_0(p)d_1(p)) - q(\lambda)d_1(p)\Delta(p, \lambda) = -(K(p, \lambda) + q(\lambda)\Delta(p, \lambda))d_1(p).$$

Заменяя $K(p, \lambda)$ согласно (22), получаем требуемый квазиполином

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -(-q(\lambda)\Delta(p, \lambda) - d_2(p, \lambda) + q(\lambda)\Delta(p, \lambda))d_1(p) = d(p, \lambda).$$

Теорема доказана.

Систему (11), замкнутую регулятором (27), приводим к нормальной форме, как это указано в п. 1. Выполняя элементарные операции над её строками, в последней строке получим функции $\bar{g}_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, включающие полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ. Поскольку старший член квазиполинома $d(p, \lambda) = |\widetilde{A}(p, \lambda)|$ относительно p имеет вид p^N, то функция $g_{n+1}(p, \lambda)$ заменится на функцию $p + \bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$ или $p^s + \sum_{i=1}^{s-1} \hat{g}_i(\lambda)p^{s-i} + \bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$, если $s = N - n \geqslant 2$, где $\hat{g}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s-1}$, – некоторые полиномы; функция $\bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$ того же вида, что и $\bar{g}_i(p, \lambda)$. При записи уравнений замкнутой системы целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12). Если $s \geqslant 2$, то понадобятся ещё вспомогательные переменные

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \tilde{x}_1(t), \quad \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t), \quad \ldots, \quad \dot{\tilde{x}}_{s-2}(t) = \tilde{x}_{s-1}(t) \tag{28}$$

для приведения замкнутой системы к нормальной форме.

Отметим, что в рассмотренном случае замкнутой системе можно обеспечить не только асимптотическую устойчивость, но и конечный спектр, выбрав полином в качестве

$$d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p).$$

2.3. Предположим, что выполняется условие (19), но спектральное условие (2) нарушается в бесконечном числе точек. Это означает, что все миноры n-го порядка матрицы (2) при $\lambda = e^{-ph}$ обращаются в нуль в бесконечном числе точек $p \in \mathbb{C}$. Соответственно система уравнений (5) при $\lambda = e^{-ph}$ имеет бесконечно много корней. Известно [17, лемма 3.2], что в таком случае система квазиполиномов (4) $(\lambda = e^{-ph})$ имеет общий множитель-квазиполином, обозначим его $\tilde{d}(p, e^{-ph})$. Из разложения характеристического определителя (11) по последней строке, образованной функциями $g_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, включающими полиномы от p, λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ, очевидно, что квазиполином $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ остаётся в характеристическом определителе замкнутой системы. При выполнении условия (19) все его корни лежат в левой полуплоскости: $\mathrm{Re}\, p < 0;$ если это не так, то система (1) не может быть стабилизирована.

Ввиду сказанного, редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) содержит (см. замечание 2) инвариантный полином $\tilde{d}(p,\lambda)d_0(p),$ где $d_0(p)$ – некоторый полином с множеством корней

$$P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : d_0(p_i) = 0, \quad i = \overline{1,\mu}\},$$

в частности, $d_0(p) = 1.$ Как и в предыдущем случае, полином $d_0(p)$ представим в виде $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)\tilde{d}_1(p).$ Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ и выполняется ранговое условие (19), для корней полинома $\tilde{d}_1(p)$ $\mathrm{Re}\, p < 0.$

По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином

$$\Phi(p,\lambda) = (\varphi_1(\lambda),\ldots,\varphi_n(\lambda),\varphi_{n+1}(p,\lambda))$$

такой, что $\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \tilde{d}(p,\lambda)d_0(p).$

Обозначим $d_1(p,\lambda) = \tilde{d}(p,\lambda)\tilde{d}_1(p)$ – квазиполином, для всех корней которого $\mathrm{Re}\, p < 0.$ Следовательно,

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = d_1(p,\lambda)\tilde{d}_0(p). \tag{29}$$

Согласно критерию асимптотической устойчивости требуется заменить все спектральные значения $p_k \in \tilde{P}_0 \subseteq P^+,$ являющиеся корнями полинома $\tilde{d}_0(p).$ В множество $\tilde{P}_0$ можно добавить и часть корней полинома $\tilde{d}_1(p),$ для которых имеет место (21) (см. замечание 6).

Сконструируем последнюю строку матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$ (см. (11)) такой, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы $d(p,e^{-ph})$ степени $N \geqslant n+1$ имел вид

$$d(p,\lambda) = d_1(p,\lambda)d_2(p) = \tilde{d}(p,\lambda)\tilde{d}_1(p)d_2(p), \quad \lambda = e^{-ph}, \tag{30}$$

где $d_2(p)$ – произвольный полином или квазиполином $(d_2(p,\lambda), \lambda = e^{-ph}),$ все корни которого имеют отрицательные действительные части: $\mathrm{Re}\, p < 0.$ В частности, возможно и $d_2(p) = 1.$

Функцию $K(p,\lambda)$ возьмём в виде

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + d_2(p)), \tag{31}$$

где, как и в п. 1, $\Delta(p,\lambda) = \Psi M(p,\lambda),$ Ψ – $(n+1)$-вектор. Вектор $\Psi = (\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ или векторный полином $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$ (см. замечание 4) подбираем (лемма) таким, чтобы полином $\Delta(p,\lambda)$ удовлетворял (23). Это возможно ввиду (24).

Интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция (25) была целой. Интерполяционные значения для построения полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (26), где вместо $d_2(p,e^{-ph})$ берём полином $d_2(p).$ На корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ согласно (23) $\Delta(p_k,e^{-p_k h}) \neq 0,$ поэтому уравнение (26) относительно $q^{(i)}(\lambda_k),$ $\lambda_k = e^{-p_k h},$ при всех $i = \overline{0,\tilde{l}_k - 1},$ $k = \overline{1,\tilde{\mu}}$ имеет единственное решение. Интерполирование полинома $q(\lambda)$ возможно ввиду замечания 3.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (19), а условие спектральной управляемости (2) нарушается в бесконечном числе точек – корней квазиполинома $d_1(p,e^{-ph}),$ $\mathrm{Re}\, p < 0.$ Для того чтобы замкнутая система (11) имела асимптотически устойчивый характеристический квазиполином $d(p,e^{-ph})$ вида (30) $(\lambda = e^{-ph}),$ достаточно:*

1) найти полином $\Delta(p,\lambda)$ и (n+1)-вектор $\Psi,$ а также полиномы $d_1(p,\lambda),$ $\tilde{d}_0(p),$ $\Phi(p,\lambda)$ из условий (23), (29) соответственно;

2) полином $q(\lambda)$ взять как решение интерполяционной задачи (26) (с заменой $d_2(p,e^{-ph})$ на $d_2(p)$), чтобы функция (25) была целой;

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda)) = -f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda) - q(\lambda)d_1(p,\lambda)\Psi. \tag{32}$$

Доказательство равенства $|\tilde{A}(p,\lambda)| = d(p,\lambda),$ как и в теоремах 1, 2, проводится через разложение характеристического определителя $|\tilde{A}(p,\lambda)|$ замкнутой системы (11), (32) по последней строке.

Выполняя элементарные операции над строками, замкнутую систему (11), (32) приводим к нормальной форме, как это указано в п. 2.2.

Выделим общие элементы теорем 2, 3:

$\tilde{d}_0(p)$ – полином (см. (25)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p \geqslant 0$) удаляются из спектра замкнутой системы;

$d_2(p,\lambda)$ – квазиполином или полином $d_2(p)$ (см. (22), (31)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p < 0$) добавляются в спектр замкнутой системы;

$d_1(p)$ – полином (см. (20)) или $d_1(p,\lambda)$ – квазиполином (см. (30)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p < 0$) остаются в спектре замкнутой системы.

3. Схема проверки условий (2), (19). Выделим этапы проверки названных условий и резюмируем ситуации, возникающие при построении асимптотического стабилизатора.

1. Вычисляем алгебраические дополнения к последней строке матрицы $F_\varphi(p,\lambda)$ и получаем систему полиномов (4).

2. Находим редуцированный базис Грёбнера для системы полиномов (4) в порядке $\lambda > p.$

3. Пусть базис Грёбнера содержит инвариантный полином $d_0(p)$ (в частности, возможно $d_0(p) = 1$), тогда на корнях полинома $d_0(p)$ (множество P_0) проверяем условия

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in P_0. \tag{33}$$

3.1. Если условия (33) имеют место или если $d_0(p) = 1,$ то выполнены условие спектральной управляемости (2) и, как следствие, условие (19). Значит, система (1) асимптотически стабилизируема и, более того, ей можно назначить произвольный конечный спектр (см. теорему 1).

3.2. Если условия (33) выполняются для множества $\tilde{P}_0 = \{p \in P_0 : \operatorname{Re} p \geqslant 0\}$ корней полинома $\tilde{d}_0(p)$:

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in \tilde{P}_0, \tag{34}$$

и не выполняются для некоторых $p \in P_0,$ $\operatorname{Re} p < 0,$ то система (1) асимптотически стабилизируема с частично заданным конечным спектром (см. теорему 2).

4. Пусть базис Грёбнера содержит инвариантный полином $\tilde{d}(p,\lambda) d_0(p),$ где $\tilde{d}(p,\lambda)$ – общий множитель для всех элементов базиса, зависящий от $\lambda.$ В частности, возможно $d_0(p) = 1.$

4.1. Если все корни квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} p < 0,$ то на корнях $p \in \tilde{P}_0 = \{p \in P_0 : \operatorname{Re} p \geqslant 0\}$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ проверяем условия (34). Если они выполняются, то справедливо условие (19). Система асимптотически стабилизируема с бесконечным спектром, включающим корни квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ (см. теорему 3).

4.2. Если хотя бы один корень квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ не удовлетворяет условию $\operatorname{Re} p < 0$ или/и хотя бы один корень $p \in \tilde{P}_0$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ не удовлетворяет (34), то условие (19) не имеет места и система (1) не может быть асимптотически стабилизируема.

Условие $\operatorname{Re} p < 0$ для всех корней квазиполинома запаздывающего типа

$$\tilde{d}(p,\lambda) = p^{\tilde{n}} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \gamma_i(\lambda) p^{\tilde{n}-i}, \quad \lambda = e^{-ph},$$

можно проверить, применив какой-либо критерий асимптотической устойчивости (см., например, [4, лемма 2.2]) к системе с характеристическим определителем

$$\begin{vmatrix} p & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{\tilde{n}}(\lambda) \\ -1 & p & \ldots & 0 & \gamma_{\tilde{n}-1}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & p & \gamma_2(\lambda) \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & p + \gamma_1(\lambda) \end{vmatrix} = \tilde{d}(p,\lambda), \quad \lambda = e^{-ph}.$$

Замечание 8. Множество спектральных значений P^+ для системы (1) с бесконечным спектром конечно [2]. Допустим, что ранговое условие (19) выполняется на некотором множестве, включающем множество P^+. Если построенный регулятор заменяет лишь конечное множество спектральных значений, включая P^+, то квазиполиномы исходной и замкнутой систем имеют бесконечно много общих корней и, ввиду леммы 3.2 из работы [17], общий множитель-квазиполином $w_0(p, e^{-ph})$. Следовательно, процедура замены конечной части бесконечного спектра системы (1) возможна, лишь если квазиполином исходной системы разлагается на множители

$$w(p, e^{-ph}) = w_0(p, e^{-ph})\delta(p),$$

где $\delta(p)$ – полином, часть корней которого заменяется. Замена только части корней неразложимого квазиполинома $w_0(p, e^{-ph})$ невозможна, даже если для них выполняется ранговое условие (19).

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка из работы [2, система (5.1)]

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\pi/2)\lambda & 0 \\ a + b\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (b_1, b_2)^{\mathrm{т}}, \quad h = 1. \tag{35}$$

Система (35) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$:

$$w(p, \lambda) = p^2 + p(\pi/2)\lambda.$$

В [2] отмечается, что данный квазиполином имеет корни

$$p_1 = 0, \quad p_2 = i\pi/2, \quad p_3 = -i\pi/2,$$

i – мнимая единица; остальные корни имеют отрицательные действительные части. Там же приведены ограничения

$$b_1 \neq 0, \quad (a + b)b_1 + (\pi/2)b_2 \neq 0 \tag{36}$$

на буквенные коэффициенты, обеспечивающие асимптотическую стабилизацию системы (35). Заметим, что хотя условия (36) получены из критерия (19), они гарантируют большее, а именно, спектральную управляемость системы (35). Этот факт есть следствие замечания 8.

Построим стабилизатор для системы (35) с конкретными числовыми параметрами $a = b = b_1 = 1$, $b_2 = 0$:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\pi/2)\lambda & 0 \\ \lambda + 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (1, 0)^{\mathrm{т}}, \quad h = 1, \tag{37}$$

взятыми с учётом условий (36). Действуем согласно обоснованной выше схеме построения асимптотического стабилизатора.

1. Запишем систему (4) алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$:

$$M(p, \lambda) = (M_1(p, \lambda), M_2(p, \lambda), M_3(p, \lambda))^{\mathrm{т}} = (p, \lambda + 1, p^2 + p(\pi/2)\lambda)^{\mathrm{т}}.$$

2. Находим базис Грёбнера в порядке $\lambda > p$: $\{p, \lambda + 1\}$. Значит, $d_0(p) = p$ – инвариантный полином, множество $P_0 = \{0\}$ и $p = 0$ – единственное инвариантное значение.

3. Для системы полиномов $M(p, \lambda)$ выполняется условие (33):

$$M(p, e^{-ph})|_{p=0} = (0, 2, 0) \neq 0.$$

Таким образом, для системы (37) справедлива теорема 1. Значит, система (37) спектрально управляема и замкнутой системе можно назначить произвольный характеристический полином, например, $d(p, \lambda) = (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

Из уравнения (7), где $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), 0)$ – полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p) = p$, заключаем, что $\Phi(p, \lambda) = (1, 0, 0)$. Полином $\varphi_3(\lambda)$ заведомо равен нулю, так как $\deg d_0(p) < 2$.

Полином $\Delta(p, \lambda)$ находим из условия (10). Очевидно, что данному условию удовлетворяет элемент базиса Грёбнера $\lambda + 1$, поэтому для $\Delta(p, \lambda) = \lambda + 1$ обязательно найдётся вектор $\Psi(p, \lambda)$ согласно равенству (9). Очевидно, что $\Psi = (0, 1, 0)$.

Записываем (см. (14)) функцию

$$K(p,\lambda)=-(q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p,\lambda))=-(q(\lambda)(\lambda+1)+(p+1)(p+2)(p+3)).$$

Интерполяционное значение $q(1)=-3$ для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (17):

$$(q(e^{-ph})(e^{-ph}+1)+(p+1)(p+2)(p+3))|_{p=0}=0.$$

Следовательно, $q(\lambda)=-3$.

Таким образом, асимптотический стабилизатор (последняя строка характеристической матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы (11)) имеет вид

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=-(K(p,\lambda)/p)\Phi(p,\lambda)-(-3)\Psi=\left(p^2+6p+11+\frac{3(1-\lambda)}{p},3,0\right).$$

Умножая первую строку характеристической матрицы

$$\tilde{A}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p+(\pi/2)\lambda & 0 & -1\\ -1-\lambda & p & 0\\ p^2+6p+11+\dfrac{3(1-\lambda)}{p} & 3 & 0\end{bmatrix}$$

на $-p$ и прибавляя к последней строке, получаем

$$\left(11-\frac{\pi}{2}\lambda(p+6)+\frac{3(1-\lambda)}{p},3,p+6\right).$$

Далее, умножая первую строку характеристической матрицы на $(\pi/2)\lambda$ и прибавляя к последней, приводим последнюю строку к виду

$$\left(\frac{1}{4}(\pi^2\lambda^2-12\pi\lambda+44)+\frac{3(1-\lambda)}{p},3,p+\frac{1}{2}(12-\pi\lambda)\right).$$

Чтобы записать уравнения замкнутой системы, целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12):

$$\dot{x}_1(t)=-\frac{1}{2}\pi x_1(t-1)+u(t),\quad \dot{x}_2(t)=x_1(t)+x_1(t-1),$$
$$\dot{u}(t)=-6u(t)+\frac{1}{2}\pi u(t-1)-11x_1(t)+3\pi x_1(t-1)-$$
$$-\frac{1}{4}\pi^2x_1(t-2)-3\int\limits_0^1 x_1(t-s)\,ds-3x_2(t),\quad t>0. \tag{38}$$

Вычислив характеристический определитель замкнутой системы (38), получим $d(p,\lambda)=$ $=(p+1)(p+2)(p+3)$, т.е. построенный регулятор решает задачу асимптотической стабилизации системы (37).

Проверим наличие статического регулятора. Для этого характеристический полином замкнутой системы возьмём второй степени: $d(p,\lambda)=(p+1)(p+2)$. Повторив проделанные выкладки, имеем

$$K(p,\lambda)=-(q(\lambda)(1+\lambda)+(p+1)(p+2)),\quad q(\lambda)=-1.$$

Величины $d_0(p)$, $\Phi(p,\lambda)$, Ψ имеют прежний вид. Значит, последнюю строку матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ запишем как

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=-(K(p,\lambda)/d_0(p))\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi=\left(p+3+\frac{1-\lambda}{p},1,0\right).$$

Вычитая из этой строки первую строку матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$, получаем статический стабилизатор

$$u(t) = -3x_1(t) + \frac{\pi}{2}x_1(t-1) - \int\limits_0^1 x_1(t-s)\,ds - x_2(t), \quad t > 0, \tag{39}$$

который обеспечивает замкнутой системе (37), (39) характеристический полином $d(p,\lambda) = (p+1)(p+2)$.

Обратим внимание на тот факт, что при построении регулятора информация о расположении спектральных значений однородной $(u = 0)$ системы (37), взятая из работы [2], никак не использовалась.

4. Регулятор финитной стабилизации. Под финитной стабилизацией понимается задача полного успокоения системы (1) посредством динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию. Задача полного успокоения системы (1) [1, с. 358] заключается в обеспечении за счёт выбора $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, тождеств

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \tag{40}$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции $x(t)$, $t < 0$.

Регулятор финитной стабилизации будем строить, оперируя характеристической матрицей замкнутой системы (1) $(\lambda = e^{-ph})$:

$$\widetilde{A}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) & 0 \\ g_1(p,\lambda) & \ldots & g_n(p,\lambda) & g_{n+1}(p,\lambda) & a_1(\lambda) \\ v_1(p,\lambda) & \ldots & v_n(p,\lambda) & v_{n+1}(p,\lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Здесь $g_i(p,\lambda)$, $v_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, – некоторые полиномы с действительными коэффициентами, задающие искомый регулятор. Предположим, что обратная связь, обеспечивающая (40), построена. Тождества (40) означают точечную вырожденность [17] системы (41) в направлениях, выделяющих её первые $n+1$ фазовые переменные. Этот факт стал основой оригинального подхода к построению динамических регуляторов финитной стабилизации [18], синтезированного в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (41) удовлетворяла тождествам (40), достаточно выполнить условия:*

1) $g_i(p,\lambda)$, $v_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, *– полиномы;*

2) $|\widetilde{A}(p,\lambda)| = d(p)$ *– полином степени* $N \geqslant n+2$;

3) $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(p - a_2(e^{-ph}))/d(p)$, $p \in \mathbb{C}$, *– целые функции.*

Доказательство. Считаем, что две последние строки матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$, т.е. полиномы $g_i(p,\lambda)$, $v_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, выбраны такими, что $|\widetilde{A}(p,\lambda)| = d(p)$ – характеристический полином степени $N \geqslant n+2$. Согласно критерию точечной вырожденности [17], основанному на теореме Винера–Пэли, для тождеств (40) достаточно, чтобы элементы первых $n+1$ строк матрицы $\tilde{A}^{-1}(p, e^{-ph})$, $p \in \mathbb{C}$, были целыми функциями. Учитывая структуру обратной матрицы, достаточно, чтобы целыми были функции $A_{ij}(p, e^{-ph})/d(p)$, $i = \overline{1, n+2}$, $j = \overline{1, n+1}$, где $A_{ij}(p,\lambda)$ – алгебраические дополнения к элементам $\tilde{a}_{ij}(p,\lambda)$ первых $n+1$ столбцов характеристической матрицы (41).

Каждое из алгебраических дополнений $A_{ij}(p,\lambda) = (-1)^{i+j} m_{ij}(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+2}$, $j = \overline{1, n+1}$, можно вычислить, разлагая дополнительный минор $m_{ij}(p,\lambda)$ по последнему столбцу. Поэтому для выполнения критерия точечной вырожденности, гарантирующего тождество (40), наряду с условиями 1) и 2), достаточно условия, что $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(p - a_2(e^{-ph}))/d(p)$, $p \in \mathbb{C}$, – целые функции. Теорема доказана.

5. Вычисление коэффициентов финитного стабилизатора. Поясним как построить полиномы $d(p)$, $a_i(\lambda)$, $i=1,2$, $g_i(p,\lambda)$, $v_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, такими, чтобы выполнить условия 2) и 3) теоремы 4.

5.1. Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Инвариантный полином $d_0(p)$ находим, как указано в п. 1, через вычисление базиса Грёбнера. Поскольку элементы двух последних строк матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$ – полиномы, то равенство из условия 2) теоремы 4 справедливо при любом $\lambda\in\mathbb{C}$. Учитывая, что инвариантные спектральные значения $p_i\in P_0$ (корни полинома $d_0(p)$) удовлетворяют системе (5) при подходящих значениях $\lambda\in\mathbb{C}$, из разложения определителя $|\widetilde{A}(p,\lambda)|$ по двум последним строкам (теорема Лапласа) заключаем, что корни полинома $d_0(p)$ остаются в конечном спектре замкнутой системы (41). Поэтому полином $d(p)$ берём в виде $d(p)=d_0(p)d_1(p)$, где $d_1(p)$ – произвольный полином с действительными коэффициентами, старший член которого $p^{N-\nu}$, где $N\geqslant n+2$ – степень полинома $d(p)$, $\nu=\deg d_0(p)$ – степень полинома $d_0(p)$.

Неравенство $N\geqslant n+2$ всегда можно обеспечить за счёт выбора полинома $d_1(p)$. Набор корней полинома $d_1(p)$ формируем с учётом приведённого выше замечания 3: различным корням p_i полинома $d_1(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i=e^{-p_ih}$. Таким образом, это требование должно быть выполнено для всех корней полинома $d(p)$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p)=\prod_{i=1}^{s_1}(p-p_i)^{r_i},\quad p_i\in\widetilde{P}, \tag{42}$$

где $\widetilde{P}=\{p_i\in\mathbb{C},\ i=\overline{1,s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно-сопряжённые корни с алгебраическими кратностями r_i. Заметим, что $P_0\subseteq\widetilde{P}$. Обозначим $\widetilde{\Lambda}=\{e^{-p_ih}:p_i\in\in\widetilde{P},\ i=\overline{1,s_1}\}$.

Для обеспечения условия 3) теоремы 4 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (42)) были корнями функций $a_1(e^{-ph})$, $(p-a_2(e^{-ph})$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём (см. [18])

$$a_1(\lambda)=\prod_{i=1}^{s_1}(\lambda-\lambda_i)^{r_i},\quad \lambda_i=e^{-p_ih}\in\widetilde{\Lambda}. \tag{43}$$

Чтобы функция $(p-a_2(e^{-ph}))/d(p)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i\in\widetilde{P}$ значения функции $p-a_2(e^{-ph})$ и её производных по переменной p обращались в нуль:

$$(p-a_2(e^{-ph}))^{(k)}|_{p=p_i}=0,\quad i=\overline{1,s_1},\quad k=\overline{0,r_i-1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i=e^{-p_ih}\in\widetilde{\Lambda}$ $(p_i\in\widetilde{P})$ должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i)=p_i\in\widetilde{P},\quad a_2^{(k)}(\lambda_i)=\frac{(-1)^k(k-1)!}{h\lambda_i^k},\quad k=\overline{1,r_i-1},\quad \text{если}\quad r_i>1,\quad i=\overline{1,s_1}. \tag{44}$$

Согласно сформулированной лемме находим вектор $\Psi=(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ и полином $\Delta(p,\lambda)$ (см. (9), где, как и раньше, P_0 – множество корней полинома $d_0(p)$). Обозначим

$$\hat{M}(p,\lambda)=(\Delta(p,\lambda),d_0(p))^{\mathrm{T}}.$$

Для построения векторного полинома $(v_1(p,\lambda),\ldots,v_{n+1}(p,\lambda))$ понадобится условие

$$\hat{M}(a_2(\lambda),\lambda)\neq 0,\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{45}$$

Допустим, что оно при некотором $\lambda^* \in \mathbb{C}$ нарушено:

$$\Delta(a_2(\lambda^*), \lambda^*) = 0, \quad d_0(a_2(\lambda^*)) = 0,$$

тогда $a_2(\lambda^*) = p_i \in P_0$. Если $\lambda^* = \lambda_i \in \tilde{\Lambda}$, то $\lambda_i = e^{-p_i h}$, и в силу (44) $\Delta(p_i, e^{-p_i h}) = 0$, $p_i \in P_0$, что противоречит (10). Значит, $\lambda^* \notin \tilde{\Lambda}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C},\ \ k = \overline{1, \mu_1}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $p_i \in P_0$ выполняется $\Delta(p_i, \lambda_k) = 0$. В силу условия (2) это множество конечно. Если множество $\Lambda \backslash \tilde{\Lambda}$ непусто, то к интерполяционным условиям (44) добавим равенства (если они не следуют из (44))

$$a_2(\lambda_i) = p^0 \quad (p^0 \in \mathbb{R} : p^0 \notin P_0, \quad \lambda_i \in \Lambda\backslash\tilde{\Lambda}). \tag{46}$$

Значение p^0 можно взять одним и тем же для всех $\lambda_i \in \Lambda\backslash\tilde{\Lambda}$. Условие (45) выполнено.

Таким образом, полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (44), (46), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [16, с. 104].

5.2. Выбор полиномов $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$. Построением полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, согласно п. 5.1, выполнение условия 3) теоремы 4 обеспечено. Выбором полиномов $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, реализуем условие 2) той же теоремы.

Согласно соотношению (7) строим полином $\Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda))$ такой, что

$$d_0(p) = \Phi(p, \lambda) M(p, \lambda), \tag{47}$$

где $M(p, \lambda)$ – система полиномов (4).

Введём функцию

$$K(p, \lambda) = (a_1(\lambda) q(\lambda) \hat{M}(p, \lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p), \tag{48}$$

где $q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ – полином. Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (41) имела характеристический полином $d(p)$ (см. условие 2) теоремы 4) степени $N \geqslant n + 2$, достаточно:*

1) выбрать векторный полином $q(\lambda)$ таким, чтобы функция $K(p, \lambda)$ была полиномом;

2) векторный полином $f(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$ взять таким, чтобы

$$f(p, \lambda) \hat{M}(p, \lambda) = K(p, \lambda); \tag{49}$$

3) в системе (41) положить

$$g(p, \lambda) = (g_1(p, \lambda), \ldots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f_2(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - f_1(p, \lambda)\Psi,$$

$$v(p, \lambda) = (v_1(p, \lambda), \ldots, v_{n+1}(p, \lambda)) = q_2(\lambda)\Phi(p, \lambda) + q_1(\lambda)\Psi. \tag{50}$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы 5 система (41), (50) имеет выбранный характеристический полином $d(p)$. Разлагая определитель $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ характеристической матрицы по последнему столбцу, получаем

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = (p - a_2(\lambda)) g(p, \lambda) M(p, \lambda) - a_1(\lambda) v(p, \lambda) M(p, \lambda) =$$

$$= (p - a_2(\lambda))(-f_2(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - f_1(p, \lambda)\Psi) M(p, \lambda) - a_1(\lambda)(q_2(\lambda)\Phi(p, \lambda) + q_1(\lambda)\Psi) M(p, \lambda).$$

Учитывая (9), (47)–(49), имеем требуемый результат:

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = (p - a_2(\lambda))(-f_2(p, \lambda) d_0(p) - f_1(p, \lambda)\Delta(p, \lambda)) - a_1(\lambda)(q_2(\lambda) d_0(p) + q_1(\lambda)\Delta(p, \lambda)) =$$

$$= (p - a_2(\lambda))(-f(p,\lambda)\hat{M}(p,\lambda)) - a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(p,\lambda) =$$

$$= (p - a_2(\lambda))(-K(p,\lambda)) - a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(p,\lambda) = d(p).$$

Теорема доказана.

Замечание 9. Пусть $\rho_1 = \deg_p f_1(p,\lambda)$. Поскольку $\deg d_0(p) = \nu$, то в равенстве (49) можно обеспечить $\rho_1 \leqslant \nu - 1$. Если степень переменной p полинома $f_1(p,\lambda)$ не меньше, чем ν, то представим его в виде $f_1(p,\lambda) = \tilde{f}_2(p,\lambda)d_0(p) + \tilde{f}_1(p,\lambda)$, где $\tilde{f}_i(p,\lambda)$, $i = 1, 2$, – некоторые полиномы, $\deg_p \tilde{f}_1(p,\lambda) \leqslant \nu - 1$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член вида p^ν. Тогда

$$K(p,\lambda) = \tilde{f}_1(p,\lambda)\Delta(p,\lambda) + (f_2(p,\lambda) + \tilde{f}_2(p,\lambda)\Delta(p,\lambda))d_0(p).$$

При нахождении полинома $\Delta(p,\lambda)$ можно взять $\psi_{n+1} = 1$ (см. замечание 4), и тогда его старший член будет p^n. Соответственно, степень полинома $f_2(p,\lambda)$ можно сделать меньше n.

5.3. Вычисление векторного полинома $\boldsymbol{q(\lambda)}$. Покажем как выбрать векторный полином $q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ таким, чтобы функция $K(p,\lambda)$ была полиномом. Ввиду теоремы Безу векторный полином $q(\lambda)$ должен обеспечивать тождество

$$a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda),\lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (43), (44) все корни полинома $a_1(\lambda)$ являются корнями $d(a_2(\lambda))$ не меньшей кратности, поэтому полином $q(\lambda)$ нужно искать как решение полиномиального уравнения

$$q(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda),\lambda) + d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ввиду условия (45) полиномы $\Delta(a_2(\lambda),\lambda)$, $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты. Поэтому, следуя алгоритму Евклида, получаем векторный полином $\tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda))$ такой, что

$$\tilde{q}(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda),\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{51}$$

и, следовательно, полином

$$q(\lambda) = -\tilde{q}(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) \tag{52}$$

построен.

5.4. Нахождение векторного полинома $\boldsymbol{f(p,\lambda)}$. Полином $K(p,\lambda)$ запишем как

$$K(p,\lambda) = ((d(p) - d(p)\tilde{q}^{\mathrm{T}}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)) + (d(p)\tilde{q}^{\mathrm{T}}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda) + a_1(\lambda)q^{\mathrm{T}}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)))/(a_2(\lambda) - p).$$

Заменяя $d(p)$ в первой скобке на $d(p) = d_1(p)d_0(p) = (0, d_1(p))\hat{M}(p,\lambda)$ и $q(\lambda)$ ввиду (52) во второй скобке, получаем

$$K(p,\lambda) = \left(\frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}(0, d_1(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda)\right)\hat{M}(p,\lambda). \tag{53}$$

Здесь согласно теореме Безу

$$(1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda))/(a_2(\lambda) - p), (d(p) - d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda) - p)$$

– полиномы.

Взяв полином

$$f(p,\lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}(0, d_1(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda), \tag{54}$$

с учётом (53) имеем равенство (49). Таким образом, полиномы в двух последних строках матрицы (41), задающие регулятор финитной стабилизации, согласно требованиям теорем 4, 5 построены.

5.5. Приведение замкнутой системы к нормальной форме. Осталось показать, что система (41), (50) приводится к системе запаздывающего типа в нормальной форме. Используя n первых строк системы (41), последние две строки элементарными преобразованиями, как указано в п. 1, приведём к виду

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{g}_n(\lambda) & \bar{g}_{n+1}(p,\lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{v}_n(\lambda) & \bar{v}_{n+1}(p,\lambda) & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Если в полиноме $\bar{v}_{n+1}(p,\lambda)$ степень p больше нуля, то представим его в виде

$$\bar{v}_{n+1}(p,\lambda) = \hat{v}(p,\lambda)(p-a_2(\lambda)) + \tilde{v}_{n+1}(\lambda).$$

Последний столбец преобразованной характеристической матрицы домножим на $-\hat{v}(p,\lambda)$ и, прибавив к предпоследнему, получим

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{g}_n(\lambda) & \tilde{g}_{n+1}(p,\lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{v}_n(\lambda) & \tilde{v}_{n+1}(\lambda) & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Так как переменная p присутствует только в элементах главной диагонали и $|\widetilde{A}(p,\lambda)| = d(p)$, то полином $\tilde{g}_{n+1}(p,\lambda)$ будет иметь вид

$$p^s + \sum_{i=1}^{s} \hat{g}_i(\lambda)p^{s-i}, \quad s = N-n-1;$$

$\hat{g}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,s}$, – некоторые полиномы.

Таким образом, регулятор финитной стабилизации

$$u(t) = x_{n+1}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t) = -\tilde{g}_1(\lambda)x_1(t) - \ldots - \tilde{g}_n(\lambda)x_n(t) - \sum_{i=1}^{s}\hat{g}_i(\lambda)x_{n+1}^{(s-i)}(t) - a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = -\tilde{v}_1(\lambda)x_1(t) - \ldots - \tilde{v}_n(\lambda)x_n(t) - \tilde{v}_{n+1}(\lambda)x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t).$$

Если $s \geqslant 2$, то, введя вспомогательные переменные (см. (28)), из системы (41), (50) получим систему с характеристической матрицей

$$\hat{A}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \ldots & p-a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & p & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ \tilde{g}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{g}_n(\lambda) & \hat{g}_s(\lambda) & \hat{g}_{s-1}(\lambda) & \ldots & p+\hat{g}_1(\lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \ldots & \tilde{v}_n(\lambda) & \tilde{v}_{n+1}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Для краткости систему с характеристической матрицей (57) будем называть системой (57), а набор фазовых переменных обозначать, как и раньше, $(x_1,\ldots,x_N)$.

Итак, все условия теорем 4, 5 реализованы и замкнутая система (57) записана в нормальной форме. Первые $N-1 \geqslant n+1$ строки матрицы, обратной к характеристической матрице (57), образованы целыми функциями экспоненциального типа. Если старшая степень λ в i-й строке матрицы $(\hat{A}(p,\lambda))^{-1}$ равна α_i, $i=\overline{1,N-1}$, то согласно теореме Винера–Пэли [17] переменные $x_i(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,N-1}$, $t\geqslant \alpha_i h$. Таким образом, при $t\geqslant t_1=\tilde{\alpha}h$, $\tilde{\alpha}=\max\{\alpha_i : i\in\overline{1,N-1}\}$, тождества (40) выполнены и, значит, финитный стабилизатор построен.

Процедуру построения финитного стабилизатора проиллюстрируем примером.

Пример 2. Пусть объект управления описывается системой (1) второго порядка с матрицами

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad b(\lambda)=(1,0)^{\mathrm{т}},\quad h=\ln 2. \tag{58}$$

Система (58) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda=e^{-ph})$ $w(p,\lambda)=p^2-\lambda$. Запишем алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda)=(M_1(p,\lambda),M_2(p,\lambda),M_3(p,\lambda))=(\lambda,p,p^2-\lambda).$$

Согласно п. 3 проверяем наличие условия спектральной управляемости (2).

Находим базис Грёбнера $(\lambda>p)$: $\{p,\lambda\}$ для системы полиномов $M(p,\lambda)$. Значит, $d_0(p)=$ $=p$ – инвариантный полином и $p=0$ – единственное инвариантное значение, множество $P_0=\{0\}$.

При $p=0$ значение $\lambda=e^{-0h}=1$, поэтому $M(p,\lambda)|_{p=0}=(1,0,-1)\neq 0$. Поскольку выполняется условие (33), то система (58) спектрально управляема. Таким образом, регулятор финитной стабилизации существует.

Согласно равенству (7) методом неопределённых коэффициентов находим вектор

$$\Phi(p,\lambda)=(\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),0)=(0,1,0).$$

Полином $\varphi_3(p,\lambda)$ заведомо равен нулю, так как степень $d_0(p)$ меньше двух.

Полином $\Delta(p,\lambda)$ должен удовлетворять условию (10). Поэтому можно взять элемент базиса Грёбнера: $\Delta(p,\lambda)=\lambda$. Вектор Ψ находим методом неопределённых коэффициентов. В данном случае, очевидно, $\Psi=(0,1,0)$.

Согласно п. 5.1 строим полиномы $d(p)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Характеристический полином замкнутой системы $d(p)=d_0(p)d_1(p)$ возьмём в виде

$$d(p)=p(p+1)(p+2)(p+3).$$

Таким образом,

$$\widetilde{P}=\{0,-1,-2,-3\},\quad \widetilde{\Lambda}=\{1,2,4,8\},\quad d_1(p)=(p+1)(p+2)(p+3).$$

По формулам (43), (44) (функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ должны быть целыми) получаем полиномы

$$a_1(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-8),\quad a_2(\lambda)=-\frac{1}{168}(\lambda-1)(3\lambda^2-46\lambda+248).$$

Через вычисление базиса Грёбнера для системы полиномов

$$\tilde{M}(a_2(\lambda),\lambda)=(\Delta(a_2(\lambda),\lambda),d_0(a_2(\lambda)))$$

проверяем условие (45) – оно выполняется, так как получаем $\{1\}$.

Векторный полином $\tilde{q}(\lambda)$ найдём с помощью алгоритма Евклида согласно (51):

$$\tilde{q}(\lambda)=(1/248(3\lambda^2-49\lambda+294),21/31).$$

Отсюда (см. (52))

$$q(\lambda)=\Bigl(-\frac{(3\lambda^2-49\lambda+294)(3\lambda^2-46\lambda+248)(3\lambda^2-43\lambda+208)(3\lambda^2-37\lambda+146)(3\lambda^2-25\lambda+94)}{197555355648},$$

$$-\frac{(3\lambda^2-46\lambda+248)(3\lambda^2-43\lambda+208)(3\lambda^2-37\lambda+146)(3\lambda^2-25\lambda+94)}{1175924736}\Bigg).$$

Согласно (54) находим векторный полином $f(p,\lambda)$ с компонентами

$$f_1(p,\lambda)=\frac{1}{1175924736}(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-8)(3\lambda^2-49\lambda+294)(3\lambda^2-43\lambda+208)\times$$
$$\times(3\lambda^2-37\lambda+146)(3\lambda^2-25\lambda+94),$$
$$f_2(p,\lambda)=-p^2+\frac{p(3\lambda^3-49\lambda^2+294\lambda-1256)}{168}+\frac{-40033\lambda^2+110544\lambda-155488}{7056}+$$
$$+\frac{-9\lambda^6+294\lambda^5-4165\lambda^4+33324\lambda^3}{28224}.$$

По формулам (50) получаем элементы двух последних строк характеристической матрицы (41) замкнутой системы. Следуя п. 5.5 (см. выражения (55), (56)), приводим замкнутую систему к нормальной форме и вычисляем матрицу, присоединённую к характеристической матрице (57). Элементы первых трёх строк полученной матрицы имеют старшую степень относительно λ, равную 12, и при $\lambda=e^{-ph}$ есть целые функции экспоненциального типа. Согласно теореме Винера–Пэли при $t\geqslant 12h$ тождества (40) выполнены и, значит, финитный стабилизатор построен.

6. Регулятор полной стабилизации. Регулятор полной стабилизации, наряду с тождествами (40), должен обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Поэтому для построения такого регулятора синтезируем обоснованные выше алгоритмы асимптотической и финитной стабилизации.

Характеристическую матрицу замкнутой системы будем искать в виде (41), где $g_i(p,\lambda)$ – целые дробно-рациональные функции, описанные в п. 1, $v_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i=1,2,$ – некоторые полиномы с действительными коэффициентами.

Следуя п. 1, построим звено обратной связи, заменяющее инвариантные спектральные значения (корни полинома $d_0(p)$) исходной однородной $(u=0)$ системы (1).

Согласно соотношениям (7), (10) находим полиномы

$$d_0(p)=\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda),\quad \Phi(p,\lambda)=(\varphi_1(\lambda),\ldots,\varphi_n(\lambda),\varphi_{n+1}(p,\lambda)),\quad \Delta(p,\lambda)=\Psi M(p,\lambda)$$

и вектор $\Psi=(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$.

Выбираем характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы степени $n+2$, все корни которого имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re}p<0$. Единственное дополнительное требование к полиному $d(p)$: различным корням p_i должны соответствовать различные значения $\lambda_i=e^{-p_ih}$ (см. замечание 3).

Аналогично (14) записываем функцию

$$\hat K(p,\lambda)=-(\hat q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p)).$$

Функция $\hat K(p,e^{-ph})/d_0(p)$, $p\in\mathbb{C}$, должна быть целой, поэтому, как и в п. 1, полином $\hat q(\lambda)$ строим по интерполяционным значениям $\hat q^{(i)}(\lambda_k)$, $i=\overline{0,l_k-1}$, $k=\overline{1,\mu}$, $\lambda_k=e^{-p_kh}\in\Lambda_0$, найденным из уравнения

$$\frac{d^i}{dp^i}(\hat q(e^{-ph})\Delta(p,e^{-ph})+d(p))\bigg|_{p=p_k}=0,\quad p_k\in P_0,\quad i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,\mu}.$$

Убеждаемся, что

$$(-\hat q(\lambda);-\hat K(p,\lambda)/d_0(p))\hat M(p,\lambda)=-\hat q(\lambda)\Delta(p,\lambda)-(\hat K(p,\lambda)/d_0(p))/d_0(p)=d(p).\tag{59}$$

Следуя пп. 4, 5, конструируем внешний контур регулятора, обеспечивающий финитную стабилизацию замкнутой системы. По формулам пп. 5.1, 5.3 строим полиномы $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, векторный полином $\tilde{q}(\lambda)$. Векторный полином $f(p, \lambda)$ берём вида

$$f(p,\lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}(-\hat{q}(\lambda); -\hat{K}(p,\lambda)/d_0(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda).$$

В силу (52), (59) получаем

$$f(p,\lambda)\hat{M}(p,\lambda) = K(p,\lambda),$$

где, как и раньше, функция $K(p, \lambda)$ задаётся формулой (48) и согласно п. 5.3 является полиномом. Векторные полиномы $g(p, \lambda)$, $v(p, \lambda)$ берём вида (50).

Таким образом, все условия теоремы 5 выполнены. Замкнутая система (41), (50) имеет асимптотически устойчивый характеристический полином $d(p)$, и ввиду теоремы 4 всякое её решение удовлетворяет тождествам (40). Регулятор полной стабилизации построен.

Замечание 10. Пусть полином $d_0(p)$ представим в виде произведения двух полиномов $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, причём для корней полинома $d_1(p)$ $\operatorname{Re} p < 0$ и $\deg d_1(p) \leqslant n + 2$. Тогда характеристический полином $d(p)$ степени $n + 2$ замкнутой системы можно взять в виде $d(p) = d_1(p)d_2(p)$. Здесь $d_2(p)$ – произвольный полином (см. замечание 3), для корней которого $\operatorname{Re} p < 0$ $(d_2(p) = 1$, если $\deg d_1(p) = n + 2)$. В таком случае полагаем (см. п. 2.2)

$$\hat{K}(p,\lambda) = -(\hat{q}(\lambda)\Delta(p,\lambda) + d_2(p));$$

$$\frac{d^i}{dp^i}(\hat{q}(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d_2(p))\bigg|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \quad i = \overline{0, \tilde{l}_k - 1}, \quad k = \overline{1, \tilde{\mu}},$$

где $p_k \in \tilde{P}_0$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$, – различные корни полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\tilde{l}_k$ – их алгебраические кратности;

$$f(p,\lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}(-\hat{q}(\lambda)d_1(p); -\hat{K}(p,\lambda)/\tilde{d}_0(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda)$$

и применяем теорему 5.

Согласно п. 5.5 (см. выражения (55), (56)) приводим замкнутую систему к нормальной форме и определяем момент времени $t_1 > 0$, начиная с которого имеют место тождества (40).

Заключение. Рассмотрены задачи модальной управляемости, построения FSA-регулятора и построения обратных связей, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию системы (1).

Названные задачи решены в рамках единого подхода, использующего вспомогательную функцию $K(p, \lambda)$ (см. выше (14), (48)). Это позволяет всякий раз указать линейный алгоритм замыкания системы динамическим регулятором в терминах стандартных операций над полиномами и полиномиальными матрицами.

Задачи финитной и полной стабилизации системы (1) решаются через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение). Последнее возможно ввиду того, что для разрешимости названных задач необходима спектральная управляемость исходной системы.

Задача асимптотической стабилизации решена в общем случае, без допущения спектральной управляемости исходной системы. Для решения этой задачи система замыкается динамическим регулятором. В классе статических регуляторов задача асимптотической стабилизации по предложенной схеме может не иметь решения. Проиллюстрируем такую ситуацию примером.

Пример 3. Рассмотрим систему второго порядка

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda/2 & -1 + 3\lambda/4 - \lambda^2/8 \\ -1 + \lambda/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (0; -2\lambda + \lambda^2/4)^{\mathrm{T}}, \quad h = \ln 2. \qquad (60)$$

Её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ имеет вид

$$w(p,\lambda) = p^2 + p\lambda/2 + \lambda^3/32 - 5\lambda^2/16 + \lambda - 1.$$

Построим асимптотический стабилизатор для системы (60), следуя обоснованной в п. 2 схеме.

Находим алгебраические дополнения (4) к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), M_2(p,\lambda), M_3(p,\lambda))^{\text{т}} =$$
$$= \left(-\frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)\lambda}{32}, \frac{(\lambda-8)\lambda(2p+\lambda)}{8}, p^2 + \frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{32} - \frac{5\lambda^2}{16} + \lambda - 1\right)^{\text{т}}.$$

Вычисляем редуцированный базис Грёбнера в порядке $\lambda > p$:

$$\{(p-1)(p+1)(p+2)(p+3), -(1+p)(2p^2-2p-3\lambda), 32p^3+96p^2-32p+3\lambda^3-30\lambda^2+48\lambda-96\}.$$

Отсюда заключаем, что инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)(p+2)(p+3)$ и множество $P_0 = \{-3,-2,-1,1\}$. Согласно теореме 2 $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, где $\tilde{d}_0(p) = p-1$ (соответственно $\tilde{P}_0 = \{1\}$) и $d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$.

Для системы полиномов $M(p,\lambda)$ проверяем условие (33). Для $p=1$ оно выполняется:

$$M(p,e^{-ph})|_{p=1} = (173/256, 75/64, 315/512) \neq 0.$$

Для остальных инвариантных значений $p \in P_0$ условие (33) не имеет места:

$$M(p,e^{-ph}) = 0, \quad p \in \{-3,-2,-1\}. \tag{61}$$

Поскольку для этих значений $\operatorname{Re} p < 0$, то согласно теореме 2 система (1) асимптотически стабилизируема с частично заданным конечным спектром, а именно в силу равенств (61) значения $\{-3,-2,-1\}$ останутся в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с разностными и интегральными членами (см. п. 2). Это видно из разложения характеристического определителя (11) по последней строке. Таким образом, порядок замкнутой системы будет больше двух, что исключает существование статического интегро-разностного регулятора.

Из уравнения (7), где $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \varphi_3(\lambda))$ – полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p) = (p-1)(p+1)(p+2)(p+3)$, находим вектор

$$\Phi(p,\lambda) = \left(-\frac{\lambda^2 - 30\lambda + 152}{32}, \frac{\lambda^2 - 11\lambda + 34}{8}, p^2 + p\left(5 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 112\lambda + 192}{32}\right).$$

Полином $\Delta(p,\lambda)$ и вектор $\Psi = (\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ определяем из условия (23) при $\tilde{P}_0 = \{1\}$:

$$\Delta(1,1/2) = \frac{315\psi_1}{512} - \frac{75\psi_2}{64} + \frac{173\psi_3}{256} \neq 0,$$

поэтому можно взять $\Psi = (16,-30,0)$, и тогда

$$\Delta(p,\lambda) = \frac{(8-\lambda)\lambda(16+30p+2\lambda^2+3\lambda)}{4}.$$

Из теоремы 2 следует, что полином $d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$ соответствует значениям, которые остаются в спектре. Характеристический определитель замкнутой системы степени $N \geqslant n+1$ имеет вид $d(p,e^{-ph}) = d_2(p,e^{-ph})d_1(p)$. Возьмём $d_2(p,e^{-ph}) = 1$, тогда характеристический полином замкнутой системы $d(p) = d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$.

В данном случае функция $K(p,\lambda)$ имеет вид (см. (22))

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + d_2(p,\lambda)) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + 1).$$

Единственное интерполяционное значение $q(1/2) = -1/45$ для полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (26), где $\tilde{P}_0 = \{1\}$:

$$(q(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + (p+1)(p+2)(p+3))|_{p=1} = 0,$$

поэтому $q(\lambda) = -1/45$.

Согласно теореме 2 асимптотический стабилизатор (последняя строка характеристической матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы (11)) имеет вид (27):

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = -(K(p,\lambda)/(p-1))\Phi(p,\lambda) - (-1/45)d_1(p)\Psi.$$

Элементарными операциями над строками матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ приводим её последнюю строку к виду

$$\left(\frac{(\lambda-8)(\lambda-6)(2\lambda^2+3\lambda+46)}{180} + \frac{(1-2\lambda)(\lambda^2-30\lambda+152)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{5760(p-1)},\right.$$

$$\frac{(\lambda-8)(\lambda^2-10\lambda+48)(2\lambda^2+3\lambda+46)}{1440} - \frac{(1-2\lambda)(\lambda^2-11\lambda+34)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{1440(p-1)},$$

$$\left. p + \frac{12-\lambda}{2} + \frac{(1-2\lambda)(\lambda-8)(\lambda^2-10\lambda+48)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{5760(p-1)}\right). \tag{62}$$

При записи уравнений замкнутой системы заменяем целые дробно-рациональные функции $(1-2\lambda)/(p-1)$ интегралами вида (12):

$$\int\limits_0^h e^{-s(p-1)}\,ds = \frac{1-2\lambda}{p-1}.$$

Характеристический определитель системы (60), (62) равен $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$, значит построенный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Отличительная черта предложенного в работе подхода состоит в том, что при проверке критерия асимптотической стабилизации (19) и построении регуляторов не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы. Этот факт подтверждают разобранные примеры 1–3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
3. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
4. *Hu G.-D., Hu R.* Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays // J. of Comput. and Appl. Math. 2020. V. 371. Art. 112706.
5. *Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V.* On pole assignment and stabilizability of linear systems of neutral type systems // Topics in Time-Delay Systems. Lect. Not. in Control and Inf. Sci. V. 388. Berlin, 2009. P. 85–93.
6. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
7. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.
8. *Булатов В.И.* Спектральная приводимость систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.

9. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521.
10. *Zaitsev V., Kim I.* Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. № 9. P. 2158.
11. *Метельский А.В.* О построении успокаивающих управлений для дифференциально-разностных систем с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 1989–1995.
12. *Хартовский В.Е.* Об управлении не полностью управляемыми дифференциально-разностными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 47–58.
13. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
14. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
15. *Метельский А.В.* Одновременная стабилизация семейства дифференциальных систем с запаздыванием динамической обратной связью по состоянию // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1516–1535.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
17. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
18. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.

г. Минск

Поступила в редакцию 29.01.2023 г.
После доработки 19.02.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.