ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 467–482

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958+517.984.5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© 2023 г. Д. А. Закора

Исследуется задача о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющей ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Доказано, что существенный спектр задачи представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси, за исключением, быть может, конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением.

DOI: 10.31857/S0374064123040040, EDN: AMZKDH

1. Постановка задачи и формулировка основного утверждения. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью $n \geqslant 2$ вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный из Ω.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях смеси. Разыскивая решения соответствующей линеаризованной однородной задачи, зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где λ – спектральный параметр, придём к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + \nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) = \lambda\mathbf{u}_i, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i) = \lambda\rho_i, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(x)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ – поле скоростей i-й компоненты смеси, $\rho_i = \rho_i(x)$ – симметризованная динамическая плотность, $\rho_{i0} = \rho_{i0}(x_3) := \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$ – плотность i-й компоненты смеси в состоянии равновесия, g – ускорение свободного падения, $c_i > 0$, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ – заданные физические константы, $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij} + \lambda_{ij})\nabla\mathrm{div}$. Матрицы вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$ подчинены условиям

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} \geqslant 0. \tag{2}$$

Математическое исследование моделей движения многокомпонентных сред началось относительно недавно. Представление о различных моделях, а также возникающих при этом математических задачах, можно получить из монографий [1] и [2], а также обзора [3]. В работах [4, 5] получены первые результаты по слабой разрешимости нелинейной модели многокомпонентной смеси, заполняющей всё пространство $\mathbb{R}^3$. В следующей работе тех же авторов [6] изучается вопрос единственности решения в случае отсутствия внешних сил и взаимодействия между компонентами смеси. Значимые результаты по разрешимости нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область, получены в [7]. Система (1) следует из эволюционной задачи, возникающей при линеаризации нелинейной модели из [7] относительно состояния покоя.

Далее система (1) будет трактоваться в виде следующей спектральной задачи для замкнутого оператора $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \tag{3}$$

Определение 1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$, состоящее из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым.

Определим матрицы $\mathbf{\Phi} := \operatorname{diag}(c_1\rho_{10}(x_3), \ldots, c_n\rho_{n0}(x_3))$ и $\mathbf{R} := \operatorname{diag}(\rho_{10}(x_3), \ldots, \rho_{n0}(x_3))$.

Основным утверждением работы является следующая

Теорема. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ расположен на действительной положительной полуоси, за исключением, быть может, конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \bigcup \Lambda_L$, где*

$$\Lambda_E := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}\},$$

$$\Lambda_L := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}) = 0, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = c^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \to \infty, \tag{4}$$

$$c := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega} (\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2} + 2\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2})\, d\Omega. \tag{5}$$

Замечание 1. Из условий (2) следует, что $2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} > 0$. Отсюда и из условия $\mathbf{\Phi} > 0$ очевидно, что множество Λ_E представляет собой объединение n отрезков, расположенных на положительной полуоси. Таким же образом устроено и множество Λ_L.

В случае $n = 1$ с некоторыми изменениями спектральная задача (1) изучена в [8]. При этом исследование опиралось на результаты статьи [9], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. В настоящей работе следуем тому же плану. Отметим, что в [10] с использованием результатов статьи [11] рассмотрен существенный спектр линеаризованного оператора Навье–Стокса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, с C^2-гладкой границей. При этом не применялась техника псевдодифференциальных операторов.

2. Операторная формулировка спектральной задачи. Введём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})$, $j = \overline{1, n}$, со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})} := \int\limits_{\Omega} \rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}(x) \cdot \overline{\mathbf{v}(x)}\, d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})} = \int\limits_{\Omega} \rho_{j0}(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\, d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : (f, \rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1 := \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}) = \{\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)^{\mathrm{т}} : \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}), \quad j = \overline{1, n}\},$$

$$\mathcal{H}_2 := \bigoplus_{j=1}^{n} L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) = \{\rho := (\rho_1, \ldots, \rho_n)^{\mathrm{т}} : \rho_j \in L_{2,\rho_{j0}}(\Omega), \quad j = \overline{1, n}\}.$$

Здесь и далее знак $^{\mathrm{т}}$ означает операцию транспонирования.

Через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать векторные и скалярные пространства Соболева со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbf{L}_2(\Omega) \equiv \mathbf{L}_2(\Omega, 1)$.

Далее через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_2)$ и $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_2)$ обозначены алгебра линейных ограниченных операторов и класс линейных компактных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H};\mathcal{H})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}) := \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H};\mathcal{H})$.

Введём оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L\mathbf{u} := \left(\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^n L_{1j}\mathbf{u}_j, \ldots, \frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^n L_{nj}\mathbf{u}_j\right)^{\mathrm{т}}, \quad \mathcal{D}(L) := \bigoplus_{j=1}^n \{\mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) : \mathbf{u}_j = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega\}. \quad (6)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2). Тогда оператор L самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_1$, $L^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Энергетическое пространство $\mathcal{H}_L$ оператора L находится по формуле*

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{D}(L^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^n \{\mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u}_j = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_L \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму

$$L_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}\sum_{l=1}^3 \int_\Omega \nabla u_j^{(l)} \cdot \overline{\nabla v_i^{(l)}}\, d\Omega + \sum_{i,j=1}^n (\mu_{ij}+\lambda_{ij})\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}_j\, \overline{\operatorname{div}\mathbf{v}_i}\, d\Omega, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L.$$

Из (2) следует, что $\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda} > 0$. Пусть $\|\mathbf{M}\|$ и $\gamma(\mathbf{M})$ – норма и нижняя грань матрицы $\mathbf{M}$ соответственно. Используя неравенство Фридрихса (см. [12, гл. 18, теорема 18.1]), найдём

$$L_0(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \frac{\gamma(\mathbf{M})}{2}\min\{1, C_1^{-1}\}\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^3\int_\Omega (|\nabla u_j^{(l)}|^2 + |u_j^{(l)}|^2)\, d\Omega = \frac{\gamma(\mathbf{M})}{2}\min\{1, C_1^{-1}\}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)},$$

$$L_0(\mathbf{u},\mathbf{u}) \leqslant \ldots \leqslant \max\{\|\mathbf{M}\|, 3\|\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}\|\}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)} \quad \text{для любого} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{H}_L.$$

Здесь во второй строке опущен ряд простых оценок. Отсюда следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\ ,\ )$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [13, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [13, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_0 такой, что

$$L_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (L_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \text{для любых} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L,$$

$\mathcal{D}(L_0) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L :$ существует $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ такой, что $L_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}$ для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L\}$.

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти найдём, что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$ справедливы равенства

$$(L_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}\sum_{l=1}^3\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial\mathbf{n}}\overline{v_i^{(l)}}\, dS +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n (\mu_{ij}+\lambda_{ij})\int_{\partial\Omega} \operatorname{div}\mathbf{u}_j \cdot (\overline{\mathbf{v}_i}\mathbf{n})\, dS = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i\right)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})},$$

а значит, $L_0\mathbf{u} = L\mathbf{u}$ (см. (6)), поскольку $\mathcal{H}_L$ плотно в $\mathcal{H}_1$. Далее, элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0)$ – это в точности обобщённое решение (см. [12, гл. 11, определение 11.1]) краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1,n},$$

при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})$. Из теоремы об априорных оценках (см., например, [14, теорема 2.2]) следует, что $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}(L)$. Тогда $L_0 = L$. Компактность оператора L^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_L$ в $\mathcal{H}_1$. Лемма доказана.

Введём оператор $T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_1$ по закону

$$T\mathbf{u}:=\Big(-\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_1),\ldots,-\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^{n}a_{nj}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_n)\Big)^{\mathrm{т}},\quad \mathcal{D}(T):=\mathcal{H}_1. \tag{7}$$

Лемма 2. *Оператор T ограничен, самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Напомним, что $a_{ij}=a_{ji}\geqslant 0$, $i,j=\overline{1,n}$. Отсюда имеем неравенства

$$\|T\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}=\sum_{i=1}^{n}\Big\|-\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}=\sum_{i=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)})\Big)^2\leqslant n\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)})^2\leqslant$$

$$\leqslant 4n^2\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\leqslant\frac{4n^2\max\limits_{i,j}\{a_{ij}^2\}}{\min\limits_{j}\min\limits_{x\in\Omega}\rho_{j0}(x_3)}\|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}\quad\text{для любого}\quad \mathbf{u}\in\mathcal{H}_1,$$

т.е. оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Далее для любого $\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1$ имеем

$$(T\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=-\sum_{i>j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}-\sum_{i<j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=$$

$$=-\sum_{i>j}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}-\sum_{j<i}a_{ji}(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=\sum_{i>j}a_{ij}\|\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\geqslant 0,$$

т.е. оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. Лемма доказана.

Введём оператор $B:\mathcal{D}(B)\subset\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$B\mathbf{u}:=\Big(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1),\ldots,-\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n)\Big)^{\mathrm{т}},$$

$$\mathcal{D}(B):=\bigoplus_{j=1}^{n}\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{L}_2(\Omega:\operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\in\mathbf{L}_2(\Omega),\quad \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0,\quad x\in\partial\Omega\}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Сопряжённый оператор $B^*:\mathcal{D}(B^*)\subset\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$ имеет вид*

$$B^*\rho=\Big(\nabla\Big(\frac{c_1^{1/2}\rho_1}{\rho_{10}^{1/2}}\Big),\ldots,\nabla\Big(\frac{c_n^{1/2}\rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}}\Big)\Big)^{\mathrm{т}},\quad \mathcal{D}(B^*)=\bigoplus_{j=1}^{n}\{W_2^1(\Omega)\bigcap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)\}.$$

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$\mathcal{D}(B^*)=\{\rho\in\mathcal{H}_2$: существует $\eta\in\mathcal{H}_2$ такой, что $(B\mathbf{u},\rho)_{\mathcal{H}_2}=(\mathbf{u},\eta)_{\mathcal{H}_1}$ для любых $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(B)\}$, а значит, $\rho\in\bigoplus_{j=1}^{n}\{W_2^1(\Omega)\bigcap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)\}=\mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$(B\mathbf{u},\rho)_{\mathcal{H}_2}=\sum_{j=1}^{n}\Big(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j),\rho_j\Big)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)}=-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\,d\Omega=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\partial\Omega}c_j^{1/2}\rho_{j0}^{1/2}\overline{\rho_j}(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n})\,dS+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\rho_{j0}\mathbf{u}_j\nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}}\Big)\,d\Omega=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\Big(\mathbf{u}_j,\nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}}\Big)\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})}=(\mathbf{u},B^*\rho)_{\mathcal{H}_1}\quad\text{для любого}\quad \mathbf{u}\in\mathcal{D}(B),\quad \rho\in\mathcal{D}(B^*).$$

Лемма доказана.

Введём оператор $A := L + T$ (см. (6), (7)). Из лемм 1, 2 и определения оператора B (см. (8)) следует, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(L^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [13, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3). Следовательно, операторы $BA^{-1/2}$, BA^{-1} ограниченно действуют из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$:

$$Q := BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \tag{9}$$

Лемма 4. *Оператор* $A^{-1/2}B^*$ *замыкаем,* $\overline{A^{-1/2}B^*} = Q^*$, $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$. *Аналогичные утверждения верны и для оператора* $A^{-1}B^*$.

Доказательство. Учитывая $Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, для любых $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$ имеем

$$(Q\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q^*\rho)_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$, оператор $A^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до оператора Q^*. Лемма доказана.

Наша цель – записать максимальную L_2-реализацию оператора системы (1) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (6)–(9) операторов. Сужение максимальной L_2-реализации оператора системы (1) на $\mathcal{D}(A)\bigoplus\mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в виде

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A)\bigoplus\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \tag{10}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т.е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Этот оператор $\overline{\mathcal{A}_0}$ и будет максимальной L_2-реализацией оператора системы (1). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах [11, 15, 16] и др. Тем не менее приведём полное доказательство.

Лемма 5. *Оператор* $\mathcal{A}_0$ *замыкаем, и* $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$ *– замкнутый максимальный аккретивный оператор. Оператор* $\mathcal{A}$ *представим в следующем виде:*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -QA^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & QQ^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{\xi = (\mathbf{u}, \rho)^{\mathrm{т}} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1\bigoplus\mathcal{H}_2 : \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A)\}. \tag{11}$$

Доказательство. 1. Оператор $\mathcal{A}_0$ (см. (10)), очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ будет выполнено $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$, т.е. оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит, допускает замыкание (см. [17, гл. I, § 4, п. 2]).

Найдём замыкание оператора $\mathcal{A}_0$, используя сначала включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n, \rho_n)^{\mathrm{т}} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad \xi_n \to \xi := (\mathbf{u}, \rho)^{\mathrm{т}}, \quad \mathcal{A}_0\xi_n \to \xi_0 := (\mathbf{u}_0, \rho_0)^{\mathrm{т}}. \tag{12}$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n \in \mathcal{D}(A)$ и $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n = \mathbf{u}_n + (BA^{-1})^*\rho_n \to \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho$, $A(\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n) \to \mathbf{u}_0$. Оператор A самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)$ и равенство $A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (12) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \to \rho_0$. Но оператор B, как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{\xi = (\mathbf{u}, \rho)^{\mathrm{т}} \in \mathcal{H} : \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}), \ \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. лемму 1 и (8)). Отсюда следует равенство $(BA^{-1})^* = (BA^{-1/2}A^{-1/2})^* = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^* = A^{-1/2}Q^*$ (см. (9)). Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho = \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ линеал, следует, что $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(A^{1/2})\subset\mathcal{D}(B)\subset\mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u}=(\overline{B}A^{-1/2})A^{1/2}\mathbf{u}=QA^{1/2}\mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(\mathbf{u}+A^{-1/2}Q^*\rho)\\ -QA^{1/2}\mathbf{u}\end{pmatrix},\quad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})=\{\xi=(\mathbf{u},\rho)^{\mathrm{т}}\in\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\bigoplus\mathcal{H}_2:\mathbf{u}+A^{-1/2}Q^*\rho\in\mathcal{D}(A)\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (11) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}_0}$.

2. Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_0$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi=(\mathbf{u},\rho)^{\mathrm{т}}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(A^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (11) оператора $\mathcal{A}$ с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}\xi,\xi)_{\mathcal{H}}=\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}\geqslant 0$ для любого $\xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}$ достаточно установить (см. [17, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A})\bigcap\{\lambda<0\}\neq\varnothing$, где $\rho(\mathcal{A})$ – резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda\neq 0$ непосредственно проверяется (см. (15)), что

$$\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-\lambda^{-1}Q^*\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I-\lambda A^{-1}-\lambda^{-1}Q^*Q&0\\0&-\lambda I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\ \lambda^{-1}Q&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Введём оператор-функцию $L(\lambda):=I-\lambda A^{-1}-\lambda^{-1}Q^*Q$. Очевидно, что при $\lambda<0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L^{-1}(\lambda)$: $L^{-1}(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda<0$ тогда найдём, что существует

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1/2}&0\\-\lambda^{-1}Q&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L^{-1}(\lambda)&0\\0&-\lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1/2}&\lambda^{-1}Q^*\\0&I\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}&\lambda^{-1}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)Q^*\\-\lambda^{-1}QL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}&-\lambda^{-1}-\lambda^{-2}QL^{-1}(\lambda)Q^*\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

$$L(\lambda)=I-\lambda A^{-1}-\lambda^{-1}Q^*Q, \quad (14)$$

а значит, $\{\lambda<0\}\subset\rho(\mathcal{A})$. Лемма доказана.

Таким образом, спектральную задачу (1) можно записать в виде (3) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}$.

Замечание 2. Формула (14) при всех $\lambda\notin\sigma(L(\lambda))\bigcup\{0\}$, где $\sigma(L(\lambda))$ – спектр оператор-функции $L(\lambda)$, даёт представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$. Из (14), в частности, вытекает, что $\sigma(\mathcal{A})\backslash\{0\}\subset\sigma(L(\lambda))$. Более того, из факторизации (13) и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [18, гл. XVII, § 3, теорема 3.1]) следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(L(\lambda))$. Можно доказать, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})=\sigma_{\mathrm{ess}}(L(\lambda))$.

Замечание 3. Имеют место факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Пусть

$$A_{kl}\in\mathcal{L}(E_l,E_k),\quad k,l=1,2,\quad A_{22}^{-1}\in\mathcal{L}(E_2),\quad D_1:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}.$$

Если $D_1^{-1}\in\mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\left(\begin{pmatrix}I&A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\A_{22}^{-1}A_{21}&I\end{pmatrix}\right)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}D_1^{-1}&-D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\-A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}&A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(E_1\times E_2). \quad (15)$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{16}$$

3. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведём определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [14; 19; 20, § 1; 21]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathfrak{L}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

где

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad D := (D_1, D_2, D_3) := \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\frac{\partial}{\partial x_2}, -i\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$
$$\mathbf{v}(x) := (v_1(x), \ldots, v_m(x))^{\mathrm{т}}, \quad \mathbf{f}(x) := (f_1(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{т}}.$$

Пусть $\mathfrak{L}(x,\xi)$, $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{т}}$, – полиномиальная матрица, получаемая из (17) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (17) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [19, с. 375], а также [14]).

Определение 2 (см. [19, с. 376]). Оператор $\mathfrak{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi\det\mathfrak{L}(x,\xi) \neq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi\det\mathfrak{L}(x,\xi) = \det\pi\mathfrak{L}(x,\xi)$, где $\pi\mathfrak{L}$ – главная часть матрицы $\mathfrak{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса–Ниренберга см. в [19, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введём, согласно [20, 21], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$, параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i = \mathrm{const}$ есть линии кривизны. Или в векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1, y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 – расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1 \times \partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находилось в точке z_0. Пусть $E_i(y')$, $i = 1, 2$, – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $(\partial z/\partial y_i)(\partial z/\partial y_j) = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Рассмотрим теперь систему краевых условий

$$\mathfrak{B}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{18}$$

где $\mathfrak{B}(x, D)$ – матрица размера $r \times m$, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Запишем операторы краевой задачи (17), (18) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathfrak{L}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \pi\mathfrak{L}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\right), \quad \pi\mathfrak{B}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \pi\mathfrak{B}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\right).$$

Определение 3 (см. [19, с. 380], а также [20, с. 12]). Краевая задача (17), (18) называется *эллиптической*, если выполнено определение 2 и условие Шапиро–Лопатинского:

$$\operatorname{rank} \int\limits_{\gamma_+} \pi\mathfrak{B}(0, \xi', \xi_3)(\pi\mathfrak{L}(0, \xi', \xi_3))^{-1}(I_m, \xi_3 I_m)\, d\xi_3 = r$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Здесь I_m – единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $(I_m, \xi_3 I_m)$ обозначена составная матрица размера $m \times 2m$, γ_+ – спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det \pi\mathfrak{L}(0,\xi',\xi_3)=0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро–Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения.

Лемма 6 (см. [20, с. 14]). *В построенной выше локальной системе координат операторы* $\partial/\partial x_i$ *принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{2}(1-K_jy_3)^{-1}E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}+N_i\frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j, $j=1,2$, *– главные кривизны поверхности* $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta:=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{\mathrm{т}},\quad \beta_l:=\sum_{j=1}^{2}E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_l}{\partial y_j}\xi_j,\quad l=1,2,3,\quad \alpha:=\beta+\xi_3N, \tag{19}$$

тогда $\beta^{\mathrm{т}}N=0$, $N^{\mathrm{т}}\beta=0$, $N^{\mathrm{т}}N=1$. Положим $|\xi'|^2:=|\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2:=\beta^{\mathrm{т}}\beta=E_1^{-1}\xi_1^2+ {}+E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение:

$$|\xi|^2:=\alpha^{\mathrm{т}}\alpha=|\xi'|^2+\xi_3^2.$$

Лемма 7 (см. [20, с. 15]). *Во введённой выше локальной системе координат при* $y_3=0$ *имеют место следующие формулы для главных символов:*

$$\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)=i\alpha_l,\quad \sigma_0(\nabla)=i\alpha,\quad \sigma_0(\mathrm{div})=i\alpha^{\mathrm{т}},\quad \sigma_0(\Delta)=-|\xi|^2=-(|\xi'|^2+\xi_3^2).$$

Лемма 8 (см. [20, с. 16]). *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней* ξ_3*-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку* $\xi_3=i|\xi'|$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\frac{d\xi_3}{|\xi|^2}=\frac{\pi}{|\xi'|},\quad \int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3\,d\xi_3}{|\xi|^2}=\pi i,\quad \int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3^2\,d\xi_3}{|\xi|^2}=-\pi|\xi'|,\quad \int\limits_{\gamma_+}\frac{d\xi_3}{|\xi|^4}=\frac{\pi}{2|\xi'|^3},$$

$$\int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3\,d\xi_3}{|\xi|^4}=0,\quad \int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3^2\,d\xi_3}{|\xi|^4}=\frac{\pi}{2|\xi'|},\quad \int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3^3\,d\xi_3}{|\xi|^4}=\pi i,\quad |\xi|^2=|\xi'|^2+\xi_3^2.$$

4. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$. Напомним (см. определение 1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из тех точек $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Можно проверить, что система из (1) составляет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [19, с. 375], а также [14]). Из работы [9] следует, что оператор $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы и краевого условия в (1) главные части:

$$\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j+c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\nabla\rho_i=\mathbf{0},\quad c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_i-\lambda\rho_i=0,\quad x\in\Omega,$$

$$\mathbf{u}_i=\mathbf{0},\quad x\in\partial\Omega,\quad i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(x,D)$ матричный дифференциальный оператор системы из (1) – это матрица размера $4n\times 4n$, а через $\mathfrak{B}(x,D):=(I_{3n},0_{3n\times n})$ матрицу, отвечающую граничным условиям из (1) – это матрица размера $3n\times 4n$, $0_{3n\times n}$ – нулевая матрица соответствующего размера. В этом случае главная часть $\pi\mathfrak{L}_\lambda(x,D)$ оператора $\mathfrak{L}_\lambda(x,D)$ определяется системой (20), а $\pi\mathfrak{B}(x,D)=\mathfrak{B}(x,D)$.

Таким образом, существенный спектр исследуемой задачи будет состоять из точек $\lambda\in\mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевой задачи (20).

Лемма 9. *Дифференциальный оператор $\mathfrak{L}_\lambda(x,D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}\subset\subset\mathbb{R}^3$ при $\lambda\notin\Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E=\{\lambda\in\mathbb{C}:\det\left(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\right)=0,\quad x\in\overline{\Omega}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathfrak{L}_\lambda(x,D))=\pi\mathfrak{L}_\lambda(x,\xi)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}}$, системы (1), определяемый системой (20):

$$\pi\mathfrak{L}_\lambda(x,\xi)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi\\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^{\mathrm{T}} & -\lambda I_n\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Здесь и далее знак $\otimes$ означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [22, гл. 8, п. 8.2]. Матрицы вязкостей и плотностей имеют вид $\mathbf{M}=\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda}=\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi}=\operatorname{diag}\left(c_1\rho_{10}(x_3),\ldots,c_n\rho_{n0}(x_3)\right)$.

Обозначим

$$\pi\mathfrak{L}_\lambda(x,\xi)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi\\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^{\mathrm{T}} & -\lambda I_n\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \tag{22}$$

и применим факторизацию (16) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^{\mathrm{T}}\xi=|\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (2) и замечание 1), что

$$A_{11}^{-1}=(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=-\lambda I_n-(\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^{\mathrm{T}})(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi)=\\ =-\lambda I_n-(\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^{\mathrm{T}})\frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\xi\xi^{\mathrm{T}})(\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi)=\\ =\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\ =\mathbf{\Phi}^{1/2}(I_n-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\ =\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}((2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\ =\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{\Phi}^{-1/2}.\end{gathered} \tag{23}$$

Через $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,\mathbf{a}^\perp,\mathbf{b}^\perp)$ обозначим матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ $(|\mathbf{a}^\perp|=|\mathbf{b}^\perp|=1)$, где $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\Gamma_\xi^{\mathrm{T}}\Gamma_\xi=I_3,\quad \Gamma_\xi^{\mathrm{T}}\xi=(|\xi|,0,0)^{\mathrm{T}}=:|\xi|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\xi^{\mathrm{T}}\xi\xi^{\mathrm{T}}\Gamma_\xi=\operatorname{diag}\left(|\xi|^2,0,0\right)=:|\xi|^2P_1. \tag{24}$$

Обозначим $\mathrm{S}_\xi:=I_n\otimes\Gamma_\xi$, тогда $\mathrm{S}_\xi^{\mathrm{T}}\mathrm{S}_\xi=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (16), (22)–(24) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём (см. определение 2), что

$$\pi\det\mathfrak{L}_\lambda(x,\xi)=\det\pi\mathfrak{L}_\lambda(x,\xi)=\det\begin{pmatrix}I & 0\\ A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & I\end{pmatrix}=$$

$$= \det\begin{pmatrix} \mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\xi\xi^{\text{т}} & 0_{3n\times n} \\ 0_{n\times 3n} & \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{\Phi}^{-1/2}\end{pmatrix} =$$

$$= \det \mathrm{S}_\xi^{\text{т}}(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\xi\xi^{\text{т}})\mathrm{S}_\xi \det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\det(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})) =$$

$$= \det(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2\Gamma_\xi^{\text{т}}\Gamma_\xi + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\Gamma_\xi^{\text{т}}\xi\xi^{\text{т}}\Gamma_\xi)\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\det(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})) =$$

$$= \det(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes|\xi|^2 P_1)\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\det(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})) =$$

$$= (|\xi|^2)^{3n}\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\det{}^2\mathbf{M}\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\det(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})) =$$

$$= (-1)^n|\xi|^{6n}\det{}^2\mathbf{M}\det(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}) \neq 0 \qquad (25)$$

для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, если только $\lambda\notin\Lambda_E$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Задача (1) эллиптична при* $\lambda\notin\Lambda_E\bigcup\Lambda_L$, *где*

$$\Lambda_L = \{\lambda\in\mathbb{C} : \det(\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}) = 0, \quad x\in\partial\Omega\}.$$

Доказательство. Прежде всего будем считать, что $\lambda\notin\Lambda_E$, поскольку по лемме 9 на множестве Λ_E оператор $\mathfrak{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (1) не является эллиптической (см. определение 3). Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1. Зафиксируем $z_0\in\partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в п. 3. Запишем операторную матрицу системы (1) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть, которая представляет собой операторную матрицу системы (20), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (21) с заменой ξ на α (см. (19) и лемму 7). При этом $\det\pi\mathfrak{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (25) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^{\text{т}}\alpha = \xi'^2+\xi_3^2$. Уравнение $\det\pi\mathfrak{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=0$ имеет $3n$-кратные ξ_3-корни $\xi_3=\pm i|\xi'|$ (см. (25)).

2. Найдём выражение для подынтегральной матрицы в определении 3. Обозначим

$$\pi\mathfrak{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3) = \begin{pmatrix}\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}} & \mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes i\alpha \\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes i\alpha^{\text{т}} & -\lambda I_n\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \qquad (26)$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi\mathfrak{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$, с помощью факторизации (16) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^{\text{т}}\alpha = (\beta^{\text{т}}+\xi_3N^{\text{т}})(\beta+\xi_3N) = \beta^{\text{т}}\beta+\xi_3^2 = \xi'^2+\xi_3^2 = |\xi|^2$ (см. (19)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (2) и замечание 1), что

$$A_{11}^{-1} = (\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}})^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}). \qquad (27)$$

Отсюда следуют (см. аналогичные вычисления в (23)) равенства

$$D_2^{-1} = (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = (\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{\Phi}^{-1/2})^{-1} =$$

$$= \mathbf{\Phi}^{1/2}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\bigotimes I_1. \qquad (28)$$

Из (26)–(28) имеем

$$A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} =$$

$$= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}(\mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes i\alpha)\mathbf{\Phi}^{1/2}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\bigotimes I_1(\mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes i\alpha^{\text{т}})A_{11}^{-1} =$$

$$= A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}\times$$

$$\times\frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) =$$

$$= A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}} =$$

$$= A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}})\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}} =$$

$$= A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}} =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) -$$

$$- \frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}} =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} +$$

$$+ (\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} + I_n + \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (\mathbf{M}^{-1} + \lambda(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1})\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}) =$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}}), \qquad (29)$$

$$-A_{11}A_{12}D_2^{-1} = -\frac{1}{|\xi|^4}(\mathbf{M}^{-1}\bigotimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\bigotimes\alpha\alpha^{\text{т}})(\mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes i\alpha)\times$$

$$\times\,\mathbf{\Phi}^{1/2}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\bigotimes I_1 =$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(\mathbf{M}^{-1} - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\bigotimes\alpha =$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\bigotimes\alpha =$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))\mathbf{\Phi}^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha =$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda\mathbf{\Phi}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\bigotimes\alpha = -\frac{i}{|\xi|^2}(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}))^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\bigotimes\alpha. \qquad (30)$$

Из определения 3 с учётом представления (26), факторизации (16) и формул (29), (30) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (1) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathfrak{B}(0,\xi',\xi_3)(\pi\mathfrak{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3))^{-1}(I_{4n},\xi_3 I_{4n})\,d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+}(I_{3n},0_{3n\times n})\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1} \\ *_{n\times 3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}(I_{4n},\xi_3 I_{4n})\,d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \bigg(\frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \bigotimes |\xi|^2 I_3 - (\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (\mathbf{\Phi} - \lambda(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1} \bigotimes \alpha\alpha^{\text{т}}),$$

$$- \frac{i}{|\xi|^2} (\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} \bigotimes \alpha \bigg) (I_{4n}, \xi_3 I_{4n})\, d\xi_3. \tag{31}$$

Здесь γ_+ – спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3 = i|\xi'|$, а символами $*_{n\times 3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены несущественные для вычислений матрицы соответствующих размеров.

3. Проведём вспомогательные вычисления. Пусть $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ – матрицы размера $n\times n$. Из (19) следует, что $\alpha\alpha^{\text{т}} = (\beta + \xi_3 N)(\beta^{\text{т}} + \xi_3 N^{\text{т}}) = \beta\beta^{\text{т}} + \xi_3(\beta N^{\text{т}} + N\beta^{\text{т}}) + \xi_3^2 NN^{\text{т}}$. Используя формулы из леммы 8, теперь вычислим

$$\mathcal{M} := \int\limits_{\gamma_+} \bigg(\frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{N} \bigotimes |\xi|^2 I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \alpha\alpha^{\text{т}}), \frac{1}{|\xi|^2} \mathbf{C} \bigotimes \alpha \bigg) (I_{4n}, \xi_3 I_{4n})\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \bigg(\mathbf{N} \bigotimes \frac{1}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \frac{1}{|\xi|^4} \alpha\alpha^{\text{т}}, \mathbf{C} \bigotimes \frac{1}{|\xi|^2} \alpha, \mathbf{N} \bigotimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \frac{\xi_3}{|\xi|^4} \alpha\alpha^{\text{т}}, \mathbf{C} \bigotimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} \alpha \bigg)\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \bigg(\mathbf{N} \bigotimes \frac{1}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \bigg[\frac{1}{|\xi|^4} \beta\beta^{\text{т}} + \frac{\xi_3}{|\xi|^4} (\beta N^{\text{т}} + N\beta^{\text{т}}) + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4} NN^{\text{т}} \bigg], \mathbf{C} \bigotimes \bigg[\frac{\xi_3}{|\xi|^2} \beta + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} N \bigg],$$

$$\mathbf{N} \bigotimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \bigg[\frac{\xi_3}{|\xi|^4} \beta\beta^{\text{т}} + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4} (\beta N^{\text{т}} + N\beta^{\text{т}}) + \frac{\xi_3^3}{|\xi|^4} NN^{\text{т}} \bigg], \mathbf{C} \bigotimes \bigg[\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} \beta + \frac{\xi_3^3}{|\xi|^2} N \bigg] \bigg)\, d\xi_3 =$$

$$= \bigg(\mathbf{N} \bigotimes \frac{\pi}{|\xi'|} I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \bigg[\frac{\pi}{2|\xi'|^3} \beta\beta^{\text{т}} + \frac{\pi}{2|\xi'|} NN^{\text{т}} \bigg], \mathbf{C} \bigotimes \bigg[\frac{\pi}{|\xi'|} \beta + \pi i N \bigg],$$

$$\mathbf{N} \bigotimes \pi i I_3 + \mathbf{P} \bigotimes \bigg[\frac{\pi}{2|\xi'|} (\beta N^{\text{т}} + N\beta^{\text{т}}) + \pi i NN^{\text{т}} \bigg], \mathbf{C} \bigotimes (\pi i \beta - \pi|\xi'|N) \bigg). \tag{32}$$

Через $\Gamma_\alpha := (|\xi'|^{-1}\beta, \mathbf{a}^\perp, N)$ обозначим матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi'|^{-1}\beta$, $\mathbf{a}^\perp$, N, где $\mathbf{a}^\perp$ ортогонален β и N, а $|\mathbf{a}^\perp| = 1$. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\Gamma_\alpha^{\text{т}} \Gamma_\alpha = I_3, \quad \Gamma_\alpha^{\text{т}} \beta = (|\xi'|, 0, 0)^{\text{т}} =: |\xi'|\mathbf{e}_1, \quad \Gamma_\alpha^{\text{т}} N = (0,0,1)^{\text{т}} =: \mathbf{e}_3,$$

$$\Gamma_\alpha^{\text{т}} \beta\beta^{\text{т}} \Gamma_\alpha = \operatorname{diag}(|\xi'|^2, 0, 0) =: |\xi'|^2 P_1, \quad \Gamma_\alpha^{\text{т}} NN^{\text{т}} \Gamma_\alpha = \operatorname{diag}(0,0,1) =: P_3. \tag{33}$$

Обозначим $\mathrm{S}_\alpha := I_n \bigotimes \Gamma_\alpha$, тогда $\mathrm{S}_\alpha^{\text{т}} \mathrm{S}_\alpha = I_n \bigotimes I_3 = I_{3n}$. Из (32), (33) найдём

$$\mathcal{N} := \mathrm{S}_\alpha^{\text{т}} \mathcal{M} \operatorname{diag}(\mathrm{S}_\alpha, I_n \bigotimes I_1, \mathrm{S}_\alpha, I_n \bigotimes I_1) = \bigg(\frac{\pi}{|\xi'|} [\mathbf{N} \bigotimes I_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \bigotimes (P_1 + P_3)], \pi \mathbf{C} \bigotimes (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_3),$$

$$\pi i [\mathbf{N} \bigotimes I_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \bigotimes (2P_3 - i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^{\text{т}} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^{\text{т}}))], \pi i|\xi'| \mathbf{C} \bigotimes (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_3) \bigg). \tag{34}$$

Далее несложно вычислить, что спектр матрицы $2P_3 - i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^{\text{т}} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^{\text{т}})$ состоит из собственного значения $\lambda = 0$ кратности один и собственного значения $\lambda = 1$ кратности два. Обозначим через T матрицу, столбцами которой являются собственные элементы, а также соответствующий присоединённый элемент матрицы $2P_3 - i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^{\text{т}} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^{\text{т}})$, отвечающий точке $\lambda = 1$. Тогда

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения (см. (33)):

$$\mathrm{T}^{-1}(2P_3 - i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^{\mathrm{T}} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}))\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{-1}(P_1 + P_3)\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_3) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Из (34), (35) имеем

$$\mathcal{S} := (I_n \otimes \mathrm{T}^{-1})\mathcal{N}\,\mathrm{diag}\,(I_n \otimes \mathrm{T}, I_n \otimes I_1, I_n \otimes \mathrm{T}, I_n \otimes I_1) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{|\xi'|}\left[\mathbf{N} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{P} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \pi\sqrt{2}\mathbf{C} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \pi i\left[\mathbf{N} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{P} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \pi i\sqrt{2}|\xi'|\mathbf{C} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \tag{36}$$

Матрица $\mathcal{S}$ имеет размер $3n \times 8n$. Из теоремы Лапласа о вычислении определителей следует, что любой минор матрицы $\mathcal{S}$ порядка $3n$, который может быть отличен от нуля, непременно содержит в качестве множителя определитель $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P})$. Таким образом, если $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) = 0$, то $\mathrm{rank}\,\mathcal{S} < 3n$. С другой стороны, рассматривая минор матрицы $\mathcal{S}$, составленный из $3n$ строк и первых $3n$ столбцов, найдём, что

$$\det\frac{\pi}{|\xi'|}\left(\mathbf{N} \otimes I_3 + \frac{1}{2}\mathbf{P} \otimes (I_3 - P_1)\right) = \frac{\pi^{3n}}{|\xi'|^{3n}}\det\mathbf{N}\det^2\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\right) \neq 0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det\mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

Из проведённых рассуждений и равенств $\mathrm{rank}\,\mathcal{M} = \mathrm{rank}\,\mathcal{N} = \mathrm{rank}\,\mathcal{S}$ (см. (32), (34), (36)) следует, что $\mathrm{rank}\,\mathcal{M} = 3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det\mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

4. Применим проведённые рассуждения к матрице (31), являющейся частным случаем матрицы $\mathcal{M}$. Соответствующие матричные компоненты $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ легко определяются из сравнения $\mathcal{M}$ и матрицы (31). Учитывая, что $\det\mathbf{N} = \det\mathbf{M}^{-1} \neq 0$,

$$\det\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\right) = \det\left(\mathbf{M}^{-1} - \frac{1}{2}(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}(\mathbf{\Phi} - \lambda(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1}\right) =$$

$$= \det\left(\frac{1}{2}(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}(\mathbf{\Phi} - \lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))\mathbf{M}^{-1}\right) = \frac{\det(\mathbf{\Phi} - \lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))}{2^n\det\mathbf{M}\det(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))} \neq 0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$, найдём, что ранг матрицы (31) равен $3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$ (при этом также $\lambda \notin \Lambda_E$, как отмечено в начале доказательства). По определению 3 задача (1) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E \bigcup \Lambda_L$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедливо равенство* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \bigcup \Lambda_L$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Из определения 1, лемм 9, 10 и результатов [9] следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 5 доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [13, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [18, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана.

5. Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Доказательство факта, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ (или оператора $\mathcal{A}^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [23, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [23, гл. III, § 5, следствие 5.21 и пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение. *Определим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$ оператор*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 & -S_3^* \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix}, \quad T_1 = T_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \quad T_2 = T_2^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$

$$S_1 = S_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad S_2 = S_2^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2), \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1) \bigcap \sigma(T_2) = \varnothing$. Тогда невещественный спектр оператора $\mathcal{T}$ состоит из конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности.

Лемма 12. *Невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$. Предположим противное, тогда существует такой элемент $0 \neq \xi = (\mathbf{u}, \rho)^{\mathrm{т}} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, что (см. лемму 5)

$$\mathcal{A}\xi = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho, QA^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2} = 0$, а значит, $(A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho), \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Тогда $A^{1/2}Q^*\rho = 0$, а значит, $\rho = 0$, так как $\operatorname{Ker} Q^* = \{0\}$ (см. лемму 3, (9) и лемму 4).

Таким образом, точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. По лемме 11 точка $\lambda = 0$ – регулярная точка оператора $\mathcal{A}:\ 0 \in \rho(\mathcal{A})$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 5 следует, что (неотрицательный) оператор QQ^* является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(QQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 5 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (QQ^*)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & -A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1} \\ (QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из представления $A = L + T$, лемм 1 и 2 следует, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((QQ^*)^{-1}) \bigcap \{0\} = \varnothing$ и предложения. Лемма доказана.

Лемма 13. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением (4), (5).*

Доказательство. 1. Покажем, что собственные значения оператора L имеют асимптотическое распределение

$$\lambda_k(L) = c^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1))$$

при $k \to \infty$ с константой c, определённой формулой (5).

Действительно, указанная асимптотическая формула следует из работы [24, § 1, п. 3] с константой

$$c = \frac{1}{24\pi^3} \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \operatorname{tr}\{(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2})^{3/2}\}\, dS(\xi), \tag{37}$$

где $a_0 := \mathbf{M} \bigotimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \boldsymbol{\Lambda}) \bigotimes \xi\xi^{\mathrm{т}}$, $b_0 := \mathbf{R} \bigotimes I_3$. Учитывая, что

$$\operatorname{tr}\{(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2})^{3/2}\} = \operatorname{tr}\{(a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2})^{-3/2}\} = \operatorname{tr}\{(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2})^{-3/2}\},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (24) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение

$$\det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}-\lambda I_{3n})=\det(\mathbf{R}^{-1/2}(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\xi\xi^{\text{т}}-\lambda\mathbf{R}\bigotimes I_3)\mathbf{R}^{-1/2})=$$

$$=\det{}^2\mathbf{R}^{-1/2}\det((I_n\bigotimes\Gamma_\xi^{\text{т}})(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes\xi\xi^{\text{т}}-\lambda\mathbf{R}\bigotimes I_3)(I_n\bigotimes\Gamma_\xi))=$$

$$=\det\mathbf{R}^{-1}\det(\mathbf{M}\bigotimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes|\xi|^2P_1-\lambda\mathbf{R}\bigotimes I_3)=$$

$$=|\xi|^{6n}\det\mathbf{R}^{-1}\det(\mathbf{M}\bigotimes I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\bigotimes P_1-\mathbf{R}\bigotimes\lambda|\xi|^{-2}I_3)=$$

$$=|\xi|^{6n}\det\mathbf{R}^{-1}\det((2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R})\det{}^2(\mathbf{M}-\lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R})=0.$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\{\lambda_k^{(1)}=|\xi|^2\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}),\quad \lambda_k^{(2)}=\lambda_k^{(3)}=|\xi|^2\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})\}_{k=1}^n,$$

где $\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})$, $\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})$, $k=\overline{1,n}$, – собственные значения соответствующих матриц. Из (37) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$c=\frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\left(\sum_{k=1}^n(\lambda_k^{(1)})^{-3/2}+2\sum_{k=1}^n(\lambda_k^{(2)})^{-3/2}\right)dS(\xi)=$$

$$=\frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega(\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2}+2\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2})\,d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\frac{dS(\xi)}{|\xi|^3}=$$

$$=\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega(\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2}+2\operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2})\,d\Omega.$$

2. Из представления $A=L+T=(I+TL^{-1})L$ вытекает, что оператор A является *слабым возмущением* оператора L. Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L следует (см., например, [25]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Из (13) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и оператор-функции $L(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим распределением следует из теоремы о сравнении спектров [25, теорема 1.2]. Лемма доказана.

Утверждения сформулированной выше теоремы следуют из лемм 11–13.

Заключение. Исследован спектр оператора в задаче о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Доказано, что существенный спектр задачи представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси, за исключением, быть может, конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением. Отсюда следует, в частности, что в рассматриваемой модели существует не более конечного числа осциллирующих собственных колебательных режимов. Все остальные собственные колебания являются апериодически затухающими. Можно показать, что если нижние грани матриц вязкостей будут “достаточно большими”, то осциллирующих режимов вообще не будет. Аналогичные факты, как известно, имеют место и для однокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости.

Далее, опираясь на доказанные результаты, предполагается исследовать задачу о малых движениях описанной системы, решить задачу о вынужденных колебаниях, а также обосновать разложение решений эволюционной задачи по системе корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в предположении постоянства стационарных плотностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М., 1987.
2. *Rajagopal K.L., Tao L.* Mechanics of Mixtures. Ser. Adv. Math. Appl. Sci. V. 35. River Edge, 1995.
3. *Mamontov A.E., Prokudin D.A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20. № 2. P. 179–195.
4. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A Stokes-like system for mixtures // Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II. Intern. Math. Ser. / Eds. M.Sh. Birman, S. Hildebrandt, V.A. Solonnikov, and N.N. Uraltseva. Dordrecht, Norwell, New York, London, 2002. P. 119–136.
5. *Frehse J., Goj S., Málek J.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36. № 4. P. 1259–1281.
6. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum // Appl. Math. 2005. V. 50. P. 527–541.
7. *Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей // Изв. РАН. Сер. Мат. 2018. Т. 82. № 1. С. 151–197.
8. *Пал П.К., Масленникова В.Н.* Спектральные свойства операторов в задаче о колебании сжимаемой жидкости во вращающихся сосудах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 3. С. 529–534.
9. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Ann. 1977. V. 227. P. 247–276.
10. *Faierman M., Fries R.J., Mennicken R., Möller M.* On the essential spectrum of the linearized Navier–Stokes operator // Integr. Equat. Oper. Theory. 2000. V. 38. № 1. P. 9–27.
11. *Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A.A.* The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. 1994. V. 167. P. 5–20.
12. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
14. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга. II // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 1966. Т. 92. С. 233–297.
15. *Mennicken R., Shkalikov A.A.* Spectral decomposition of symmetric operator matrices // Math. Nachr. 1996. V. 179. P. 259–273.
16. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Эволюционная и спектральная задачи, порождённые проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 1988. Т. 6. С. 5–33.
17. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
18. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A.* Classes of Linear Operators. V. 1. Basel; Boston; Berlin, 1990.
19. *Волевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68 (110). № 3. С. 373–416.
20. *Кожевников А.Н.* Функциональные методы математической физики. М., 1991.
21. *Kozhevnikov A., Skubachevskaya T.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26. № 2. P. 297–322.
22. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
23. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.
24. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1977. Т. 14. № 11. С. 5–58.
25. *Маркус А.С., Мацаев В.И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша // Мат. сб. 1984. Т. 123 (165). № 3. С. 391–406.

Крымский федеральный университет
имени В.И. Вернадского,
г. Симферополь

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.
После доработки 18.02.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.