

УДК 517.977+517.925

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ,
СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ В ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

© 2023 г. П. В. Николенко

Исследованы экстремали принципа максимума Понтрягина задач, связанных с перемещением в поле скоростей. Управления являются непрерывными функциями. Показано, что в фазовом пространстве существует окрестность финальной точки, через каждую точку которой проходит единственная траектория экстремали, ведущая в финальную точку. Также показано, что если траектория экстремали содержит точку, через которую проходит другая экстремаль с таким же значением функционала, то эта точка отсекает от траектории неоптимальную часть. Доказано, что оставшаяся часть, ведущая в финальную точку, оптимальна.

DOI: 10.31857/S0374064123030135, EDN: QVTYWS

1. Постановка задачи. Рассмотрим перемещения в фазовом пространстве \mathbb{R}^2 , подчиняющиеся закону $\dot{x} = v(x) + u$. Здесь $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – векторное поле класса C^2 , $v(0) = 0$; управление u – кусочно-непрерывная, непрерывная справа, с разрывами первого рода вектор-функция такая, что $\|u\| \leq 1$, где $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$. Рассмотрим управления, которые переводят объект из положения x_0 в начало координат. Пусть поставлен вопрос о выборе управления, которое минимизирует величину $\int (1 + \alpha \|u\|^2) dt$. Таким образом, рассматриваются следующие задачи:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_{t_0}^0 (1 + \alpha \|u(t)\|^2) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= v(x) + u, \quad \|u\| \leq 1, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(0) = 0, \quad \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $t = 0$ – момент завершения процесса, момент начала процесса t_0 не фиксирован.

При $\alpha = 0$ получается задача быстрогодействия. Если $\alpha > 0$, то экономится не только время, но и “энергия”, затраченная на перемещение. Варьируя значение α , можем менять значимость указанных факторов. Для того чтобы выделить экстремали задачи (1), воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [1, с. 25]).

Пусть (x, u) – оптимальный процесс. Составим функцию Понтрягина

$$H = \psi_0(1 + \alpha \|u\|^2) + \psi(v(x) + u),$$

где константа ψ_0 принимает значения либо нуль, либо минус единица. Согласно принципу максимума для некоторого решения системы $\dot{\psi} = -\psi v'(x(t))$ (v' – матрица Якоби отображения v) функция H принимает максимальное значение по параметру u .

Рассмотрим случай $\psi_0 = 0$. Поскольку вектор (ψ_0, ψ) нетривиален и $\dot{\psi} = -\psi v'(x)$, то ψ не обращается в нуль. Следовательно, H принимает максимальное значение при $u = \psi / \|\psi\|$. Так как в финальный момент $H = 0$ и $v(0) = 0$, получаем $u(0) = 0$, что противоречит условию не обращения в нуль вектора ψ . Таким образом, случай $\psi_0 = 0$ экстремалей не выявляет.

Для случая $\psi_0 = -1$

$$H = -\alpha \|u\|^2 + \psi u + \psi v - 1 = -\alpha \|u\|^2 + \|\psi\| \|u\| \cos \beta + \psi v - 1,$$

где β – угол между векторами ψ и u . Очевидно, что максимальное по u значение величина H будет достигать при $\beta = 0$. При

$$H = -\alpha \left(\|u\| - \frac{\|\psi\|}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\|\psi\|^2}{4\alpha} + \psi v - 1$$

имеем

$$u = \begin{cases} \psi/(2\alpha), & \text{если } \|\psi\| < 2\alpha, \\ \psi/\|\psi\|, & \text{если } \|\psi\| \geq 2\alpha. \end{cases}$$

Запишем функцию u в виде $g(\|\psi\|)\psi$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1/2\alpha & \text{при } x < 2\alpha, \\ 1/x & \text{при } x \geq 2\alpha. \end{cases}$$

Используем условие $H = 0$ при $t = 0$. Поскольку $v(0) = 0$, имеем равенства

$$-\alpha g^2(\|\psi\|)\psi^2 + g(\|\psi\|)\psi^2 - 1 = 0,$$

$$\psi^2(-\alpha g^2(\|\psi\|) + g(\|\psi\|)) = 1.$$

Если $\|\psi(0)\| \leq 2\alpha$, то $\psi^2 = 4\alpha$, $\|\psi(0)\| = 2\sqrt{\alpha}$ при $\alpha \geq 1$ (при $\alpha < 1$ решений нет). Если $\|\psi(0)\| \geq 2\alpha$, то

$$\psi^2(0) \left(-\alpha \frac{1}{\|\psi(0)\|^2} + \frac{1}{\|\psi(0)\|} \right) = 1,$$

откуда получаем, что $\|\psi(0)\| = 1 + \alpha$ при $\alpha \leq 1$ (при $\alpha > 1$ решений нет).

Таким образом, экстремали задачи (1) определяются решением следующей задачи Коши с пятью компонентами фазового пространства и моментом завершения $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = 1 + \alpha g^2(\|\psi\|)\psi^2, \quad \dot{x} = v(x) + g(\|\psi\|)\psi, \quad \dot{\psi} = -\psi v'(x),$$

$$x_0(0) = 0, \quad x(0) = (0, 0), \quad \psi(0) = b(\cos s, \sin s), \quad (2)$$

где

$$b = \begin{cases} 2\sqrt{\alpha} & \text{при } \alpha \geq 1, \\ 1 + \alpha & \text{при } 0 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Решение задачи (2) определяет экстремаль задачи (1): $x = (x_1, x_2)$ – координаты траектории экстремали, $u = g(\|\psi\|)\psi$ – управление, $|x_0|$ – значение функционала.

Через заданную точку x_0 фазовой плоскости \mathbb{R}^2 могут проходить две (или больше) траектории экстремали. Это может свидетельствовать о том, что хотя бы одна из этих траекторий содержит неоптимальную часть. Как отделять заведомо неоптимальную часть траектории? Будет ли оптимален остаток? Могут ли подобные точки x_0 располагаться как угодно близко от начала координат? Отметим, что этими и другими вопросами, связанными с перемещением в поле скоростей, занимались разные авторы (см., например, работы [2–4]).

2. Теорема единственности.

Теорема 1. Пусть первые производные отображения v удовлетворяют условию Липшица в некоторой области, содержащей начало координат. Существует окрестность начала координат, через каждую точку которой проходит единственная траектория экстремали, ведущая в начало координат.

Доказательство. Для доказательства потребуются следующие утверждения. Пусть $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в области U ограничена константой K и липшицева, т.е. справедливо неравенство $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$; $x = x(t)$ – решение уравнения $\dot{x} = F(x)$, $x(t) \in U$ для $t \in [0, \Delta t]$.

Согласно теореме о среднем и следствию из неё (см. [5, с. 148]) выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(\Delta t) - \dot{x}(0)\| &= \|F(x(\Delta t)) - F(x(0))\| \leq \\ &\leq L\|x(\Delta t) - x(0)\| \leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\Theta \Delta t)\| |\Delta t| \leq LK|\Delta t|, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \|x(\Delta t) - x(0) - \dot{x}(0)\Delta t\| &\leq \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\Theta \Delta t) - \dot{x}(0)\| |\Delta t| = \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|F(x(\Theta \Delta t)) - F(x(0))\| |\Delta t| \leq \\ &\leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|x(\Theta \Delta t) - x(0)\| |\Delta t| \leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\tilde{\Theta} \Delta t)\| \Delta^2 t \leq LK\Delta^2 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha \neq 1$. Траектория экстремали определяется X -компонентой решения (X, Ψ) задачи Коши (компоненту x_0 не записываем)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) + g(\|\psi\|)\psi, \quad \dot{\psi} = -\psi v'(x), \\ x(0) &= (0, 0), \quad \psi(0) = b(\cos s, \sin s), \end{aligned} \quad (5)$$

где s – действительное число.

При $\alpha \neq 1$ b – точка гладкости функции g , поэтому можно указать число $\delta > 0$ такое, что решение $(X(t, s), \Psi(t, s))$ является гладким при всех $t \in [-\delta, 0]$. Пусть $(X(t, s), \Psi(t, s))$ – решение задачи (5). При $t \in [-\delta, 0]$ рассмотрим отображения

$$\rho: \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad X: \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t, s) \\ x_2(t, s) \end{pmatrix},$$

где x_i – компоненты вектора X .

Поскольку $X(0, s) = (0, 0)^T$ при всех s , то отображение $\Phi(y_1, y_2) = X(t, s)$ корректно определено. Для того чтобы записать формулу, задающую отображение Φ , воспользуемся обозначением $(X, \Psi)(t, z)$ – решение задачи (5) с финальным условием $z \in \mathbb{R}^4$: $(X, \Psi)(0) = z$. Из определения имеем $t = -\|y\|$, $\cos s = -y_1/\|y\|$, $\sin s = -y_2/\|y\|$ при $t < 0$.

Тогда

$$\Phi(y_1, y_2) = \begin{cases} X\left(-\|y\|, \left(0, 0, \frac{-by_1}{\|y\|}, \frac{-by_2}{\|y\|}\right)\right) & \text{при } y \neq (0, 0)^T, \\ (0, 0)^T & \text{при } y = (0, 0)^T. \end{cases}$$

Отображение ρ при $t < 0$ является локальным диффеоморфизмом. Возьмём окрестность точки (t, s) , которая отображением ρ взаимно-однозначно переводится в окрестность точки (y_1, y_2) . В полученной окрестности отображение Φ можно записать в виде $\Phi = X(\rho^{-1})$. Проверим, что отображение Φ непрерывно дифференцируемо при $\|y\| < \delta$, причём $\Phi'(0, 0)$ – невырожденная матрица. Отсюда, в силу теоремы об обратной функции, следует утверждение теоремы при $\alpha \neq 1$. Рассмотрим $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi'(\lambda y)$, $\|y\| = \delta$. Убедимся в том, что указанный предел есть невырожденная матрица и стремление к ней равномерно по y ($\|y\| = \delta$):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi' = \lim_{t \rightarrow 0} X'(\rho')^{-1},$$

предел в правой части считается при фиксированном s . Запишем матрицы

$$\rho' = \begin{pmatrix} \cos s & -t \sin s \\ \sin s & t \cos s \end{pmatrix}, \quad (\rho')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\frac{1}{t} \sin s & \frac{1}{t} \cos s \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы записать матрицу X' , проведём предварительно рассуждения в общем виде. Пусть $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $Y(t, s)$ – решение задачи Коши

$$\dot{Y} = F(Y), \quad Y(0) = \varphi(s),$$

$P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – проекция на первые две координаты.

Опишем как устроена матрица Якоби отображения $PY: (PY)' = PY'$. $(PY)'$ состоит из первых двух строк матрицы Y' , её первый столбец $(Y')^1 = Y_t$ есть $F(Y(t, s))$, если нас интересует этот вектор при малых Δt , то можем записать

$$Y_t(\Delta t, s) = Y_t(0, s) + O(\Delta t) = F(\varphi(s)) + O(\Delta t). \quad (6)$$

Второй столбец $(Y')^2 = Y_s$ есть Z -компонента решения системы в вариациях, соответствующих системе

$$\dot{Y} = F(Y), \quad \dot{Z} = F'(Y)Z, \quad Y(0) = \varphi(s), \quad Z(0) = \varphi'(s). \quad (7)$$

При малых Δt можем записать

$$Y(\Delta t, s) = \varphi(s) + F(\varphi(s))\Delta t + o(\Delta t), \quad Z(\Delta t, s) = \varphi'(s) + F'(\varphi(s))\varphi'(s)\Delta t + o(\Delta t). \quad (8)$$

Отметим, что если отображение $(Y, Z) \rightarrow (F(Y), F'(Y)Z)$ ограничено константой K и липшицево с константой L в окрестности образа отображения (φ, φ') и этот образ компактен, то согласно оценкам (3), (4) можно указать число δ такое, что при $|\Delta t| \leq \delta$ для величин $O(\Delta t)$, $o(\Delta t)$ из формул (6), (8) выполняются оценки

$$\|O(\Delta t)\| \leq LK|\Delta t|, \quad \|o(\Delta t)\| \leq LK\Delta^2 t. \quad (9)$$

В нашем случае вектор из \mathbb{R}^4 записывается в виде (x, ψ) ,

$$F(x, \psi) = \begin{pmatrix} v(x) + g(\|\psi\|)\psi \\ -\psi v'(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi(s) = (0, 0, b \cos s, b \sin s).$$

Согласно (6) первый столбец матрицы X' определяется по формуле

$$(X')^1(\Delta t, s) = X_t(\Delta t, s) = PF(\varphi(s)) + O(\Delta t) = bg(b) \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} + O(\Delta t).$$

Второй столбец $(X')^2$ матрицы X' состоит из первых двух компонент вектора Z из формул (8). Чтобы его записать, потребуются первые две строки матрицы F' :

$$F' = \begin{pmatrix} v'(x) & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1^2}{\|\psi\|} + g(\|\psi\|) & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1\psi_2}{\|\psi\|} \\ & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1\psi_2}{\|\psi\|} & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_2^2}{\|\psi\|} + g(\|\psi\|) \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} (X')^2(\Delta t, s) &= PZ(\Delta t, s) = \begin{pmatrix} v'(0) & bg'(b) \cos^2 s + g(b) & bg'(b) \cos s \sin s \\ & bg'(b) \cos s \sin s & bg'(b) \sin^2 s + g(b) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \sin s \\ b \cos s \end{pmatrix} \Delta t + o(\Delta t) = bg(b) \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (10)$$

Производная отображения Φ в точке $y = (\Delta t \cos s, \Delta t \sin s)$ равна $\Phi'(y) = X'(g')^{-1} = bg(b)(E + O(\Delta t))$, где E – единичная матрица. Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi'(\lambda y) = bg(b)E$.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Тогда в формулах (5) $b = 2$,

$$g(x) = \begin{cases} 1/2, & x \leq 2, \\ 1/x, & x > 2. \end{cases}$$

Выберем последовательность гладких функций g_n , равномерно сходящуюся к g , такую, что $0 < g_n \leq 1/2$, $|g'_n| \leq 1/4$. Далее убедимся, что можно выбрать числа δ и C таким образом, что оценки (9) запишутся в виде

$$\|O(\Delta t)\| \leq C|\Delta t|, \quad \|o(\Delta t)\| \leq C\Delta^2 t \tag{11}$$

при $|\Delta t| \leq \delta$ для всех g_n . Чтобы исключить путаницу, функции Φ припишем индекс Φ_{g_n} , Φ_g . Функции Φ_{g_n} равномерно сходятся к Φ_g для $|t| \leq \delta$. В силу следствия из теоремы о среднем и вида Φ'_{g_n} выполняется неравенство

$$\|\Phi_{g_n}(b) - \Phi_{g_n}(a) - \Phi'_{g_n}(0)(b - a)\| \leq \sup_{c \in [a,b]} \|\Phi'_{g_n}(c) - \Phi'_{g_n}(0)\| \|b - a\|,$$

следовательно, можно указать $d > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что $\|\Phi_{g_n}(b) - \Phi_{g_n}(a)\| \geq d\|b - a\|$ для всех a и b с нормой меньше δ_1 . Тогда в силу равномерной сходимости в последнем неравенстве вместо g_n можно записать g . Следовательно, Φ_g инъективно в круге $\|y\| < \delta_1$. Кроме того, в силу обратимости отображений Φ_{g_n} образ шара $\|y\| < \delta_1$ содержит шар $\|y\| < d\delta_1$: $\Phi_{g_n}(B_0^{\delta_1}) \supset B_0^{d\delta_1}$. Но тогда и $\Phi_g(B_0^{\delta_1}) \supset B_0^{d\delta_1}$. Действительно, пусть $y \in B_0^{d\delta_1}$, $z_n = \Phi_{g_n}^{-1}y$, в силу компактности можем считать, что $z_n \rightarrow z$. Тогда $\Phi_g(z) = y$.

Обоснуем теперь оценки (11). Заметим, что в первом неравенстве (9) константы L и K определяются отображением F , т.е. величинами v, v', g (но не g'). Это объясняет первое из неравенств (11). Чтобы обосновать второе неравенство (11), матрицу F' представим в виде суммы $F' = \tilde{F}' + G$, где

$$\tilde{F}' = \begin{pmatrix} v'(x) & g(\|\psi\|)E \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g'(\|\psi\|)}{\|\psi\|} \begin{pmatrix} \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \\ \psi_1\psi_2 & \psi_2^2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в системе (7) вместо F' записать \tilde{F}' , то в формулах (9) константы L, K будут определяться величинами v, v' , константой Липшица для v', g (но не g'), т.е. можно L и K взять общими для всех n . Далее, если Y, Z – решение (7), то поскольку $G(\varphi(s))\varphi'(s) = 0$, можно указать константы A и a такие, что при $|t| \leq A$ выполняется неравенство $\|G(Y(t))Z(t)\| \leq a|t|$. Окончательно оценки (11) получаются после применения к сумме $\tilde{F}' + G$ следующего утверждения.

Лемма. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x$ и y – соответственно решения задач Коши

$$\dot{z} = f(z), \quad z(0) = x^0$$

и

$$\dot{z} = f(z) + r(z), \quad z(0) = x^0$$

на промежутке $[-A, A]$. Функция f липшицева в достаточно большой окрестности образа $x: \|f(z_1) - f(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|$, для $r(y)$ выполняется неравенство $\|r(y(t))\| \leq a|t|$. Тогда на промежутке $[-A, A]$ выполняется неравенство $\|x(t) - y(t)\| \leq ct^2$, где $c = c(a, A, L)$.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 4 из книги [6, гл. 1]. Пусть $z = x - y$, тогда $\dot{z} = f(x) - f(y) - r(y)$. Умножив на z , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|^2 = (f(x) - f(y))z - r(y)z.$$

В силу предположений о свойствах f и r имеем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 \leq L\|z(t)\|^2 + a|t|\|z(t)\|,$$

после сокращения которого на $\|z(t)\|$ получим $d\|z(t)\|/dt \leq L\|z(t)\| + a|t|$. Умножив последнее неравенство на e^{-Lt} и проинтегрировав в промежутке $[0, t]$, будем иметь соотношения

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-L\tau}\|z(\tau)\|)d\tau \leq a \int_0^t \tau e^{-L\tau} d\tau, e^{-Lt}\|z(t)\| \leq -\frac{a}{L}te^{-Lt} - \frac{a}{L^2}e^{-Lt} + \frac{a}{L^2}$$

или

$$\|z(t)\| \leq -\frac{a}{L}t - \frac{a}{L^2} + \frac{a}{L^2} \left(1 + Lt + \frac{e^\theta}{2}L^2t^2\right).$$

Таким образом, $\|z(t)\| \leq ct^2$, где $c \leq ae^{L^2}/2$. Аналогично оцениваем $\|z(t)\|$ для отрицательных t , проводя интегрирование по промежутку $[t, 0]$. Лемма доказана.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что условия гладкости функции v не могут быть ослаблены. Так, например, для поля $v(x_1, x_2) = (x_2^{3/2}, 0)$ из каждой точки вида $(p, 0)$ ($p < 0$) в начало координат ведет несколько траекторий (см. [7]).

3. Множество разреза. Если через заданную точку фазовой плоскости проходят две траектории с одинаковыми значениями функционала, то указанная точка отсекает от траектории неоптимальную часть. Дадим точную формулировку. Пусть процессы (x, u) , (\tilde{x}, \tilde{u}) являются экстремальными, определены на промежутках $[t_0, t_1]$, $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ соответственно, причём $t_0 < \tilde{t}_0 < t_1$, $x(\tilde{t}_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0)$, $u(\tilde{t}_0) \neq \tilde{u}(\tilde{t}_0)$ и $\int_{t_0}^{t_1} (1 + \alpha\|u^2(t)\|) dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} (1 + \alpha\|\tilde{u}^2(t)\|) dt$. Тогда процесс (x, u) на промежутке $[t_0, t_1]$ не оптимален. Действительно, определим процесс (\hat{x}, \hat{u}) на промежутке $[t_0, \tilde{t}_1]$, положив

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x, \quad \hat{u} = u \quad \text{для } t < \tilde{t}_0, \\ \hat{x} &= \tilde{x}, \quad \hat{u} = \tilde{u} \quad \text{для } \tilde{t}_0 \leq t \leq \tilde{t}_1. \end{aligned}$$

Значение функционала J для обоих процессов одинаково. Но процесс (\hat{x}, \hat{u}) имеет разрывное управление, а оптимальный процесс, в силу системы (2), имеет непрерывное управление, поэтому (\hat{x}, \hat{u}) не оптимален. Следовательно, не оптимален и (x, u) . Таким образом, точка $x(\tilde{t}_0)$ отделяет от траектории экстремали неоптимальную часть. Такие точки называют *точками разреза*, поиск которых связан с решением следующего уравнения.

Запишем задачу (2), переобозначив $(\psi_1, \psi_2) = (x_3, x_4)$, в виде

$$\dot{X} = f(X), \quad X(0) = \varphi(s), \tag{12}$$

где $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\varphi(s) = (0, 0, 0, b \cos s, b \sin s)$.

Рассмотрим отображения

$$\Psi(t, s) = (x_0(t, s), s), \quad \Phi(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s)),$$

где $X(t, s) = (x_0, \dots, x_4)(t, s)$ – решение задачи (12); $g = \Phi\Psi^{-1}$ (отображение Ψ^{-1} определено, поскольку $\dot{x}_0 > 0$).

Если $g(\hat{x}_0, \tau) = g(\hat{x}_0, s)$, $\tau \neq s + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $g(\hat{x}_0, \tau)$ – точка разреза.

Тройку (x_0, τ, s) назовём *параметрами разреза*. Саму точку $g(x_0, \tau)$ назовём *правильной*, если два параметра из тройки (x_0, τ, s) являются функцией третьего, причём производные по третьему параметру отличны от нуля. Кроме того, матрица Φ' невырождена на полуинтервале вдоль траектории между точкой разреза и финальной точкой.

Предельную траекторию для точек разреза, для которой параметры имеют вид (x_0, τ, τ) , назовём *особой*.

Замечание 2. Отметим, что на траектории экстремали может находиться целый набор точек разреза. Из всей указанной совокупности следует выбрать точку, ближайшую к финальной, а остальные точки интереса не представляют, поскольку находятся на неоптимальной части траектории.

Совокупность точек разреза, обладающих указанным в замечании свойством, образуют множество разреза. Множество разреза рассматриваемых задач изучалось в работах [7–9]. В работе [9] предложена конструкция для численного вычисления множества разреза.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Задача быстродействия с полем $v(x_1, x_2) = (x_2^2, 0)$, $\alpha = 0$.

Для $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ траектории экстремалей представляют собой “синусоиды”. Из всей траектории оптимальной может быть лишь последняя полуволна, поскольку начало полуволны – точка на левой полуоси Ox_1 , которая является точкой разреза, образуемой пересечением “синусоиды” с “синусоидой”, симметричной ей относительно оси Ox_1 .

Для $s \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ траектории экстремалей представляют собой кривые, не пересекающиеся между собой (кривые 12–16 на рисунке). Особой является точка

$$(-\pi/\sqrt{v''(0)}, 0) = (-\pi/\sqrt{2}, 0).$$

Параметры точек разреза могут быть записаны в виде $(\alpha(\tau), \tau, -\tau)$, где $\tau \in (0, \pi/2)$, $|\alpha(\tau)|$ – время перемещения по соответствующей полуволне. Производная $\alpha'(\tau) < 0$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(\tau) = -\pi/\sqrt{2}$, $\lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \alpha(\tau) = -\infty$.

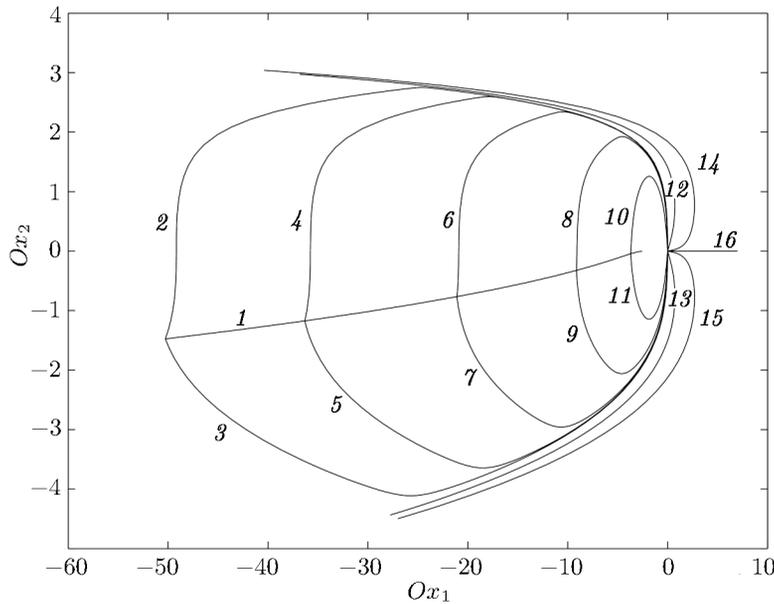


Рисунок. Траектории экстремалей для разных s .

Пусть Ω – часть полосы в пространстве \mathbb{R}^2 :

$$\Omega = \{(t, s) : t \leq 0, \text{ если } s \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]; \alpha(s) \leq t \leq 0, \text{ если } s \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

Отображение g переводит область Ω в \mathbb{R}^2 , причём

$$g(0, s) = (0, 0), \quad g(t, -\pi) = g(t, \pi), \quad g(\alpha(\tau), -\tau) = g(\alpha(\tau), \tau)$$

для $0 < \tau < \pi/2$.

Во внутренней части множества Ω отображение g взаимно-однозначно. Введём в Ω отношение эквивалентности, считая $z_1 \sim z_2$, если $g(z_1) = g(z_2)$. Тогда, поскольку g открыто на Ω и согласовано с эквивалентностью, оно определяет гомеоморфизм $\tilde{\Omega}$ фактор-пространства $\tilde{\Omega}$ в \mathbb{R}^2 . Кроме того, отображение $(\cdot)_1$ – проекция на первую координату, также согласовано с эквивалентностью. Поэтому отображение $\omega = (\tilde{g}^{-1})_1$ непрерывно. Величина $\omega(x)$ есть время перемещения в начало координат по траектории экстремали.

Пример 2. Рассмотрим задачу быстрогодействия с полем

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_2^2, 0), & \text{если } x_2 < 0, \\ (x_2^2 + 0.1x_2^6, 0), & \text{если } x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \alpha = 0.$$

Вычисления производились для $t \in [-7, 0]$ (таблица).

Для значений $s \in [\pi/2, 3\pi/2]$ траектории экстремалей (кривые 12–16 на рисунке) не пересекают других траекторий. Для значений $s \in [-\pi/2, \pi/2]$ траектории экстремалей представляют собой деформированные “синусоиды”. Часть из точек пересечения “синусоид” между собой и составляют множество разреза, которое на рисунке представлено кривой 1. Время перемещения от точки разреза до начала координат по траекториям 2–3, ..., 10–11 одинаково. Множество разреза состоит из правильных точек. Особой является точка $(-\pi/\sqrt{2}, 0)$, параметры разреза могут быть записаны в виде $(\alpha(\tau), \beta(\tau), \tau)$. Согласно проведённым вычислениям определим область Ω как часть полосы в \mathbb{R}^2 , положив

$$\Omega = \begin{cases} (t, s): -7 \leq t \leq 0, & \text{если } s \in [-\pi, -1.55] \cup [1.51, \pi], \\ (t, s): \alpha(s) \leq t \leq 0, & \text{если } s \in [0, -1.51], \\ (t, s): \alpha(\tau) \leq t \leq 0, & \text{если } s = \beta(\tau), \quad \tau \in [0, -1.51]. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, введём в Ω отношение эквивалентности, полагая, что $z_1 \sim z_2$, если $g(z_1) = g(z_2)$. Получаем гомеоморфизм \tilde{g} фактор-пространства $\tilde{\Omega}$ на область G в \mathbb{R}^2 . Отображение $(\cdot)_1$ – проекция на первую координату, также согласовано с эквивалентностью. Поэтому на G определена и непрерывна величина $\omega = (\tilde{g}^{-1}(x))_1$.

4. Оптимальность траекторий. Установим, что при выполнении некоторых условий траектории экстремалей, не содержащие точек разреза, оптимальны.

Пусть $t_0 < 0$ – некоторое число, $X(t, s)$ – решение системы (12). Для каждого $s \in [-\pi, \pi]$ определим $t(s) (\geq t_0)$ так, что $(x_1(t(s), s), x_2(t(s), s))$ – точка разреза либо особая точка, а если таковых нет, то полагаем $t(s) = t_0$.

Положим

$$\Omega = \{(t, s): t(s) \leq t \leq 0, \quad -\pi \leq s \leq \pi\}.$$

На множестве Ω рассмотрим отображения $(x_0(t, s), s) \xleftarrow{\Psi} (t, s) \xrightarrow{\Phi} (x_1(t, s), x_2(t, s))$. Будем предполагать выполненными следующие условия:

- на множестве $\tilde{\Omega} = \{(t, s): t(s) < t < 0, \quad -\pi \leq s \leq \pi\}$ матрица Φ' не вырождена;
- множество разреза состоит из правильных точек;
- функция $\omega = (\Psi\Phi^{-1})_1$, где $(\cdot)_1$ обозначает первую компоненту, $\omega(x_1, x_2) = x_0$, определённая на $\Phi(\tilde{\Omega})$, доопределяется на $\Phi(\Omega)$ по непрерывности;
- множество с $\|\psi\| = \|(x_3, x_4)\| = 2\alpha$ – кусочно-гладкая кривая.

Полагаем, что выполняется следующая априорная оценка: пусть $x_0 \notin \Phi(\Omega)$ и управление u переводит x_0 в 0, x – соответствующая траектория, тогда $J(x, u) \geq c$.

Теорема 2. Пусть $s \in [-\pi, \pi]$ и $-\omega(x_1(t(s), s), x_2(t(s), s)) < c$. Тогда оптимальна траектория $(x_1(t, s), x_2(t, s))$, где $t(s) \leq t \leq 0$.

Доказательство. Установим, что в области $\Phi(\Omega)$ выполняется (исключая множество разреза и множество, где $\|\psi\| = 2\alpha$) неравенство Беллмана $\omega' \cdot (f_1, f_2) \leq f_0$, а вдоль траектории $(x_1(t, s), x_2(t, s))$, где $t(s) < t < 0$, выполняется уравнение Беллмана $\omega' \cdot (f_1, f_2) = f_0$. Как показано в [10, с. 241], этого достаточно для оптимальности траектории.

Для доказательства нам потребуются уравнения в вариациях, соответствующие уравнениям (2). Запишем их.

Таблица. Значения параметров задачи быстрогодействия

№	Время t	Значение φ
1	Множество разреза	
2	$[-7, 0]$	-1.55
3	$[-7, 0]$	1.51
4	$[-6.4, 0]$	-1.54
5	$[-6.4, 0]$	1.49
6	$[-5.5, 0]$	-1.52
7	$[-5.5, 0]$	1.45
8	$[-4.3, 0]$	-1.44
9	$[-4.3, 0]$	1.34
10	$[-3.1, 0]$	-1.05
11	$[-3.1, 0]$	0.98
12	$[-3.5, 0]$	–
13	$[-5, 0]$	–
14	$[-5.5, 0]$	–
15	$[-7, 0]$	–
16	$[-7, 0]$	–

При $x_3^2 + x_4^2 \geq 4\alpha^2$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1 + \alpha, & \dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, & \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2) + \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \\ \dot{x}_3 &= -x_3\partial_1 v_1 - x_4\partial_1 v_2, & \dot{x}_4 &= -x_3\partial_2 v_1 - x_4\partial_2 v_2, \\ \dot{y}_0 &= 0, & \dot{y}_1 &= \partial_1 v_1 y_1 + \partial_2 v_1 y_2 + \frac{x_4^2 y_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} - \frac{x_3 x_4 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \\ \dot{y}_2 &= \partial_1 v_2 y_1 + \partial_2 v_2 y_2 - \frac{x_3 x_4 y_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} + \frac{x_3^2 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, & \dot{y}_3 &= \dots, & \dot{y}_4 &= \dots\end{aligned}$$

При $x_3^2 + x_4^2 < 4\alpha^2$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1 + \frac{x_3^2 + x_4^2}{4\alpha}, & \dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{2\alpha}, & \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2) + \frac{x_4}{2\alpha}, \\ \dot{x}_3 &= -x_3\partial_1 v_1 - x_4\partial_1 v_2, & \dot{x}_4 &= -x_3\partial_2 v_1 - x_4\partial_2 v_2, \\ \dot{y}_0 &= \frac{1}{2\alpha}(x_3 y_3 + x_4 y_4), & \dot{y}_1 &= \partial_1 v_1 y_1 + \partial_2 v_1 y_2 + \frac{1}{2\alpha} y_3, \\ \dot{y}_2 &= \partial_1 v_2 y_1 + \partial_2 v_2 y_2 + \frac{1}{2\alpha} y_4, & \dot{y}_3 &= \dots, & \dot{y}_4 &= \dots\end{aligned}$$

Запишем выражение для ω' . Значения функций берутся в точках фазового пространства, соответствующих значениям t, s :

$$\omega' = (\Psi')_1 \cdot (\Phi')^{-1} = (f_0, y_0)(\Phi')^{-1},$$

здесь $(\cdot)_1$ – первая строка матрицы

$$(\Phi')^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_t x_1 & \partial_s x_1 \\ \partial_t x_2 & \partial_s x_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & y_1 \\ f_2 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 \\ -f_2 & f_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = f_1 y_2 - f_2 y_1$,

$$\omega' = \frac{1}{\Delta}(f_0 y_2 - y_0 f_2, -f_0 y_1 + y_0 f_1) = \frac{1}{\Delta} \left(\det \begin{pmatrix} f_0 & f_2 \\ y_0 & y_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ y_1 & y_0 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, согласно формулам Крамера ω' является решением системы уравнений

$$z_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} f_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

в частности, $\omega' \cdot f = f_0$ вдоль экстремалей. Далее увидим, что $\omega' = \psi$, где $\psi = \psi(t, s)$ – компоненты экстремали. Согласно принципу максимума Понтрягина функция $H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 - f_0$ вдоль экстремалей равна нулю. Таким образом, функция ψ является решением первого уравнения последней системы. Для проверки верности второго уравнения заметим, что при $t = 0$

$$\psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 - y_0 = 0.$$

Вычислим $d(\psi y - y_0)/dt$. Если $\|\psi\| \geq 2\alpha$ ($(\psi_1, \psi_2) := (x_3, x_4)$), то

$$\psi y + \psi \dot{y} - \dot{y}_0 = -\psi v' y + \left[\psi v' y + x_3 \left(\frac{x_4^2 y_3 - x_3 x_4 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \right) + x_4 \left(\frac{-x_3 x_4 y_3 + x_3^2 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \right) \right] = 0.$$

Если $\|\psi\| \leq 2\alpha$, то

$$\dot{\psi}y + \psi\dot{y} - \dot{y}_0 = -\psi v'y + \left[\psi v'y + \frac{1}{2\alpha}x_3y_3 + \frac{1}{2\alpha}x_4y_4 \right] - \frac{1}{2\alpha}(x_3y_3 + x_4y_4) = 0.$$

Таким образом, вдоль экстремали $\psi y - y_0$ – константа, и она равна нулю.

В силу принципа максимума функция H вдоль траектории принимает максимальное значение по u , поэтому $\omega'(x)f(x, u) \leq f_0(x, u)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М., 2006.
2. Bin Li, Chao Xu, Kok Lay Teo, Jian Chu. Time optimal Zermelo's navigation problem with moving and fixed obstacles // Appl. Math. and Comput. 2013. V. 224. P. 866–875.
3. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Pereira F.L. An indirect numerical method for a time-optimal state-constrained control problem in a steady two-dimensional fluid flow // Proc. of the 2018 IEEE Oceanics Engineering Society Autonomous Underwater Vehicle Sympos. 2019. P. 1–6.
4. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Lobo Pereira F. Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields // Eur. J. of Control. 2020. V. 56. P. 98–106.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 1979.
6. Зубов В.И. Теория колебаний. М., 1979.
7. Николенко П.В. О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 5. С. 738–745.
8. Николенко П.В. Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 372–381.
9. Николенко П.В. О множестве разреза в некоторых экстремальных задачах, связанных с перемещением в поле скоростей // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2017. № 4. С. 37–44.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.

Ростовский государственный
экономический университет

Поступила в редакцию 26.09.2019 г.
После доработки 17.11.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.