ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 456–466

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.968.2

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Для уравнения поперечных колебаний однородной балки рассматривается прямая начальная задача в бесконечной области, для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. Приводится решение прямой задачи с помощью фундаментальных решений и доказываются существование и единственность этого решения. Получены оценки устойчивости для решения обратной задачи. С помощью принципа сжатых отображений Банаха доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123040039, EDN: AMTHCF

Введение. Балка – это конструктивный элемент (предназначенный для восприятия преимущественно осевой нагрузки), который сопротивляется нагрузкам, приложенным сбоку к её оси. Нагрузки, приложенные к балке, вызывают силы реакции в точках её опоры. Суммарный эффект всех сил, действующих на балку, заключается в создании поперечных сил и изгибающих моментов внутри неё, которые, в свою очередь, вызывают внутренние напряжения, деформации и прогибы балки. Балки характеризуются способом опирания, профилем (формой поперечного сечения), условиями равновесия, длиной и материалом.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важные приложения в проектировании конструкций, теории устойчивости вращающихся валов, теории колебаний кораблей и трубопроводов и описываются дифференциальными уравнениями порядков выше второго [1–3].

В последние годы возрос интерес к исследованию прямых и обратных задач для уравнения колебаний балки [4–21]. В статье [7] представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жёсткостью, жёстко закреплённого на одном конце и имеющего вязкоупругие связи на другом при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. В работе [11] для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, рассмотрена прямая начально-краевая задача и для неё изучена обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости. Численные решения краевых задач для уравнения поперечных колебаний балки приведены в работах [22–24].

Обратные задачи – одни из самых важных, на наш взгляд, математических задач в технических науках и математике, потому что дают возможность ввести необходимые параметры задачи напрямую. Они имеют широкое применение в идентификации систем, оптике, акустике, теории связи, обработке сигналов, геофизике, дистанционном зондировании, машинном обучении и во многих других областях. Обратные задачи математической физики изучены для многих классов дифференциальных уравнений. Так, например, такие задачи для простейшего уравнения гиперболического типа изучались в монографии [25]. Методика доказательств локальных теорем существования и единственности решения, теорем единственности и условной устойчивости для обратных динамических задач, а также численные подходы к нахождению их решения рассмотрены в работах [26–37] (см. также библиографию в них).

В данной статье рассмотрены прямая задача для уравнения колебания бесконечной балки, т.е. задача Коши и обратная задача по определению коэффициента, зависящего от времени при младшем члене этого уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную балку под действием внешней силы $G(x,t)$. Вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

где ρ – плотность балки, S – площадь поперечного сечения балки, E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси; балка по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $Q(t)$.

Разделив на ρS, запишем это уравнение в следующем в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/(\rho S)$, $q(t) = Q(t)/(\rho S)$ и $f(x,t) = G(x,t)/(\rho S)$. Уравнение (1) рассмотрим в полуплоскости $D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty,\ \ t > 0\}$ вместе с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Прямая задача. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую (1), (2) и условию

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \bigcap C^1_t(D \bigcup \{t=0\}) \bigcap C(\overline{D}). \tag{3}$$

При этом функции $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ считаются заданными и достаточно гладкими.

Обратная задача. Найти коэффициент $q(t)$, если решение задачи Коши (1)–(3) удовлетворяет условию

$$u(0,t) = g(t), \tag{4}$$

где $g(t)$ – заданная достаточно гладкая функция, кроме того, $|g(t)| \geqslant g_0 > 0$.

Пусть функция $u(x,t)$ – решение задачи Коши (1)–(3). Преобразуем обратную задачу (1)–(4). Для этого обозначим четвёртую производную $u(x,t)$ по переменной x через $v(x,t)$, т.е. $v(x,t) := u_{xxxx}(x,t)$. Продифференцировав (1) и (2) четырежды по x, имеем

$$v_{tt} + a^2 v_{xxxx} + q(t)v = f_{xxxx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$v|_{t=0} = \varphi^{(4)}(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi^{(4)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Для того чтобы найти дополнительное условие для функции $v(x,t)$, положим $x=0$ в (1) и, используя равенства (3) и (4), получим

$$v|_{x=0} = \frac{1}{a^2}[f(0,t) - q(t)g(t) - g''(t)], \quad t > 0. \tag{7}$$

Через $D_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ \ 0 < t < T\}$ обозначим полосу толщины T, где $T > 0$ – произвольное фиксированное число.

Замечание. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(4)}_b(\mathbb{R})$, $f(x,t) \in C^{(4)}_b(D_T)$, где $C^{(4)}_b$ – класс ограниченных функций с точностью до производных четвёртого порядка, и верны следующие условия:

$$\frac{\partial^{(i)} u}{\partial x}(0,0) = \varphi^{(i)}(0), \quad \frac{\partial^{(i)} u_t}{\partial x}(0,0) = \psi^{(i)}(0), \quad i = \overline{1,4}.$$

Тогда из (5)–(7) можно вывести задачу (1)–(4).

2. Исследование прямой задачи. Воспользуемся результатами работы [6], в которой решение задачи

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

построено с помощью фундаментальных решений в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G_1(x,t,\xi)\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G_2(x,t,\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

где

$$G_1(x,t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sin\left[\frac{(\xi-x)^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right], \quad G_2(x,t,\xi) = \frac{1}{\pi a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin(a\lambda^2 t) \cos(\lambda(\xi - x))\,d\lambda.$$

В статье [6] показано, что функции $G_i(x,t,\xi)$, $i=1,2$, удовлетворяют следующим условиям:

(A_1) $G_1(x,t,\xi) \in C^\infty(D)$;
(A_2) $G_2(x,t,\xi) \in C^\infty(D)$;
(B_1) $\lim\limits_{t\to+0} G_1(x,t,\xi) = \infty$;
(B_2) $\lim\limits_{t\to+0} G_2(x,t,\xi) = 1$;
(C_1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(x,t,\xi)\,d\xi = 1$;
(C_2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_2(x,t,\xi)}{\partial t}\,d\xi = 1$;
(C_3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(x,t,\xi)\,d\xi = 2t$.

Фактически функция $G_1(x,t,\xi)$ является частной производной от $G_2(x,t,\xi)$ по переменной t, т.е. $\partial G_2(x,t,\xi)/\partial t = G_1(x,t,\xi)$.

В уравнении (5), перенося слагаемое $q(t)v(x,t)$ в правую часть, введём обозначение

$$F(x,t) \equiv f_{xxxx}(x,t) - q(t)v(x,t).$$

При $F(x,t) \neq 0$ воспользуемся принципом Дюамеля и с учётом (8) для решения прямой задачи (5), (6) получим интегральное уравнение

$$v(x,t) = v_0(x,t) - \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi,\tau) G_2(x, t-\tau, \xi)\,d\xi\,d\tau, \tag{9}$$

где

$$v_0(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) G_1(x,t,\xi)\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_2(x,t,\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau. \tag{10}$$

Пусть $C^m(\mathbb{R})$ – класс m раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных в $\mathbb{R}$ функций, а $C^{m,k}_{x,t}(D_T)$ – класс m раз по x и k раз по t непрерывно дифференцируемых и ограниченных при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ в области D_T функций.

Справедлива следующая

Лемма. *Если* $q(t) \in C[0,T]$, $f(x,t) \in C^{6,0}_{x,t}(D_T)$, $\varphi(x) \in C^8(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^6(\mathbb{R})$, *кроме того, функции* $\varphi^{(8)}(x)$, $\varphi^{(6)}(x)$, $\psi^{(6)}(x)$, $\partial^6 f(x,t)/\partial x^6$, $\varphi^{(4)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$, $f_{xxxx}(t)$, $x^4\varphi^{(4)}(x)$, $x^4\psi^{(4)}(x)$, $x^4 f_{xxxx}(t)$, $x^8\psi^{(4)}(x)$ *и* $x^8 f_{xxxx}(t)$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то существует единственное классическое решение интегрального уравнения (9) такое, что* $v(x,t) \in \in C^{4,2}_{x,t}(D_T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений и рассмотрим последовательность функций, определённых формулами

$$v_n(x,t) = -\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v_{n-1}(\xi,\tau) G_2(x, t-\tau, \xi)\, d\xi\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $v_0(x,t)$ определена в (10).

Положим $\varphi_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(4)}(x)|$, $\psi_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\psi^{(4)}(x)|$, $q_0 = \max\limits_{0<t\leqslant T} |q(t)|$, $f_1 = \max\limits_{0<t\leqslant T} |f_0(t)|$, где $f_0(t) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_{xxxx}(x,t)|$. Используя (11) и условия (C_1), (C_3), оценим $v_n(x,t)$ в области D_T следующим образом:

$$|v_0(x,t)| \leqslant \varphi_0 + 2T\psi_0 + T^2\|f_0\| =: \lambda_0, \quad |v_1(x,t)| \leqslant \lambda_0 q_0 \int\limits_0^t 2(t-\tau)\, d\tau = 2\lambda_0 q_0 \frac{t^2}{2!},$$

$$|v_2(x,t)| \leqslant \lambda_0 q_0^2 \int\limits_0^t 2(t-\tau)\tau^2\, d\tau = 2^2 \lambda_0 q_0^2 \frac{t^4}{4!}, \quad \ldots$$

Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ получим оценки

$$|v_n(x,t)| \leqslant \lambda_0 (2q_0)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

из которых следует, что ряд

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$$

сходится равномерно в области D_T, так как его можно мажорировать в D_T с помощью сходящегося числового ряда

$$\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!},$$

а значит, имеет место следующая оценка решения интегрального уравнения (9):

$$|v(x,t)| \leqslant \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!} = \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T), \quad (x,t) \in D_T. \tag{12}$$

Теперь докажем, что решение интегрального уравнения (9) действительно является классическим решением задачи (1)–(3). Сначала проверим выполнение начальных условий.

Отметим, что при $t \to +0$ и выполнении условий (A_1)–(C_3) интегралы в правой части (10) расходятся. Введём обозначение $\eta \equiv (\xi - x)/2\sqrt{at}$ и преобразуем эти интегралы. Если функция $\varphi^{(4)}(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в правой части (10) сходятся равномерно при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда, переходя к пределу при $t \to +0$, в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta = 1$$

получим
$$\lim_{t\to+0} v(x,t) = \varphi^{(4)}(x).$$

Для доказательства выполнения второго начального условия найдём частную производную по t от функции (9):
$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(5)}(x+2\eta\sqrt{at})\eta \sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right) d\eta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x,t,\xi)\, dt -$$
$$- \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) G_1(x,t-\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau.$$
Отсюда и из приведённых выше рассуждений получим
$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left[-\frac{1}{2}\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)\varphi^{(5)}(x+2\eta\sqrt{at})\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} +$$
$$+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(6)}(x+2\eta\sqrt{at})\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^{(4)}(\xi)G_1(x,t,\xi)\,dt-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)G_1(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau.$$
Если $\varphi^{(5)}(\pm\infty)=0,$ то
$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(6)}(x+2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right) d\eta +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x,t,\xi)\, dt - \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) G_1(x,t-\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau.$$
Если функции $\varphi^{(6)}(x)$ и $\psi^{(4)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R},$ то, переходя к пределу при $t\to+0,$ в силу равенства
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) dx = 0$$
находим
$$\lim_{t\to+0} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \psi^{(4)}(x).$$

Если докажем, что функция $v_0(x,t),$ определяемая формулой (10), будет из класса (3), то в силу (11) легко видеть, что все функции $v_n(x,t)$ будут принадлежать тому же классу. Тогда из общей теории интегральных уравнений следует, что $v(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D)\bigcap C^1_t(D\bigcup\{t= =0\})\bigcap C(\overline{D}),$ т.е. функция $v(x,t)$ является классическим решением задачи Коши (5), (6).

С этой целью вычислим производную
$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(7)}(x+2\eta\sqrt{at})\eta \cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right) d\eta +$$
$$+ \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^{(5)}(x+2\eta\sqrt{at})\eta \sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right) d\eta +$$

$$+ f_{xxxx}(x,t) - \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau)\zeta \sin\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta\, d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)\varphi^{(7)}(x+2\eta\sqrt{at})\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(8)}(x+2\eta\sqrt{at})\sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta +$$

$$+ \sqrt{\frac{a}{\pi t}}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)\psi^{(5)}(x+2\eta\sqrt{at})\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^{(6)}(x+2\eta\sqrt{at})\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta +$$

$$+ f_{xxxx}(x,t) + \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}}\int\limits_0^t\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\zeta^2+\frac{\pi}{4}\right)f_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}(x+2\zeta\sqrt{a(t-\tau)},\tau)\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{a(t-\tau)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi}(x+2\zeta\sqrt{a(t-\tau)},\tau)\cos\left(\zeta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\zeta\right\}d\xi.$$

Если $\varphi^{(7)}(\pm\infty) = 0$, $\psi^{(5)}(\pm\infty) = 0$ и $f_{xxxxx}(\pm\infty, t) = 0$, то получим выражение

$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial t^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(8)}(x+2\eta\sqrt{at})\sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^{(6)}(x+2\eta\sqrt{at})\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta +$$

$$+ f_{xxxx}(x,t) + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi}(x+2\zeta\sqrt{a(t-\tau)},\tau)\cos\left(\zeta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\zeta\, d\xi. \tag{13}$$

Далее аналогично вычисляется $\partial^4 v_0(x,t)/\partial x^4$.

Таким образом, если функции $\varphi^{(8)}(x)$, $\psi^{(6)}(x)$ и $\partial^6 f(x,t)/\partial x^6$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в (13) сходятся равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$. И если функции $\varphi^{(4)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$, $f_{xxxx}(t)$, $x^4\varphi^{(4)}(x)$, $x^4\psi^{(4)}(x)$, $x^4 f_{xxxx}(t)$, $x^8\psi^{(4)}(x)$ и $x^8 f_{xxxx}(t)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в $\partial^4 v_0(x,t)/\partial x^4$ также сходятся равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$. Лемма доказана.

Теперь оценим норму разности между решением исходного интегрального уравнения (9) и решением этого же уравнения с возмущёнными функциями $\tilde{q}$, $\tilde{f}_{xxxx}$, $\tilde{\varphi}^{(4)}$ и $\tilde{\psi}^{(4)}$, определяющими $\tilde{v}(x,t)$:

$$\tilde{v}(x,t) = \tilde{v}_0(x,t) - \int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(\tau)\tilde{v}(\xi,\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau, \tag{14}$$

где

$$\tilde{v}_0(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}^{(4)}(\xi)G_1(x,t,\xi)\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^{(4)}(\xi)G_2(x,t,\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau. \tag{15}$$

Тогда для $v - \tilde{v}$ с помощью (9) и (14) получим линейное интегральное уравнение

$$v(x,t) - \tilde{v}(x,t) = v_0(x,t) - \tilde{v}_0(x,t) - \int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}(q(\tau)-\tilde{q}(\tau))v(\xi,\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}(v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau))\tilde q(\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau,$$

откуда выводится следующее неравенство:

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|\leqslant|v_0(x,t)-\tilde v_0(x,t)|+\lambda_0\operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T)\|q-\tilde q\|+$$
$$+\tilde q_0\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau))||G_2(x,t-\tau,\xi)|\,d\xi\,d\tau,\tag{16}$$

где $\tilde q_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\tilde q_0(t)|$. Из равенств (10) и (15) следует оценка

$$|v_0(x,t)-\tilde v_0(x,t)|\leqslant\|\varphi^{(4)}-\tilde\varphi^{(4)}\|+2T\|\psi^{(4)}-\tilde\psi^{(4)}\|+\frac{T^2}{2}\|f_{xxxx}-\tilde f_{xxxx}\|$$

или

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|_0\leqslant\sigma(\|\varphi^{(4)}-\tilde\varphi^{(4)}\|+\|\psi^{(4)}-\tilde\psi^{(4)}\|+\|f_{xxxx}-\tilde f_{xxxx}\|+\|q-\tilde q\|),$$

где $\sigma=\max\{1,\tilde q_0,2T,T^2/2,\lambda_0\operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T)\}$.

Применив метод последовательных приближений к неравенству (16)

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|_n\leqslant\tilde q_0\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau)||G_2(x,t-\tau,\xi)|\,d\xi\,d\tau,\quad n\in\mathbb N,$$

получим оценку

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|\leqslant\sigma\lambda_0\operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T)(\|\varphi^{(4)}-\tilde\varphi^{(4)}\|+\|\psi^{(4)}-\tilde\psi^{(4)}\|+\|f_{xxxx}-\tilde f_{xxxx}\|+\|q-\tilde q\|),\tag{17}$$

которая будет использована в следующем пункте. Неравенство (17) является оценкой устойчивости решения задачи Коши (5), (6), единственность которого также следует из (17).

3. Исследование обратной задачи (5)–(7). Положив в (9) $x=0$ и использовав дополнительное условие (7), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения $q(t)$:

$$q(t)=q_0(t)+\frac{a^2}{g(t)}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\tau)v(\xi,\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau,\tag{18}$$

где

$$q_0(t)=\frac{1}{g(t)}\Bigg[f(0,t)-g''(t)-a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(4)}(\xi)G_1(x,t-\tau,\xi)\,d\xi-$$
$$-a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^{(4)}(\xi)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi-a^2\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau\Bigg].$$

Решение интегрального уравнения (9) зависит от функции q, т.е. $v=v(x,t;q)$.

Введём оператор A, определяя его правой частью (18):

$$A[q](t)=q_0(t)+\frac{a^2}{g(t)}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\tau)v(\xi,\tau;q)G_2(x,t-\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau.\tag{19}$$

Тогда уравнение (18) запишется в виде

$$q(t) = A[q](t). \tag{20}$$

Пусть $\|q_{00}\| = \max\limits_{0<t\leqslant T} |q_0(t)|$. Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$B_T(q_0, \rho) := \{q(t) : q(t) \in C[0, T], \quad \|q - q_0\| \leqslant \rho\}.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы,* $g(t) \in C^2[0, T]$, $\|g(t)\| \geqslant g_0 > 0$, $\varphi(0) = g(0)$ *и* $\psi(0) = g'(0)$, *то существует такое число* $T^* \in (0, T]$, *что обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение* $q(t) \in [0, T^*]$.

Доказательство. Докажем сначала, что для достаточно малого $T > 0$ оператор A переводит шар $B_T(q_0, \rho)$ в себя, т.е. из условия $q(t) \in B_T(q_0, \rho)$ следует, что $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$. Действительно, для любой функции $q(t) \in C[0, T]$ функция $A[q](t)$, определяемая формулой (19), принадлежит классу $C[0, T]$. Более того, оценивая норму разностей, находим, что

$$\|A[q] - q_0\| \leqslant \frac{a^2 \lambda_0 q_0 T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T).$$

Здесь мы воспользовались оценкой (12). Заметим, что функция, стоящая в правой части этого неравенства, монотонно возрастает с увеличением T, а из того что функция $q(t)$ принадлежит шару $B_T(q_0, \rho)$ следует неравенство

$$q_0 \leqslant \rho + q_{00}. \tag{21}$$

Следовательно, мы только усилим неравенство, если заменим q_0 в этом соотношении выражением $\rho + q_{00}$. Выполнив эту замену, получим оценку

$$\|A[q] - q_0\| \leqslant \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T).$$

Пусть T_1 – положительный корень уравнения

$$R_1(T) = \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T) = \rho.$$

Тогда для $T \in [0, T_1]$ имеем $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$.

Теперь рассмотрим две функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$, принадлежащие шару $B_T(q_0, \rho)$, и оценим расстояние между их образами $A[q](t)$ и $A[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C[0, T]$. Функция $\tilde{v}(x, t)$, соответствующая $\tilde{q}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (14) с функциями $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$ и $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$. Составим разность $A[q](t) - A[\tilde{q}](t)$ с помощью уравнений (9), (14) и оценим её норму

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leqslant \frac{a^2 T^2}{2g_0} [\|v\| \|q - \tilde{q}\| + \|\tilde{q}\| \|v - \tilde{v}\|].$$

Используя оценки (12) и (17) с $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$ и $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$, запишем последнее неравенство в виде

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leqslant \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T)(1 + \sigma\tilde{q}_0)\|q - \tilde{q}\|. \tag{22}$$

Функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$ принадлежат шару $B_T(q_0, \rho)$, поэтому для каждой из них выполняется неравенство (21). Отметим, что функции в правой части (22) при множителе $\|q - \tilde{q}\|$ монотонно возрастают с увеличением $\|q\|$, $\|\tilde{q}\|$ и T.

Следовательно, замена $\|q\|$ и $\|\tilde{q}\|$ в неравенстве (22) (в том числе в σ) на $\rho + q_{00}$ только усилит его. Таким образом, имеем

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leqslant \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T)(1 + \sigma(\rho + q_{00}))\|q - \tilde{q}\|.$$

Пусть T_2 – положительный корень уравнения

$$R_2(T) = \frac{a^2T^2}{2g_0}\lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho+q_{00})}T)(1+\sigma(\rho+q_{00})) = 1.$$

Тогда для $T \in [0, T_2]$ расстояние между функциями $A[q](t)$ и $A[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C[0,T]$ не превышает расстояния между функциями $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$, умноженного на $R_2(T) < 1$. Следовательно, если выбрать $T^* = \min(T_1, T_2)$, то оператор A будет сжимающим в шаре $B_T(q_0, \rho)$. Следовательно, согласно теореме Банаха, оператор A имеет единственную неподвижную точку в шаре $B_T(q_0,\rho)$, т.е. существует единственное решение уравнения (20). Теорема доказана.

Пусть T – произвольное положительное фиксированное число. Рассмотрим множество $\Omega(\delta_0)$ ($\delta_0 > 0$ – некоторое фиксированное число) заданных функций f, φ, ψ, g, для которых выполнены все условия теоремы 1 и

$$\max\{\|f\|_{C^{6,0}_{x,t}(D_T)}, \|\varphi\|_{C^8(\mathbb{R})}, \|\psi\|_{C^6(\mathbb{R})}, \|g\|_{C^2[0,T]}\} \leqslant \delta_0.$$

Через $Q(\delta_1)$ обозначим класс функций $q(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих неравенству $\|q\| \leqslant \delta_1$ с некоторым фиксированным положительным числом δ_1.

Теорема 2. *Пусть функции $f, \varphi, \psi, g, \tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{g} \in \Omega(\delta_0)$ и $q, \tilde{q} \in Q(\delta_1)$. Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\|q-\tilde{q}\| \leqslant c(\|f-\tilde{f}\|_{C^{6,0}_{x,t}(D_T)} + \|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g-\tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \tag{23}$$

где постоянная c зависит только от T, δ_0 и δ_1.

Доказательство. Используя (18), запишем уравнение для $\tilde{q}(t)$ и составим разность $q(t) - \tilde{q}(t)$. Оценивая это выражение с учётом неравенств (12) и (17), получаем

$$|q-\tilde{q}|(t) \leqslant c_0(\|f-\tilde{f}\|_{C^{6,0}_{x,t}(D_T)} + \|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g-\tilde{g}\|_{C^2[0,T]}) + \\ + c_1\int\limits_0^t |q-\tilde{q}|(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

где c_0 и c_1 зависят от тех же констант, что и c. Из (24), используя неравенство Гроноулла, получаем неравенство

$$|q-\tilde{q}|(t) \leqslant c_0\exp(c_1T)(\|f-\tilde{f}\|_{C^{6,0}_{x,t}(D_T)} + \|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g-\tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \quad t \in [0,T],$$

откуда следует оценка (23), если положить $c = c_0\exp(c_1T)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует теорема единственности для любого $T > 0$.

Теорема 3. *Пусть функции q, f, φ, ψ, g и $\tilde{q}$, $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{g}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1, причём если $q = \tilde{q}$, $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$, $g = \tilde{g}$ для $(x,t) \in D_T$, то $q(t) = \tilde{q}(t)$, $t > 0$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2023-939).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J., Baron Rayleigh.* The Theory of Sound. London, 1877.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
4. *Ascanelli A., Cicognani M., Colombini F.* The global Cauchy problem for a vibrating beam equation // J. Differ. Equat. 2009. V. 47. P. 1440–1451.

5. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
6. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
7. *Ватульян А.О., Васильев Л.В.* Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. № 4. С. 449–456.
8. *Ахтямов А.М., Ильгямов М.А.* Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152–162.
9. *Ватулян А.М., Бурьян А.Ю., Осипов А.В.* Об идентификации переменной жёсткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестн. Донского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 10. № 6. С. 825–833.
10. *Loktionov A.P.* Inverse Cauchy problem for beams in building structures // Building and Reconstruction. 2022. V. 2. P. 13–25.
11. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
12. *Сабитов К.Б.* Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. Р. 364–374.
13. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // Comput. and Math. with Appl. 2008. V. 56. P. 400–410.
15. *Artur Maciag, Anna Pawinska.* Solution of the direct and inverse problems for beam // Comp. Appl. Math. 2016. V. 35. P. 187–201.
16. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // J. of Theoretical and Appl. Mechanics. 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
17. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // Adv. in Mech. Engin. 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
18. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
19. *Jin-De Chang, Bao-Zhu Guo.* Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements // Automatica. 2007. V. 43. P. 732–737.
20. *Cheng-Hung Huang, Chih-Chun Shih.* An inverse problem in estimating simultaneously the time-dependent applied force and moment of an Euler–Bernoulli beam // CMES. 2007. V. 21. № 3. P. 239–254.
21. *Hiroaki Katori.* Inverse problems for an Euler–Bernoulli beam: identification of bending rigidity and external loads // World J. of Mechanics. 2018. V. 8. P. 192–199.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 48–68.
23. *Доев В.С.* Поперечные колебания балок. М., 2016.
24. *Baysal O., Hasanov A.* Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
25. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
26. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
27. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
28. *Durdiev D., Rahmonov A.* A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-frectinal equation // Turkish J. of Math. 2022. V. 46. № 6. P. 2250–2263.
29. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
30. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
31. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временно́й частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.

32. *Дурдиев У.Д.* Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1220–1229.
33. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32.
34. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. of Math. and Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
35. *Durdiev U.D., Totieva Zh.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2019. V. 42. № 18. P. 7440–7451.
36. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Methods in the Appl. Sci. 2022. V. 45. № 14. P. 8374–8388.
37. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukr. Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1723–1740.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 08.12.2022 г.
После доработки 27.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.