ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 520–530

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2023 г. **А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин**

Исследована задача оптимального управления с нерегулярным смешанным ограничением, линейным по переменной управления. Предложены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для такого класса задач. Рассмотрены соответствующие примеры.

DOI: 10.31857/S037406412304009X, EDN: ANTGIC

Введение. В работе исследуется один класс задач оптимального управления с нерегулярным смешанным ограничением, которое линейно по управляющему параметру. Приведём пример такой нерегулярной задачи.

Пример 1. Зафиксируем произвольную точку $a \in (0,1)$. На фиксированном отрезке $[0,1]$ рассмотрим следующую одномерную задачу оптимального управления с закреплёнными концами:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 x(t)\,dt \to \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ (t-a)u(t) - x(t) \leqslant 0, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

В этой задаче существует допустимое управление, которое имеет вид $\bar{u}(t) = 0$ при $t \leqslant a$, $\bar{u}(t) = 1/(1-a)$ при $t > a$. Соответствующая ему траектория имеет вид $\bar{x}(t) = 0$ при $t \leqslant a$, $\bar{x}(t) = (t-a)/(1-a)$ при $t > a$. Покажем, что этот процесс оптимален.

Для произвольного допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, используя интегрирование по частям, имеем

$$\int\limits_0^1 x(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^1 (t-a)u(t)\,dt = \int\limits_0^1 (t-a)\dot{x}(t)\,dt = (t-a)x(t)|_0^1 - \int\limits_0^1 x(t)\,dt.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 x(t)\,dt \geqslant \frac{1-a}{2}.$$

Однако в то же время

$$\int\limits_0^1 \bar{x}(t)\,dt = \frac{1-a}{2},$$

что доказывает искомое утверждение.

В задаче (1) нарушаются условия регулярности смешанных ограничений при $t = a$. Применим формально к этой задаче известные условия оптимальности. Имеем

$$H(x, u, t, \psi, \lambda) = \psi u - \lambda x.$$

Поэтому $\dot{\psi}(t) = \lambda + \nu(t)$ – измеримая ограниченная неотрицательная функция, где $\lambda \geqslant 0$ – константа, ν – множитель Лагранжа, отвечающий за смешанные ограничения. Вместе с тем условие Эйлера–Лагранжа даёт

$$\psi(t) = (t-a)\nu(t).$$

Из этих двух равенств следует, что $\nu(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $t \neq a$ и имеет место равенство $(t-a)\dot{\nu}(t) = \lambda$. Отсюда получим

$$\nu(t) = \nu(0) + \int\limits_0^t \frac{\lambda}{s-a}\,ds.$$

Однако функция $\nu(t)$ неотрицательна, поэтому неограниченность интеграла влечёт за собой, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $\nu(t)$ постоянна при $t < a$ и $t > a$. Поскольку $\lambda = \psi(a) = 0$, то здесь известное условие нетривиальности

$$\lambda + |\psi(t)| > 0 \quad \text{для любого} \quad t \in [0,1]$$

нарушено в точке $t = a$, в которой условие максимума неинформативно.

Рассмотрим ещё один двумерный пример задачи с фиксированным левым и свободным правым концами.

Пример 2. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{cases} -\int\limits_0^1 x^1(t)\,dt \to \min, \\ \dot{x}^1(t) = u(t), \\ \dot{x}^2(t) = 2t, \\ tu(t) - x^2(t) \leqslant 0, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь очевиден оптимальный процесс $\bar{u}(t) = t$, $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \bar{x}^2(t)) = (t^2/2, t^2)$. Условие регулярности смешанных ограничений нарушается при $t = 0$. Применим формально принцип максимума. Имеем

$$H(x,u,\psi,t,\lambda) = \psi_1 u + 2t\psi_2 + \lambda x^1.$$

Значит, $\dot{\psi}_1(t) = -\lambda$, $\psi_1(1) = 0$, в то время как $\dot{\psi}_2(t) = -\nu(t)$, $\psi_2(1) = 0$. Условие Эйлера–Лагранжа даёт равенство

$$\psi_1(t) = t\nu(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,1].$$

Отсюда, поскольку $\nu(t)$ ограничена, $\psi_1(0) = 0$, следовательно, $\psi_1 = 0$ и $\lambda = 0$. Значит, $\nu = 0$ и, таким образом, $\psi_2 = 0$. Получили, что все множители Лагранжа равны нулю одновременно. Поэтому следует вывод, что функция $\nu(t)$ может не быть ограниченной в задаче с нерегулярными смешанными ограничениями.

Эти примеры демонстрируют, что класс существенно ограниченных измеримых функций является слишком узким, чтобы гарантировать включение для множителя Лагранжа, отвечающего нерегулярным смешанным ограничениям. Поэтому возникает естественный вопрос о более широком пространстве для этого множителя и соответственно об уточнённых необходимых условиях оптимальности для задач со смешанными ограничениями, которые не удовлетворяют известному условию регулярности. В настоящей работе предпринимается попытка найти такие пространство и условия, в частном случае, ограничений, линейных по переменной управления. Оказывается, что, как и в случае чистых фазовых ограничений, здесь возможно ограничиться запасом борелевских мер.

1. Постановка задачи, определения и основной результат. На фиксированном отрезке времени рассмотрим задачу оптимального управления со смешанными ограничениями

$$\begin{cases} \Phi(x_0, u(\cdot)) := \varphi(p) + \int\limits_0^1 f_0(x(t), u(t), t)\,dt \to \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [0,1], \\ g(x(t), t) + \langle u(t), a(t)\rangle \leqslant 0, \\ u(t) \in U \ \text{ для п.в. } \ t, \\ p \in S. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $p = (x_0, x_1)$, $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(1)$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов. Множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $S \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ выпуклы и компактны. Отображения $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. При этом считается, что f – линейное отображение по переменной управления u, т.е.

$$f(x, u, t) = f_1(x, t) + F(x, t)u,$$

а f_0 – выпуклая функция по u.

Пара функций (x, u) называется *процессом управления*, если $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $u(\cdot)$ измерима и существенно ограничена, и $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ для п.в. $t \in [0,1]$. Процесс управления называется *допустимым*, если он удовлетворяет всем наложенным ограничениям задачи (3). Напомним, что допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ называется *сильным минимумом* в задаче (3), если существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого допустимого процесса (x, u) такого, что $|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \varepsilon_0$ для любого $t \in [0,1]$, имеет место неравенство $\Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \leqslant \leqslant \Phi(x_0, u(\cdot))$, где $\bar{x}_0 = \bar{x}(0)$.

Введём обозначение

$$U(x, t) := \{u \in U : r(x, u, t) \leqslant 0\},$$

где $r(x, u, t) := g(x, t) + \langle a(t), u\rangle$. Рассмотрим подмножество $U_R(x, t)$ множества $U(x, t)$, которое состоит из точек $u \in U(x, t)$, отвечающих следующему условию непрерывности: для любой окрестности O_u точки u найдётся окрестность O_x точки x такая, что $U(y, t) \bigcap O_u \neq \neq \varnothing$ при всех $y \in O_x$. На простом примере проиллюстрируем как устроено множество точек непрерывности $U_R(x, t)$.

Рассмотрим случай, когда $U = \{u \in \mathbb{R}^m : |u| \leqslant 1\}$ – единичный шар. Зафиксируем точку $t_* \in [0,1]$ и пусть $a_* = a(t_*) \neq 0$. Пусть $\Gamma(x)$ обозначает гиперплоскость $g(x, t_*) + \langle a_*, u\rangle = 0$. Тогда имеют место несколько случаев.

1. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы $S^{m-1} = \partial U$ в точке u_*, и векторы u_* и a_* сонаправлены. В этом случае $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$ как следствие непрерывности функции g.

2. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ пересекает сферу S^{m-1} более чем в одной точке. Тогда, очевидно, также имеем $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$.

3. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы S^{m-1} в точке u_*, и векторы u_* и a_* разнонаправлены. При этом в любой окрестности x существует хотя бы одно положительное значение функции $g(\,\cdot\,, t_*) + \langle a_*, u_*\rangle$. В этом случае $U_R(x, t_*) = \varnothing$.

4. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы S^{m-1} в точке u_*, и векторы u_* и a_* разнонаправлены. При этом $g(y, t_*) \leqslant -\langle a_*, u_*\rangle$ для всех y из некоторой окрестности точки x. Тогда $U_R(x, t_*) = U(x, t) = \{u_*\}$.

5. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ не пересекает сферу S^{m-1}. В этом случае $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$.

Таким образом, в разобранном примере всегда имеем равенство $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$, за исключением случая 3, в котором $U_R(x, t_*) = \varnothing \neq U(x, t_*)$.

Положим $\Theta(x, t) := \operatorname{cl} U_R(x, t)$, если $a(t) \neq 0$, и $\Theta(x, t) := U$, если $a(t) \neq 0$.

Условие непрерывности, с помощью которого определяется $\Theta(x, t)$, является некоторым общим предположением. Необходимо привести достаточные условия для проверки включения $u \in U_R(x, t)$. Сделаем это.

Обозначим через $N_U(u)$ нормальный конус ко множеству в точке, т.е.

$$N_U(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, w - u\rangle \leqslant 0 \text{ для любых } w \in U\}.$$

Будем говорить, что точка $u \in U(x,t)$ *регулярна*, если при $u \in U_0(x,t)$ выполняется условие $a(t) \notin -N_U(u)$, где $U_0(x,t) = \{u \in U : r(x,u,t) = 0\}$. Для каждой регулярной точки $u \in \in U(x,t)$ имеет место включение $u \in U_R(x,t)$. Этот факт вытекает из теоремы устойчивости Робинсона [1]. Действительно, регулярность точки u означает выполнение условия Робинсона для вариационной системы

$$\begin{pmatrix} r(x,u,t) \\ u \end{pmatrix} \in (-\infty, 0] \times U,$$

которое заключается в том, что ядро сопряжённого оператора производной по u отображения слева имеет тривиальное пересечение с нормальным конусом ко множеству справа.

Рассмотрим функцию

$$\gamma(x,t) := \min_{u \in U_0(x,t)} \max_{q \in N_U(u)^* \bigcap B_1(0)} \langle a(t), q\rangle,$$

где K^* означает сопряжённый конус, $B_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в x. Если $U_0(x,t) = \varnothing$, то по определению $\gamma(x,t) = +\infty$. Из того, что многозначные отображения $U_0(x,t)$ и $N_U(u)$ полунепрерывны сверху, а значит, $N_U(u)^*$ полунепрерывно снизу, непосредственно вытекает, что $\gamma(x,t)$ является полунепрерывной снизу функцией. Отсюда также имеем, что эта функция – борелевская, что используем ниже. Кроме того, $\gamma(x,t) \geqslant 0$.

Пусть E – заданное измеримое множество на прямой и $\tau \in E$. Обозначим через $\mathcal{F}(\tau; E)$ семейство *замкнутых* подмножеств $D \subseteq E$, которые обладают тем свойством, что $\tau \in D$ и точка τ является точкой плотности множества D.

Рассмотрим функцию Гамильтона–Понтрягина (см. [2, гл. 1, с. 24])

$$\mathcal{H}(x,u,t,\psi,\lambda) := \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - \lambda f_0(x,u,t).$$

Сформулируем принцип максимума.

Определение 1. Процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ *удовлетворяет принципу максимума*, если существуют множители Лагранжа: число $\lambda \geqslant 0$, вектор-функция с ограниченным изменением $\psi(t)$ и борелевская мера $\eta \geqslant 0$ такие, что выполняются следующие условия:

условие нетривиальности

$$\lambda + |\psi(0)| + \|\eta\| \neq 0;$$

сопряжённое уравнение

$$\psi(t) = \psi(0) - \int\limits_0^t \mathcal{H}'_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s, \psi(s), \lambda)\, ds + \int\limits_{[0,t]} g'_x(\bar{x}(s), s)\, d\eta, \quad t \in (0,1]; \tag{4}$$

условия трансверсальности

$$(\psi(0), -\psi(1)) \in \lambda\varphi'(\bar{p}) + N_S(\bar{p}); \tag{5}$$

условие максимума

$$\max_{u \in \Theta(\bar{x}(t),t)} \mathcal{H}(\bar{x}(t), u, t, \psi(t), \lambda) \leqslant \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,1]; \tag{6}$$

условие Эйлера–Лагранжа, которое принимает вид: для п.в. $t \in [0,1]$ существует множество $D \in \mathcal{F}(t; [0,1])$ такое, что

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda) \in a(t)\mathcal{D}_\eta(t; D) + N_U(\bar{u}(t)), \tag{7}$$

где $\mathcal{D}_\eta(t;D)$ – обобщённая производная меры η в смысле предела*)

$$\mathcal{D}_\eta(t;D) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta(D\bigcap B_\varepsilon(t))}{2\varepsilon};$$

условие дополняющей нежёсткости, которое состоит из двух частей:

(a) для п.в. $t \in E := \{s \in [0,1] : r(\bar{x}(s),\bar{u}(s),s) < 0\}$ существует множество $D \in \mathcal{F}(t;E)$ такое, что

$$\mathcal{D}_\eta(t;D) = \{0\}; \tag{8}$$

(b) для любого отрезка $[c,d] \subseteq \{t \in [0,1] : a(t) = 0\}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{[c,d]} g(\bar{x}(t),t)\,d\eta = 0.$$

Кроме того, при каждых $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ таких, что

$$B_\varepsilon(t)\bigcap[0,1] \subseteq \{s \in [0,1] : U_R(\bar{x}(s),s) \neq \varnothing\},$$

имеет место оценка

$$\int\limits_{B_\varepsilon(t)\bigcap[0,1]} \gamma(\bar{x}(s),s)\,d\eta \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon. \tag{9}$$

Множество D в условиях (7) и (8) можно взять одним и тем же для п.в. $t \in E$.

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть процесс управления $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ является сильным минимумом в задаче (3). Тогда $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ удовлетворяет принципу максимума.*

Приведём небольшой комментарий. Условие максимума (6) принимает нестандартную форму, так как максимум берётся по некоторому подмножеству $\Theta(\bar{x}(t),t)$ исходного допустимого множества $U(\bar{x}(t),t)$. Это подмножество содержит замыкание регулярных точек допустимого множества, но может оказаться пустым. В таком случае максимум полагается равным $-\infty$. Заметим, что неравенство (6) может быть строгим, а условие максимума в форме (6) обобщает аналогичное условие из статьи [3].

Обратимся к условию Эйлера–Лагранжа (7). Поскольку скалярная монотонная функция $\eta([0,t])$ почти всюду дифференцируема, а её производная почти всюду совпадает с плотностью абсолютно непрерывной компоненты меры $m(t) := d\eta_{\mathrm{ac}}/dt$, из (7) несложно с помощью леммы об измеримом селекторе выводится существование такой функции $\xi \in \mathbb{L}_1([0,1];\mathbb{R})$, что справедливо включение

$$H'_u(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t,\psi(t),\lambda) - \xi(t)a(t) \in N_U(\bar{u}(t)).$$

При этом $\xi(t) \in [0,m(t)]$ для п.в. $t \in [0,1]$. Поскольку множество D можно взять одним и тем же и в (7), и в (8), то для функции $\xi(\cdot)$ из (8) также имеем равенство

$$\xi(t)r(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t.$$

Приходим к условию Эйлера–Лагранжа в форме, предложенной в книге [4, гл. 1]. Осуществим и обратный переход, а значит, имеют место эквивалентные формы записи некоторых условий оптимальности из числа представленных здесь и в [4].

Рассмотрим условие дополняющей нежёсткости. Вторая часть этого условия, справедливая при $a(t) = 0$, стандартна, т.е. такая же, как и в обычном принципе максимума для задачи с фазовыми ограничениями. Относительно же первой его части, ввиду условия “п.в.” в (8),

*) Здесь $\operatorname{Lim\,sup}$ означает множество всех предельных точек, или так называемый верхний предел в смысле Куратовского (см. [3]).

ничто не “запрещает” мере η иметь атом в любой точке отрезка $[0,1]$, где $a(t)\neq 0$. Однако этот факт может оказаться в противоречии с оценкой (9) при наличии подходящих условий регулярности. Перейдём к таким условиям.

Определение 2. Траектория $\bar{x}(\cdot)$ называется *регулярной* в точке $t_0\in[0,1]$ относительно смешанных ограничений, если для любой точки $u\in U_0(\bar{x}(t_0),t_0)$ существует такое $d=d(u,t_0)\in N_U(u)^*\bigcap S^{m-1}$, что выполняется неравенство $\langle a(t_0),d\rangle>0$. Траектория регулярна относительно смешанных ограничений, если она регулярна в каждой точке $t\in[0,1]$ равномерно по t, т.е. существует $\alpha_0>0$ такое, что $\langle a(t),d(u,t)\rangle>\alpha_0$ для всех $t\in[0,1]$ и $u\in U_0(\bar{x}(t),t)$.

Рассмотрим точку $t_0\in[0,1]$, в которой траектория регулярна относительно смешанных ограничений. Из теоремы устойчивости Робинсона [1] вытекает, что $U_R(\bar{x}(t),t)\neq\varnothing$ для всех t из некоторой окрестности точки t_0. С другой стороны, в силу определений и свойства компактности несложно проверяется, что $\gamma(\bar{x}(t_0),t_0)>0$. Поскольку γ полунепрерывна снизу, отсюда в силу (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна в окрестности точки t_0 и, более того, липшицева (т.е. её производная Радона–Никодима существенно ограничена). Тогда, как несложно видеть, в окрестностях таких регулярных точек t_0 принцип максимума из определения 1 превращается в обычный принцип максимума, справедливый для регулярных смешанных ограничений (см. [5–7]).

Рассмотрим теперь точку $t_0\in[0,1]$ такую, что $a(t)=0$ для всех t из некоторой окрестности t_0. В такой окрестности, очевидно, будут выполнены условия обычного принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями, и, в частности, если $a(t)=0$ для любого $t\in[0,1]$, то определение 1 представляет собой известный принцип максимума в форме Дубовицкого–Милютина [8, 9].

2. Доказательство теоремы 1. Предположения линейности и выпуклости позволяют воспользоваться методом штрафов (см. [6, гл. 2]). Пусть i – произвольное натуральное число. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и рассмотрим штрафную задачу

$$\begin{cases}\Phi_i(x_0,u(\cdot)):=\Phi(x_0,u(\cdot))+i\displaystyle\int\limits_0^1(r(x(t),u(t),t)^+)^2\,dt+\\ +|p-\bar{p}|^2+\varepsilon\int_0^1|u(t)-\bar{u}(t)|^2\,dt\to\min,\\ \dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\\ p\in S,\\ |x(t)-\bar{x}(t)|\leqslant\varepsilon\ \text{ для любого }\ t\in[0,1],\\ u(t)\in U\ \text{ для п.в. }\ t\in[0,1].\end{cases}\tag{10}$$

В силу предположений линейности и выпуклости, поскольку U – компакт, решение задачи (10) существует по теореме А.Ф. Филиппова [10]. Обозначим это решение через $(x_{0,i},u_i(\cdot))$, а через $x_i(\cdot)$ и p_i – траекторию и концевой вектор соответственно. Используя стандартные рассуждения, основанные на секвенциальной компактности, переходя к подпоследовательности, имеем сходимости $p_i\to p$, $u_i\xrightarrow{w}u$ слабо в $\mathbb{L}_2([0,1];\mathbb{R}^m)$ для некоторых $p=(x_0,x_1)$ и $u(\cdot)$. Тогда $x_i(t)\rightrightarrows x(t)$ равномерно на отрезке $[0,1]$, где $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$ и $x(0)=x_0$.

Покажем что процесс управления $(x(\cdot),u(\cdot))$ допустим в исходной задаче (3). Действительно, имеем $\Phi_i(x_{0,i},u_i(\cdot))\leqslant\Phi_i(\bar{x}_0,\bar{u}(\cdot))$, откуда

$$\int\limits_0^1(r(x_i(t),u_i(t),t)^+)^2\,dt\leqslant\frac{\mathrm{const}}{i}.$$

Отсюда при $i\to\infty$ следует, что $u(t)\in U(x(t),t)$ для п.в. $t\in[0,1]$, так как выпуклый функционал, стоящий в левой части, слабо полунепрерывен снизу. При этом также используется тот факт, что выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве слабо замкнуто. Также очевидно, что $p \in S$. Таким образом, $(x(\cdot), u(\cdot))$ – допустимый процесс в задаче (3).

Докажем, что $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ и $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$. Имеем

$$\Phi(x_{0,i}, u_i(\cdot)) + |p_i - \bar{p}|^2 + \varepsilon \int_0^1 |u_i(t) - \bar{u}(t)|^2\, dt \leqslant \Phi_i(x_{0,i}, u_i(\cdot)) \leqslant \Phi_i(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) = \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)).$$

Используя слабую полунепрерывность снизу и переходя к пределу в последнем выражении, получаем неравенство

$$\Phi(x_0, u(\cdot)) + |p - \bar{p}|^2 + \varepsilon \int_0^1 |u(t) - \bar{u}(t)|^2\, dt \leqslant \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)).$$

Однако процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ допустим, поэтому $\Phi(x_0, u(\cdot)) \geqslant \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$. Тогда $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$, $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$. Таким образом, установлено, что $x_i(t) \rightrightarrows \bar{x}(t)$, $u_i(t) \xrightarrow{w} \bar{u}(t)$ при $i \to \infty$, $t \in [0,1]$. Более того, в силу полученной оценки $u_i(\cdot) \to \bar{u}(\cdot)$ сильно в пространстве L_2 после перехода к подпоследовательности можно считать, что $u_i(t) \to \bar{u}(t)$ для п.в. $t \in [0,1]$.

Используя то, что $|x_i(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ для всех t и всех достаточно больших i, применим к штрафной задаче известный принцип максимума (см., например, [11, теорема 6.27]). Существуют число $\lambda_i \geqslant 0$ и абсолютно непрерывная функция $\psi_i(\cdot)$, которые одновременно не равны нулю, такие, что имеют место равенства

$$\dot{\psi}_i(t) = -\mathcal{H}'_x(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) + 2\lambda_i i r(x_i(t), u_i(t), t)^+ g'_x(x_i(t), t), \tag{11}$$

$$(\psi_i(0), -\psi_i(1)) \in \lambda_i \varphi'(p_i) + N_S(p_i) + 2\lambda_i(p_i - \bar{p}), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\max_{u \in U} (\mathcal{H}(x_i(t), u, t, \psi_i(t), \lambda_i) - \lambda_i i (r(x_i(t), u, t)^+)^2 - \lambda_i \varepsilon |u - \bar{u}(t)|^2) = \\ = \mathcal{H}(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) - \lambda_i i (r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2 - \lambda_i \varepsilon |u_i(t) - \bar{u}(t)|^2\end{gathered} \tag{13}$$

для п.в. $t \in [0,1]$.

Из условия максимума (6) вытекает уравнение Эйлера–Лагранжа в форме

$$\mathcal{H}'_u(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) - 2\lambda_i i r(x_i(t), u_i(t), t)^+ a(t) - 2\lambda_i \varepsilon (u_i(t) - \bar{u}(t)) \in N_U(u_i(t)) \tag{14}$$

для п.в. $t \in [0,1]$.

Из метода штрафов следует, что

$$i \int_0^1 (r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{15}$$

Обозначим через η_i абсолютно непрерывную борелевскую меру такую, что

$$\eta_i(B) = 2\lambda_i i \int_B r(x_i(t), u_i(t), t)^+\, dt.$$

Пронормируем множители Лагранжа следующим образом:

$$\lambda_i + |\psi_i(0)| + \|\eta_i\| = 1. \tag{16}$$

Из (16), используя слабую-* секвенциальную компактность в пространстве борелевских мер и переходя к подпоследовательности, имеем сходимость $\eta_i \xrightarrow{w} \eta$ для некоторой борелевской меры η на $\sigma([0,1])$. При этом $\|\eta_i\| \to \|\eta\|$. Также в силу компактности имеем $\lambda_i \to \lambda$

для некоторого числа $\lambda \geqslant 0$ и $\psi_i(t) \to \psi(t)$ для некоторой функции ψ с ограниченным изменением на $[0,1]$. Причём сходимость имеет место для всех точек непрерывности функции ψ, включая концы отрезка времени. Здесь учтено то, что последовательность функций $\psi_i(t)$ равномерно ограничена. Это несложно вытекает из (11), (16) и неравенства Гронуолла. Существование искомой функции $\psi(t)$ следует из теоремы Хелли.

Теперь перейдём последовательно к пределу в условиях (11)–(14). Переходя к пределу в (11) стандартным образом, используя интегральную форму представления, получаем (4). Переходя к пределу в (12), используя свойство полунепрерывности сверху предельного нормального конуса, приходим к условию (5).

Перейдём к пределу в условии максимума (13). По определению множества $U_R(x,t)$ для всех $t \in [0,1]:\ a(t) \neq 0$ и $u \in U_R(\bar{x}(t),t)$ при каждом достаточно большом i существует вектор $v_i \in U(x_i(t),t)$ такой, что $|v_i - u| \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому, подставляя при заданном t в условие максимума (13) в качестве u вектор v_i и переходя к пределу при $i \to \infty$, приходим к условию

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t),u,t,\psi(t),\lambda) - \lambda\varepsilon|u-\bar{u}(t)|^2 \leqslant \mathcal{H}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t,\psi(t),\lambda)$$

для любого $u \in U_R(\bar{x}(t),t)$ и п.в. t таких, что $a(t) \neq 0$. При этом мы использовали тот факт, что в силу (15) с точностью до подпоследовательности можно считать, что

$$i(r(x_i(t),u_i(t),t)^+)^2 \to 0 \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,1].$$

Для п.в. $t \in [0,1]$ таких, что $a(t) = 0$, очевидно, имеем

$$\max_{u\in U}(\mathcal{H}(\bar{x}(t),u,t,\psi(t),\lambda) - \lambda\varepsilon|u-\bar{u}(t)|^2) = \mathcal{H}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t,\psi(t),\lambda).$$

Перейдём к пределу в (14). По теореме Егорова для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E_\delta:\ \ell(E_\delta) \geqslant 1-\delta$, на котором последовательность функций $u_i(t)$ сходится равномерно к $\bar{u}(t)$*). Рассмотрим точку $t_0 \in E_\delta$ такую, что t_0 есть точка плотности E_δ и одновременно точка аппроксимативной непрерывности $\bar{u}(t)$. Известно, что почти все точки множества обладают такими свойствами. Рассмотрим измеримое подмножество $D = D(t_0,\delta) \subseteq E_\delta$, для которого $t_0 \in D$ и справедливы равенства:

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ell(D\bigcap[t_0-h,t_0+h])}{2h} = 1$;

ii) $\lim\limits_{t\xrightarrow{D}t_0} \bar{u}(t) = \bar{u}(t_0)$.

Модификация множества D, которая для упрощения изложения опускается, позволяет считать, что D – замкнутое множество с сохранением свойств i), ii), и более того, что предельная мера η непрерывна в точках τ_j, σ_j, где τ_j, σ_j определяются из следующей формулы для открытого дополнения:

$$(0,1)\setminus D = \bigcup_j (\tau_j,\sigma_j).$$

Здесь используется тот факт, что любое измеримое множество можно аппроксимировать по мере изнутри замкнутым множеством.

Интегрируя (14) на множестве $D\bigcap B_\epsilon(t_0)$, где $\epsilon > 0$ выбрано так, что точки $t_0 \pm \epsilon$ суть точки непрерывности η, и переходя к пределу сначала при $i \to \infty$, а потом и по $\epsilon \to 0$, с учётом равномерной сходимости функций $u_i(t)$ и сходимости по построению

$$\int\limits_{D\bigcap B_\epsilon(t_0)} a(t)\,d\eta_i \to \int\limits_{D\bigcap B_\epsilon(t_0)} a(t)\,d\eta$$

приходим к равенству (7) в точке t_0. При этом конвексификация правой части в (7) возникает из-за интегрирования. Поскольку множествами E_δ можно исчерпать с точностью до п.в. отрезок $[0,1]$, получаем условие (7) для п.в. $t \in [0,1]$.

---

*) Здесь ℓ означает меру Лебега на прямой.

Докажем условие дополняющей нежёсткости (8). Положим

$$Z := \{t \in [0,1] : r(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) < 0\}.$$

Рассмотрим точку $t_0 \in Z \bigcap E_\delta$, являющуюся точкой плотности $Z \bigcap E_\delta$. Как и выше, рассмотрим замкнутое множество $D \subseteq Z \bigcap E_\delta$, удовлетворяющее свойству i), такое, что мера η непрерывна в точках τ_j, σ_j (см. выше). Тогда в силу равномерной сходимости на множестве D при малом $\epsilon > 0$ таком, что точки $t_0 \pm \epsilon$ также точки непрерывности η, имеем

$$\eta_i(D \bigcap B_\epsilon(t_0)) = 2\lambda_i i \int\limits_{D \bigcap B_\epsilon(t_0)} r(x_i(t), u_i(t), t)^+ \, dt = 0.$$

Отсюда в силу слабой-* сходимости мер имеем, что $\eta(D \bigcap B_\epsilon(t_0)) = 0$. Поскольку множествами E_δ можно исчерпать с точностью до п.в. всё множество Z, приходим к условию (3). Вторая часть условий, справедливая при $a(t) = 0$, вытекает непосредственно из предела (15).

Докажем оценку (9). Возьмём число $\alpha > 0$ и положим

$$U_\alpha(x,t) := \{u \in U : |r(x,u,t)| \leqslant \alpha\},$$

$$\gamma_\alpha(t) := \min_{u \in U_\alpha(B_\alpha(\bar{x}(t)),t)} \; \max_{q \in (N_U(u))^* \bigcap B_1(0)} \langle a(t), q \rangle.$$

Заметим, что функция $\gamma_\alpha(t)$ полунепрерывна снизу и $\gamma_{\alpha_1}(t) \leqslant \gamma_{\alpha_2}(t)$ при $\alpha_2 < \alpha_1$. Также очевидно, что $\gamma_0(t) = \gamma(\bar{x}(t), t)$.

Рассмотрим точку $t_0 \in [0,1]$, в некоторой окрестности $O = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ которой множество $U_R(\bar{x}(t), t)$ всюду непусто. Пусть η непрерывна на границе такой окрестности. Из условия непустоты множества и условия максимума (13) следует, что $r(x_i(t), u_i(t), t)^+ \rightrightarrows 0$ равномерно на O. Поэтому, умножая скалярно (13) на произвольный вектор $q \in (N_U(u_i(t)))^* \bigcap B_1(0)$, приходим к оценке

$$\int\limits_O \gamma_\alpha(t) \, d\eta_i \leqslant \mathrm{const} \cdot \ell(O).$$

Переходя здесь к пределу, используя свойства полунепрерывности снизу и слабой-* сходимости мер, получаем соотношения

$$\int\limits_O \gamma_\alpha(t) \, d\eta \leqslant \liminf_{i \to \infty} \int\limits_O \gamma_\alpha(t) \, d\eta_i \leqslant \mathrm{const} \cdot \ell(O).$$

Остаётся заметить, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} \gamma_\alpha(t) = \gamma_0(t)$. Поэтому по теореме Б. Леви (см. [12, с. 299]), переходя к пределу в последнем неравенстве, приходим к оценке (9). Если η имеет атомы на границе O, то $\gamma_0(t)$ автоматически обнуляется в таких точках, и поэтому все предельные переходы выше сохраняются.

Полученные множители Лагранжа зависят от $\varepsilon > 0$, поэтому нужен ещё один предельный переход по $\varepsilon \to 0$ в полученных условиях. Но этот предельный переход совершается по схеме, аналогичной описанной выше. Теорема доказана.

3. Приложение. Рассмотрим приложение полученной теоремы к двум примерам, разобранным во введении. Для этого будем рассматривать задачи (1) и (2) с дополнительным ограничением $u \in B_c(0)$, где $c := \|\bar{u}\|_{L_\infty} + 1$. Такое ограничение введено формально, чтобы удовлетворить требованиям теоремы о компактности множества U. Оно не влияет на минимум задачи и дальнейшие рассуждения.

Начнём с задачи (1). Из оценки (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна при $t \neq a$. Положим $m(t) := d\eta/dt$ для п.в. t. Сопряжённое уравнение (4) имеет вид

$$d\psi(t) = \lambda \, dt + \, d\eta,$$

поэтому при $t \neq a$ функция $\psi(t)$ также абсолютно непрерывна, и имеют место соотношения

$$\dot{\psi}(t) = \lambda + m(t), \quad \psi(t) = (t-a)m(t),$$

где последнее равенство справедливо в силу условия Эйлера–Лагранжа (7).

Тогда функция $m(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \neq a$ и $(t-a)\dot{m}(t) = \lambda$. Значит, $m(t) = \lambda \ln(t-a) + \mathrm{const}$ при $t > a$, что влечёт за собой $\lambda = 0$, так как $m(t) \geqslant 0$. Покажем, что $\eta(\{a\}) = 0$. Действительно, в противном случае из сопряжённого уравнения имеем, что $\psi(t)$ разрывна в точке $t = a$. Однако из условия Эйлера–Лагранжа вытекает, что $\psi(t)$ непрерывна в $t = a$, поскольку $m(t)$ интегрируема. Таким образом, получаем следующий набор множителей: $\lambda = 0$, $\eta = c_1\ell$ на $[0,a]$ и $\eta = c_2\ell$ на $[a,1]$, $\psi(t) = c_1(t-a)$ на $[0,a]$ и $\psi(t) = c_2(t-a)$ на $[a,1]$, где c_1 и c_2 – неотрицательные константы такие, что $c_1 + c_2 > 0$.

Перейдём ко второму примеру. Условия принципа максимума дают равенства

$$d\psi_1(t) = -\lambda\, dt, \quad d\psi_2(t) = -\, d\eta, \quad \psi_1(t)\, dt = t\, d\eta.$$

Вместе с тем $\psi_1(1) = 0$, $\psi_2(1) = 0$.

Из (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна при $t > 0$. Поэтому для п.в. t имеем

$$\dot{\psi}_1(t) = -\lambda, \quad \dot{\psi}_2(t) = -m(t), \quad \psi_1(t) = tm(t),$$

где $m(t) = d\eta/dt$.

Отсюда, поскольку $m(t)$ суммируема, $\psi_1(0) = 0$, из условий трансверсальности имеем, что $\psi_1(t) \equiv 0$ и $\lambda = 0$. Значит, $m(t) = 0$ для п.в. t. Поэтому единственный с точностью до нормировки набор множителей Лагранжа, удовлетворяющий условиям оптимальности, будет следующим:

$$\lambda = 0, \quad \eta = \delta(0), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \begin{cases} -1, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Одной из первых работ по задачам со смешанными ограничениями является статья [13]. Смешанные ограничения рассматривались также, например, в работах [14, гл. 6, с. 282; 15, гл. 5; 16, с. 283; 17–21].

Заключение. Теорема дополняет результаты других авторов о необходимых условиях оптимальности в задачах управления с нерегулярными смешанными ограничениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robinson Stephen M.* Regularity and stability for convex multivalued functions // Mathematics of Operations Research. 1976. V. 1. № 2. P. 130–143.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
3. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L., Silva G.N.* Investigation of regularity conditions in optimal control problems with geometric mixed constraints // Optimization. 2016. V. 65. P. 185–206.
4. *Милютин А.А.* Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., 2001.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.
6. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. М., 1997.
7. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М., 2004.
8. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
9. *Dmitruk A.V.* On the development of Pontryagin's maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin // Control and Cybernetics. 2009. V. 38. № 4a. P. 923–958.

10. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1959. № 2. С. 25.
11. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. II. Applications. Berlin, 2006.
12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
13. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 4. С. 725–779.
14. *Neustadt L.W.* Optimization. Princeton, 1976.
15. *Тер-Крикоров А.М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М., 1977.
16. *Milyutin A.A., Osmolovskii N.P.* Calculus of Variations and Optimal Control. Providence, 1998.
17. *de Pinho M.R., Vinter R.B., Zheng H.* A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints // IMA J. Math. Control Inform. 2001. V. 18. P. 189–205.
18. *Clarke F., de Pinho M.R.* Optimal control problems with mixed constraints // SIAM J. Control Optim. 2010. V. 48. P. 4500–4524.
19. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого минимума в общей задаче оптимального управления. М., 1971.
20. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Принцип максимума в линейных задачах с выпуклыми смешанными ограничениями // Zeitschift fur Analysis und Anvwendungen. 1985. Bd. 4 (2). S. 133–191.
21. *Becerril J.A., de Pinho M.D.R.* Optimal control with nonregular mixed constraints: an optimization approach // SIAM J. on Control and Optimization. 2021. V. 59. № 3. P. 2093–2120.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.01.2023 г.
После доработки 22.01.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.