ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 501–511

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.78

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ В ТРЁХМЕРНОЙ СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

 Е. С. Барановский

Рассматривается начально-краевая задача для интегро-дифференциальной системы, описывающей трёхмерное течение неньютоновской жидкости с памятью в сетеподобной области. При постановке задачи используются краевые условия Дирихле для поля скоростей и давления, а также условия трансмиссии типа Кирхгофа во внутренних узлах сети. Доказана теорема о существовании и единственности непрерывного по времени слабого решения. Кроме того, выведено энергетическое равенство, которому удовлетворяет это решение.

DOI: 10.31857/S0374064123040076, EDN: ANHXKP

1. Введение и постановка задачи. В последние годы интенсивно развивается теория уравнений в частных производных на сетях (геометрических графах), стратифицированных множествах и сетеподобных областях. Эта теория находит разнообразные приложения, в частности, применяется при математическом анализе процессов тепло- и массопереноса в областях со сложной геометрической структурой [1–3].

В большинстве гидродинамических моделей с сетеподобной областью течения в качестве уравнений движения используются классические уравнения Навье–Стокса или некоторые их упрощения. Эти уравнения выводятся на основе гипотезы о линейной связи между тангенциальным напряжением и скоростью сдвига. Данная гипотеза, называемая *законом вязкого трения Ньютона*, подтверждается для большинства низкомолекулярных жидкостей. Однако при изучении динамики высокомолекулярных соединений и сред, склонных к структурообразованию, обнаружены различные отклонения от “ньютоновского” поведения [4, 5]. Жидкости, не подчиняющиеся при своем течении закону трения Ньютона, принято называть *неньютоновскими*. К ним относятся, например, жидкости с памятью [6, 7], реологические характеристики которых зависят от предыстории деформаций и напряжений. В соответствующих реологических моделях содержатся некоторые интегралы по времени с интервалами от нуля (либо даже от $-\infty$) до текущего момента времени. Это определяет актуальность исследований интегро-дифференциальных уравнений, заданных на сетевых носителях.

В настоящей статье изучается линейная интегро-дифференциальная система, возникающая при моделировании течения неньютоновской жидкости с памятью в трёхмерной сетеподобной области $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \bigcup \mathcal{Q}$, где

$$\mathcal{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{M} \mathcal{Q}_j;$$

$\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{Q}_j$ – ограниченные локально-липшицевы области в $\mathbb{R}^3$, причём

$$\mathcal{P}_i \bigcap \mathcal{Q}_j = \varnothing \ \text{ для любых } \ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M};$$

$$\overline{\mathcal{P}}_i \bigcap \overline{\mathcal{P}}_k = \varnothing \ \text{ для любых } \ i, k = \overline{1, N}, \quad i \neq k;$$

$$\overline{\mathcal{Q}}_j \bigcap \overline{\mathcal{Q}}_l = \varnothing \ \text{ для любых } \ j, l = \overline{1, M}, \quad j \neq l.$$

Заметим, что множество $\widetilde{\mathcal{P}}$ можно рассматривать как модель трубопроводной сети [8], предполагая, что $\mathcal{P}_1, \ \ldots, \ \mathcal{P}_N$ – трубы, а $\mathcal{Q}_1, \ \ldots, \ \mathcal{Q}_M$ – узловые места (узлы), в которых соединяются трубы.

Предположим, что граница каждого узла $\mathcal{Q}_j$, $j=\overline{1,M}$, имеет лишь одну связную компоненту и существуют ровно m_j областей $\mathcal{P}_{j_1}$, $\mathcal{P}_{j_2}$, $\ldots$, $\mathcal{P}_{j_{m_j}}$, $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_{m_j}\leqslant N$, таких, что $\overline{\mathcal{Q}}_j\bigcap\overline{\mathcal{P}}_{j_k}\neq\varnothing$ для каждого $k=\overline{1,m_j}$.

Через Υ обозначим множество j таких, что $m_j\geqslant 2$. Если $j\in\Upsilon$, будем говорить, что $\mathcal{Q}_j$ – *внутренний узел*. В случае когда $j\in\{1,\ldots,M\}\setminus\Upsilon$, узел $\mathcal{Q}_j$ будем называть *внешним узлом*.

Пусть $\Pi_{jn}\stackrel{\text{def}}{=}\overline{\mathcal{Q}}_j\bigcap\overline{\mathcal{P}}_{j_n}$ – поверхность примыкания трубы $\mathcal{P}_{j_n}$ к узлу $\mathcal{Q}_j$. Предположим, что Π_{jn} – плоская поверхность и для каждой области $\mathcal{P}_i$ существуют ровно два узла $\mathcal{Q}_{i_1}$ и $\mathcal{Q}_{i_2}$ таких, что

$$\overline{\mathcal{P}}_i\bigcap\overline{\mathcal{Q}}_{i_1}\neq\varnothing,\quad \overline{\mathcal{P}}_i\bigcap\overline{\mathcal{Q}}_{i_2}\neq\varnothing.$$

Тогда для каждого $i=\overline{1,N}$ однозначно определена пара чисел (i_1',i_2') такая, что

$$\overline{\mathcal{P}}_i\bigcap\overline{\mathcal{Q}}_{i_1}=\Pi_{i_1i_1'},\quad \overline{\mathcal{P}}_i\bigcap\overline{\mathcal{Q}}_{i_2}=\Pi_{i_2i_2'}.$$

Через Γ_i обозначим боковую поверхность трубы $\mathcal{P}_i$, $i=\overline{1,N}$, т.е.

$$\Gamma_i\stackrel{\text{def}}{=}\partial\mathcal{P}_i\setminus(\Pi_{i_1i_1'}\bigcup\Pi_{i_2i_2'}).$$

Введём также следующие обозначения: $\Pi\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{i=1}^N(\Pi_{i_1i_1'}\bigcup\Pi_{i_2i_2'})$ – объединение поверхностей примыкания труб к узлам, $\Gamma\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{i=1}^N\Gamma_i$ – объединение боковых поверхностей труб.

Пусть $\mathbf{n}\colon\Pi\to\mathbb{R}^3$ – вектор-функция такая, что

$$\mathbf{n}|_{\Pi_{i_1i_1'}\bigcup\Pi_{i_2i_2'}}=\mathbf{n}_i|_{\Pi_{i_1i_1'}\bigcup\Pi_{i_2i_2'}},\quad i=\overline{1,N},$$

где $\mathbf{n}_i=\mathbf{n}_i(\boldsymbol{x})$ – внешняя (по отношению к области $\mathcal{P}_i$) единичная нормаль к поверхности $\partial\mathcal{P}_i$ в точке $\boldsymbol{x}\in\partial\mathcal{P}_i$.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую течение несжимаемой неньютоновской жидкости с памятью через систему труб $\mathcal{P}$ на промежутке времени $[0,T]$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}-\eta\nabla^2\boldsymbol{u}-\int\limits_0^t\beta(s,t)\nabla^2\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds+\nabla\pi=\boldsymbol{f}\ \text{ в }\ \mathcal{P}\times(0,T),\tag{1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\ \text{ в }\ \mathcal{P}\times(0,T),\tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}\ \text{ на }\ \Gamma\times(0,T),\tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_{\tan}=\mathbf{0},\quad \pi=-\zeta+C\ \text{ на }\ \Pi\times(0,T),\tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,0)=\boldsymbol{u}_0\ \text{ в }\ \mathcal{P},\tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{m_j}\int\limits_{\Pi_{jk}}\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi=0\ \text{ для каждого }\ j\in\Upsilon,\tag{6}$$

где $\boldsymbol{u}\colon\mathcal{P}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ – скорость течения жидкости; $\pi\colon\mathcal{P}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ – давление; η – коэффициент вязкости $(\eta>0)$; $\beta\colon[0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}_+$ – функция памяти (ядро вязкоупругости), $\mathbb{R}_+\stackrel{\text{def}}{=}[0,\infty)$; $\boldsymbol{f}\colon\mathcal{P}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ – поле внешних сил; функция $\zeta\colon\Pi\times[0,T]\to\mathbb{R}$ описывает давление на компонентах Π; $\boldsymbol{u}_0\colon\mathcal{P}\to\mathbb{R}^3$ – поле скоростей в начальный момент времени; $\boldsymbol{u}_{\tan}$ – касательная составляющая вектора $\boldsymbol{u}$, т.е. по определению $\boldsymbol{u}_{\tan}\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$; символы ∇ и div обозначают соответственно градиент и дивергенцию по пространственным переменным x_1, x_2, x_3; $\nabla^2\stackrel{\text{def}}{=}\nabla\cdot\nabla$ – оператор Лапласа. Для упрощения предполагается, что плотность жидкости равна единице. Произвольная константа C во втором равенстве из (4) отражает факт, что при задании давления важен только его перепад [9].

Соотношение (1) – это уравнение нестационарного движения вязкой жидкости с памятью в стоксовом приближении, т.е. без учёта конвективных ускорений. В частном случае, когда $\beta(s,t)\equiv 0,$ приходим к линеаризованным эволюционным уравнениям Навье–Стокса [2]. Если $\beta(s,t)\equiv b\exp(-a(t-s)),$ где $a>0$ и $b>0,$ то система (1), (2) сводится к линеаризованным уравнениям движения несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Олдройда [10–12]. Мы не будем ограничиваться конкретным выбором функции памяти – рассмотрим общую ситуацию, предполагая только, что функция β является неотрицательной и непрерывной.

Отметим, что равенство (2) выражает свойство несжимаемости жидкости, а краевое условие (3) означает, что жидкость прилипает к боковым стенкам труб. Наряду с условием прилипания, в моделях неньютоновской гидродинамики также широко используются различные условия пристенного проскальзывания (см., например, [13–15]). Краевые условия (4) задают касательную составляющую вектора скорости и давление на участках примыкания труб к узлам. Равенства (6) – это условия трансмиссии типа Кирхгофа, обеспечивающие выполнение закона сохранения массы во внутренних узлах сети.

Основная цель настоящей статьи – доказать однозначную разрешимость начально-краевой задачи (1)–(6) в слабой постановке. Работа организована следующим образом. В п. 2 рассматриваются необходимые функциональные пространства и вводится определение слабого решения. В п. 3 сформулирован основной результат работы – теорема о существовании и единственности непрерывного по времени слабого решения при естественных допущениях относительно данных задачи, а также приводится энергетическое равенство, которому удовлетворяет слабое решение. В п. 4 установлены некоторые вспомогательные результаты, в частности, получены оценки норм слабого решения в пространствах $\boldsymbol{L}^{\infty}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P}))$ и $\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{W}^{1,2}(\mathcal{P})).$ Доказательству теоремы существования и единственности посвящён последний пункт.

2. Слабая формулировка задачи. Через $\mathcal{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$ обозначим множество вектор-функций $\boldsymbol{\nu}\colon\overline{\mathcal{P}}\to\mathbb{R}^3$ таких, что $\boldsymbol{\nu}|_{\overline{\mathcal{P}}_i}\in\boldsymbol{C}^{\infty}(\overline{\mathcal{P}}_i)\overset{\text{def}}{=}C^{\infty}(\overline{\mathcal{P}}_i)\times C^{\infty}(\overline{\mathcal{P}}_i)\times C^{\infty}(\overline{\mathcal{P}}_i),$ $i=\overline{1,N},$ $\operatorname{div}\boldsymbol{\nu}=0$ в $\mathcal{P},$ $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$ на $\Gamma,$ $\boldsymbol{\nu}_{\tan}=\boldsymbol{0}$ на Π и для каждого $j\in\Upsilon$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{m_j}\int\limits_{\Pi_{jk}}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi=0.$$

Обозначим через $\boldsymbol{H}_{\Pi}(\mathcal{P})$ замыкание множества $\mathcal{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$ в декартовом произведении пространств Лебега $\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})\overset{\text{def}}{=}L^2(\mathcal{P})\times L^2(\mathcal{P})\times L^2(\mathcal{P}),$ а через $\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$ – замыкание $\mathcal{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$ в декартовом произведении пространств Соболева $\boldsymbol{W}^{1,2}(\mathcal{P})\overset{\text{def}}{=}W^{1,2}(\mathcal{P})\times W^{1,2}(\mathcal{P})\times W^{1,2}(\mathcal{P}).$

В пространствах $\boldsymbol{H}_{\Pi}(\mathcal{P})$ и $\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$ введём скалярные произведения и нормы по формулам

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{H}_{\Pi}(\mathcal{P})}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,d\boldsymbol{x},\quad\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}_{\Pi}(\mathcal{P})}\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}_{\boldsymbol{H}_{\Pi}(\mathcal{P})},$$

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathcal{P}}\nabla\boldsymbol{v}:\nabla\boldsymbol{w}\,d\boldsymbol{x},\quad\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}_{\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})},$$

где символ “$:$” используется для обозначения скалярного произведения 3×3-матриц.

Поскольку $\operatorname{meas}(\Gamma_i)>0,$ $i=\overline{1,N},$ то из следующей леммы вытекает, что скалярное произведение $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}$ определено корректно, а норма $\|\cdot\|_{\boldsymbol{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}^{1,2}(\mathcal{P})}.$

Лемма 1 [16, § II.5]. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с локально-липшицевой границей $\partial\Omega.$ Если $S\subset\partial\Omega$ и $\operatorname{meas}(S)>0,$ то существует константа $K_0=K_0(\Omega,S)$ такая, что*

$$\|\omega\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K_0(\Omega,S)\biggl(\|\nabla\omega\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}+\int\limits_S|\omega|\,dS\biggr),\quad\omega\in W^{1,2}(\Omega).$$

Будем предполагать, что выполнены следующие два условия:
(i) функция $\beta\colon [0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}_+$ непрерывна;
(ii) выполнены включения: $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P}))$, $\zeta\in L^2(0,T;L^2(\Pi))$ и $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P})$.

Лемма 2. *Если пара* $(\boldsymbol{u},\pi)$ *– классическое решение начально-краевой задачи (1)–(6), то выполняется равенство*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\biggl(\int\limits_0^t\beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\boldsymbol{v}\biggr)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}=$$

$$=\int\limits_\Pi\zeta\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi+(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} \tag{7}$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})$ *и любого* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Умножим обе части равенства (1) на вектор-функцию $\boldsymbol{v}$ скалярно в пространстве $\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})$:

$$\Bigl(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\boldsymbol{v}\Bigr)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}-\underbrace{\eta(\nabla^2\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_1}-\underbrace{\biggl(\int\limits_0^t\beta(s,t)\nabla^2\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds,\boldsymbol{v}\biggr)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_2}+$$

$$+\underbrace{(\nabla\pi,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_3}=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}. \tag{8}$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$J_1=\eta\int\limits_{\mathcal{P}}\nabla^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\eta\sum_{i,j=1}^3\int\limits_{\mathcal{P}}\frac{\partial^2u_i}{\partial x_j^2}v_i\,d\boldsymbol{x}=\eta\sum_{i,j=1}^3\int\limits_\Pi\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_in_j\,d\Pi-\eta\sum_{i,j=1}^3\int\limits_{\mathcal{P}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,d\boldsymbol{x}=$$

$$=\eta\int\limits_\Pi\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{v}\,d\Pi-\eta\int\limits_{\mathcal{P}}\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\eta\int\limits_\Pi\frac{\partial(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})}{\partial\mathbf{n}}(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n})\,d\Pi-\eta\int\limits_{\mathcal{P}}\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Кроме того, так как $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ в $\mathcal{P}\times(0,T)$ и $\boldsymbol{u}_{\tan}=\boldsymbol{0}$ на $\Pi\times(0,T)$, то $\partial(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})/\partial\boldsymbol{n}=0$ на $\Pi\times(0,T)$. Поэтому из (9) следует, что

$$J_1=-\eta(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}. \tag{10}$$

Аналогично получаем

$$J_2=-\biggl(\int\limits_0^t\beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\boldsymbol{v}\biggr)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}. \tag{11}$$

Далее, применяя интегрирование по частям, с учётом равенства $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ в $\mathcal{P}$ находим

$$J_3=\int\limits_{\mathcal{P}}\nabla\pi\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^3\int\limits_{\mathcal{P}}\frac{\partial\pi}{\partial x_i}v_i\,d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^3\int\limits_\Pi\pi v_in_i\,d\Pi-\sum_{i=1}^3\int\limits_{\mathcal{P}}\pi\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,d\boldsymbol{x}=$$

$$=\int\limits_\Pi\pi\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi-\int\limits_{\mathcal{P}}\pi\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_\Pi\pi\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi,$$

откуда, принимая во внимание краевое условие $\pi = -\zeta + C$ на $\Pi\times(0,T)$, выводим следующее равенство:

$$J_3 = -\int\limits_{\Pi} \zeta \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi + C\int\limits_{\Pi} \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Pi} \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi = \int\limits_{\mathcal{P}} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = 0,$$

поэтому формула (12) упрощается и принимает вид

$$J_3 = -\int\limits_{\Pi} \zeta \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi. \tag{13}$$

Наконец, подставляя (10), (11) и (13) в равенство (8), приходим к соотношению (7). Лемма доказана.

Лемма 2 приводит к следующему определению.

Определение. *Слабым решением* начально-краевой задачи (1)–(6) будем называть вектор-функцию $\boldsymbol{u}\colon \mathcal{P}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ такую, что

$$\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}))\bigcap \boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P})),\quad \boldsymbol{u}(\,\cdot\,,0)=\boldsymbol{u}_0$$

и выполнено равенство (7) в смысле скалярных распределений на интервале $(0,T)$.

Через $\boldsymbol{U}(\beta,\boldsymbol{f},\zeta,\boldsymbol{u}_0)$ обозначим множество слабых решений задачи (1)–(6). Ниже будет показано, что это множество состоит из единственного элемента при естественных допущениях относительно данных β, $\boldsymbol{f}$, ζ и $\boldsymbol{u}_0$.

3. Основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия (i) и (ii). Тогда начально-краевая задача (1)–(6) имеет единственное слабое решение* $\boldsymbol{u}$ *и для него справедливо энергетическое равенство*

$$\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + 2\eta\int\limits_0^\tau \|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,dt + 2\int\limits_0^\tau\biggl(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\biggr)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}dt =$$

$$= \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + 2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Pi \zeta(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x})\,d\Pi\,dt + 2\int\limits_0^\tau (\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t),\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t))_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt,\quad \tau\in[0,T]. \tag{14}$$

Доказательство этой теоремы приводится в п. 5.

4. Вспомогательные результаты. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{Y}$ *– гильбертовы пространства и имеет место цепочка вложений*

$$\boldsymbol{X}\hookrightarrow\boldsymbol{Y}\simeq\boldsymbol{Y}^*\hookrightarrow\boldsymbol{X}^*,$$

где каждое пространство плотно в последующем пространстве и вложения непрерывны. Если функция $\boldsymbol{\psi}$ *принадлежит пространству* $\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{X})$, *а её обобщённая производная* $d\boldsymbol{\psi}/dt$ *принадлежит пространству* $\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{X}^*)$, *то функция* $\boldsymbol{\psi}$ *почти всюду равна некоторой непрерывной функции из отрезка* $[0,T]$ *в* $\boldsymbol{Y}$ *и, кроме того, справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\psi}\|^2_{\boldsymbol{Y}} = 2\Bigl\langle\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt},\boldsymbol{\psi}\Bigr\rangle_{\boldsymbol{X}^*\times\boldsymbol{X}}$$

почти всюду на $(0,T)$, *где скобки* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\boldsymbol{X}^*\times\boldsymbol{X}}$ *обозначают отношение двойственности между пространством* $\boldsymbol{X}$ *и сопряжённым пространством* $\boldsymbol{X}^*$.

Доказательство этой леммы приводится в монографии [17, гл. III, § 1].

Пусть $\boldsymbol{\gamma}_\Pi\colon \boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}) \to \boldsymbol{L}^2(\Pi)$ – линейный непрерывный оператор такой, что $\boldsymbol{\gamma}_\Pi\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}|_\Pi$ для любой вектор-функции $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{V}_\Pi(\mathcal{P})$. Существование, единственность и непрерывность оператора $\boldsymbol{\gamma}_\Pi$, называемого *оператором следа*, вытекает из классических результатов о следах функций, принадлежащих пространствам Соболева (см., например, [18, § 2.4]).

Лемма 4. *Если* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}(\beta, \boldsymbol{f}, \zeta, \boldsymbol{u}_0)$, *то справедлива следующая оценка:*

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left(\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta\int\limits_0^\tau \|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{K(\beta,T,\eta)T}\left(\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \frac{\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P}))}}{K(\beta,T,\eta)} + \frac{2\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}\|\zeta\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Pi))}}{\eta}\right), \qquad (15)$$

где

$$K(\beta,T,\eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{\eta^2}\max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t \beta^2(s,t)\,ds + 1 > 0.$$

Доказательство. Отождествляя пространства $\boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P})$ и сопряжённое к нему $\boldsymbol{H}^*_\Pi(\mathcal{P})$ в соответствии с теоремой представления Рисса, приходим к цепочке вложений

$$\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}) \hookrightarrow \boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P}) \simeq \boldsymbol{H}^*_\Pi(\mathcal{P}) \hookrightarrow \boldsymbol{V}^*_\Pi(\mathcal{P}).$$

Заметив, что имеет место включение

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \in \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}^*_\Pi(\mathcal{P})),$$

и применив лемму 3 в предположении, что

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}), \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P}), \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u},$$

получаем, что почти всюду на $(0,T)$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} = 2\left\langle\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\boldsymbol{u}\right\rangle_{\boldsymbol{V}^*_\Pi(\mathcal{P})\times\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}. \qquad (16)$$

Поскольку $\boldsymbol{u}$ – слабое решение начально-краевой задачи (1)–(6), то

$$\left\langle\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\boldsymbol{v}\right\rangle_{\boldsymbol{V}^*_\Pi(\mathcal{P})\times\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} + \eta(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \left(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds, \nabla\boldsymbol{v}\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} =$$

$$= \int\limits_\Pi \zeta\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Pi + (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} \qquad (17)$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})$.

Подставляя $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)$ в (17) и принимая во внимание (16), приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + 2\eta\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} + 2\left(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds, \nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} =$$

$$= 2\int\limits_\Pi \zeta(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x})\,d\Pi + 2(\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t),\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t))_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}. \qquad (18)$$

Затем, применяя неравенства Гёльдера и Юнга, находим

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+2\eta\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\leqslant\eta\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}+K(\beta,T,\eta)\eta\int\limits_0^t\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds+$$

$$+\frac{2}{\eta}\|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}+\frac{\|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}}{K(\beta,T,\eta)}+K(\beta,T,\eta)\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\leqslant K(\beta,T,\eta)\bigg(\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta\int\limits_0^t\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\bigg)+$$

$$+\frac{2}{\eta}\|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}+\frac{\|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}}{K(\beta,T,\eta)}.$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t от 0 до τ:

$$\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta\int\limits_0^\tau\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+K(\beta,T,\eta)\int\limits_0^\tau\bigg(\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta\int\limits_0^t\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\bigg)\,dt+$$

$$+\frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\int\limits_0^\tau\|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt+\frac{2\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}}{\eta}\int\limits_0^\tau\|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\,dt.$$

Наконец, применив лемму Гронуолла–Беллмана, получим следующую оценку:

$$\max_{\tau\in[0,T]}\bigg(\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\eta\int\limits_0^\tau\|\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\bigg)\leqslant$$

$$\leqslant e^{K(\beta,T,\eta)T}\bigg(\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}+\frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\int\limits_0^T\|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt+\frac{2\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}}{\eta}\int\limits_0^T\|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\,dt\bigg),$$

из которой и вытекает требуемое неравенство (15). Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы. Для нахождения слабого решения $\boldsymbol{u}$ построим последовательность приближённых решений $\{\boldsymbol{u}_m\}_{m=1}^\infty$ по методу Фаэдо–Галёркина, а затем осуществим предельный переход при $m\to\infty$, используя равномерную ограниченность норм $\{\|\boldsymbol{u}_m\|_{\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}))}\}_{m=1}^\infty$.

Приближённые решения будем искать в виде сумм:

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x},t)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^m g_{mj}(t)\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathcal{P},\quad t\in(0,T),$$

где $g_{mj}\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ – неизвестные функции и $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^\infty$ – полная последовательность в $\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})$, образующая ортонормированный базис в $\boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P})$.

Зафиксируем произвольное натуральное число m. Рассмотрим задачу Коши

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{v}_k\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta(\nabla \boldsymbol{u}_m, \nabla \boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \left(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla \boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\,ds, \nabla \boldsymbol{v}_k\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} =$$

$$= \int\limits_\Pi \zeta \boldsymbol{v}_k \cdot \mathbf{n}\,d\Pi + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0,T), \quad k = \overline{1,m}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x},0) = \sum_{k=1}^m (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}. \tag{20}$$

Линейная интегро-дифференциальная система (19) с начальным условием (20) единственным образом определяет функции g_{mk} на всём отрезке $[0,T]$. Выведем независящие от параметра m оценки решений задачи (19), (20).

Предположим, что вектор-функция $\boldsymbol{u}_m$ удовлетворяет (19) и (20). Умножим обе части (19) на $g_{mk}(t)$. Складывая полученные равенства по $k = \overline{1,m}$, имеем

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{u}_m\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta(\nabla \boldsymbol{u}_m, \nabla \boldsymbol{u}_m)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \left(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla \boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\,ds, \nabla \boldsymbol{u}_m\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} =$$

$$= \int\limits_\Pi \zeta \boldsymbol{u}_m \cdot \mathbf{n}\,d\Pi + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0,T). \tag{21}$$

Умножим обе части равенства (21) на 2. С помощью элементарных преобразований приходим к следующему равенству:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + 2\eta\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} + 2\left(\int\limits_0^t \beta(s,t)\nabla \boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\,ds, \nabla \boldsymbol{u}_m\right)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} =$$

$$= 2\int\limits_\Pi \zeta \boldsymbol{u}_m \cdot \mathbf{n}\,d\Pi + 2(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0,T).$$

Затем, применяя неравенства Гёльдера и Юнга, получаем

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + 2\eta\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} \leqslant$$

$$\leqslant \eta\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} + K(\beta,T,\eta)\eta\int\limits_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds + \frac{2}{\eta}\|\zeta\|^2_{L^2(\Pi)}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))} +$$

$$+ \frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + K(\beta,T,\eta)\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0,T),$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})} \leqslant K(\beta,T,\eta)\left(\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta\int\limits_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\right) +$$

$$+ \frac{2}{\eta}\|\zeta\|^2_{L^2(\Pi)}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))} + \frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0,T). \tag{22}$$

Проинтегрируем обе части неравенства (22) по t от 0 до τ:

$$\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta \int_0^\tau \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + K(\beta,T,\eta)\int_0^\tau \bigg(\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds\bigg)\,dt +$$

$$+\frac{2}{\eta}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}\int_0^\tau \|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\,dt + \frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\int_0^\tau \|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt.$$

Из последнего неравенства с помощью леммы Гронуолла–Беллмана выводим оценку

$$\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta \int_0^\tau \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{K(\beta,T,\eta)\tau}\bigg(\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \frac{2}{\eta}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}\int_0^\tau \|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\,dt +$$

$$+\frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\int_0^\tau \|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt\bigg). \tag{23}$$

Полагая $\tau = T$ в (23) и принимая во внимание соотношения

$$\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} = \sum_{k=1}^m (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_k)^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} \leqslant \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}, \quad m\in\mathbb{N},$$

получаем оценку

$$\|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,T)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \eta \int_0^T \|\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\|^2_{\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{K(\beta,T,\eta)T}\bigg(\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})} + \frac{2}{\eta}\|\boldsymbol{\gamma}_\Pi\|^2_{\mathcal{L}(\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}),\boldsymbol{L}^2(\Pi))}\int_0^T \|\zeta(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Pi)}\,dt +$$

$$+\frac{1}{K(\beta,T,\eta)}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\,dt\bigg). \tag{24}$$

Заметим, что правая часть неравенства (24) не зависит от m. Следовательно, имеет место равномерная по m ограниченность норм $\{\|\boldsymbol{u}_m\|_{\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}))}\}_{m=1}^\infty$. Поэтому, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), получаем, что

$$\boldsymbol{u}_m \to \boldsymbol{u} \;\text{ слабо в }\; \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})) \;\text{ при }\; m\to\infty \tag{25}$$

для некоторой вектор-функции $\boldsymbol{u}$ из пространства $\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P}))$.

Умножим обе части равенства (19) на произвольную C^∞-гладкую функцию φ с носителем, содержащимся в интервале $(0,T)$, и проинтегрируем по t от 0 до T. Применив интегрирование по частям к первому слагаемому из левой части полученного равенства, приходим к соотношению

$$-\int_0^T(\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi'\,dt+\eta\int_0^T(\nabla\boldsymbol{u}_m,\nabla\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt+\int_0^T\bigg(\int_0^t\beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}_m(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\boldsymbol{v}_k\bigg)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt=$$

$$=\int_0^T\bigg(\int_\Pi\zeta\boldsymbol{v}_k\cdot\mathbf{n}\,d\Pi\bigg)\varphi\,dt+\int_0^T(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt,\quad k=\overline{1,m},\tag{26}$$

где штрих обозначает классическую производную по t.

Принимая во внимание слабую сходимость (25), перейдём к пределу при $m\to\infty$ в равенстве (26) и в результате получим

$$-\int_0^T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi'\,dt+\eta\int_0^T(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt+\int_0^T\bigg(\int_0^t\beta(s,t)\nabla\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\boldsymbol{v}_k\bigg)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt=$$

$$=\int_0^T\bigg(\int_\Pi\zeta\boldsymbol{v}_k\cdot\mathbf{n}\,d\Pi\bigg)\varphi\,dt+\int_0^T(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_k)_{\boldsymbol{L}^2(\mathcal{P})}\varphi\,dt\tag{27}$$

для каждого $k\in\mathbb{N}$. Поскольку $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^\infty$ – полная последовательность в пространстве $\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})$, равенство (27) останется справедливым, если в нем заменить $\boldsymbol{v}_k$ на произвольную вектор-функцию $\boldsymbol{v}$ из пространства $\boldsymbol{V}_\Pi(\mathcal{P})$. Отсюда, в частности, следует включение

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\in\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{V}_\Pi^*(\mathcal{P})).$$

Поэтому, снова используя лемму 3, получаем, что $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H}_\Pi(\mathcal{P}))$.

Кроме того, с учётом соотношения (20) нетрудно проверить, что для вектор-функции $\boldsymbol{u}$ выполнено начальное условие $\boldsymbol{u}(\,\cdot\,,0)=\boldsymbol{u}_0$. Таким образом, установлено, что $\boldsymbol{u}$ – слабое решение начально-краевой задачи (1)–(6).

Покажем теперь, что найденное нами слабое решение $\boldsymbol{u}$ является единственным. Предположим, что

$$\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{u}_{**}\in\boldsymbol{U}(\beta,\boldsymbol{f},\zeta,\boldsymbol{u}_0),\quad\widetilde{\boldsymbol{u}}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{u}_*-\boldsymbol{u}_{**}.$$

Очевидно, что имеет место включение $\widetilde{\boldsymbol{u}}\in\boldsymbol{U}(\beta,\mathbf{0},0,\mathbf{0})$. Тогда, согласно лемме 4, получаем, что $\widetilde{\boldsymbol{u}}\equiv\mathbf{0}$ и, следовательно, $\boldsymbol{u}_*\equiv\boldsymbol{u}_{**}$.

Наконец, интегрируя обе части равенства (18) по t от 0 до τ, выводим энергетическое равенство (14). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Panasenko G., Pileckas K.* Flows in a tube structure: equation on the graph // J. of Math. Phys. 2014. V. 55. Art. ID 081505.
2. *Provotorov V.V., Provotorova E.N.* Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 4. С. 431–443.
3. *Baranovskii E.S., Provotorov V.V., Artemov M.A., Zhabko A.P.* Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. V. 13. № 7. Art. ID 1300.
4. *Astarita G., Marucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. New York, 1974.

5. *Cioranescu D., Girault V., Rajagopal K.R.* Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type. Cham, 2016.
6. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3–98.
7. *Saut J.-C.* Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Lect. on the Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations. Part 3. Somerville, 2013. P. 325–393.
8. *Baranovskii E.S.* A novel 3D model for non-Newtonian fluid flows in a pipe network // Math. Methods in the Appl. Sci. 2021. V. 44. № 5. P. 3827–3839.
9. *Рагулин В.В.* К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления и напора // Динамика сплошной среды. 1976. Т. 27. С. 78–92.
10. *Oskolkov A.P., Shadiev R.* Towards a theory of global solvability on $[0,\infty)$ of initial-boundary value problems for the equations of motion of Oldroyd and Kelvin–Voight fluids // J. of Math. Sci. 1994. V. 68. P. 240–253.
11. *Oskolkov A.P.* Smooth global solutions of initial boundary-value problems for the equations of Oldroyd fluids and of their ϵ-approximations // J. of Math. Sci. 1998. V. 89. P. 1750–1763.
12. *Bir B., Goswami D.* On a three step two-grid finite element method for the Oldroyd model of order one // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Bd. 101. № 11. Art. ID e202000373.
13. *Beirão da Veiga H.* On the regularity of flows with Ladyzhenskaya shear dependent viscosity and slip and non-slip boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 2005. V. 58. P. 552–577.
14. *Baranovskii E.S., Artemov M.A.* Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // Acta Applicandae Mathematicae. 2017. V. 147. № 1. P. 197–210.
15. *Baranovskii E.S.* Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Comm. on Pure and Appl. Anal. 2019. V. 18. № 2. P. 735–750.
16. *Galdi G.P.* An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations. Steady-State Problems. New York, 2011.
17. *Temam R.* Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Amsterdam; New York; Oxford, 1977.
18. *Nečas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Heidelberg, 2012.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 21.02.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.