
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.62

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. В. Булатов, Л. С. Соловарова

Рассмотрена начальная задача для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В терминах матричных полиномов приведены достаточные условия существования единственного решения. Для таких задач предложены многошаговые разностные схемы. Проведены анализ их устойчивости и расчёты модельного примера.

DOI: 10.31857/S037406412303010X, EDN: QVLSII

Введение. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков – один из основных инструментов для моделирования важных прикладных задач. Если все уравнения одинакового порядка, то они образуют систему ОДУ. Если процесс можно описать взаимосвязанными ОДУ различных порядков, а также трансцендентными (конечномерными) уравнениями, то, объединив их, получим систему с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной. Такие системы принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Если порядок этой системы выше первого, то их называют *ДАУ высокого порядка*.

В настоящее время активно развиваются качественная теория и численные методы решения ДАУ первого порядка (как для начальной, так и для краевой задачи). Достаточно обширная и полная библиография по данному вопросу представлена в монографиях [1, 2], из более ранних можно привести [3, 4]. Для ДАУ высокого порядка обычно применяют следующий стандартный приём: вводят новую вектор-функцию размерности nk (n – размерность исходной задачи, k – порядок ДАУ) и записывают полученную задачу в виде ДАУ первого порядка. Такое преобразование имеет ряд недостатков, а именно увеличивает размерность в k раз и значительно ухудшает свойства полученной задачи – увеличивает индекс, который является показателем сложности (некорректности) первоначальной задачи.

Приведём одно из понятий индекса для ДАУ первого порядка с заданным начальным условием

$$\mathcal{A}(t)x'(t) + \mathcal{B}(t)x(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Будем говорить, что система (1) имеет индекс r , если r – минимальное целое неотрицательное число такое, что существует линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{P}_r = \sum_{j=0}^r \mathcal{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

суперпозиция которого с (1) даёт систему ОДУ, т.е.

$$\mathcal{P}_r \circ (\mathcal{A}(t)x'(t) + \mathcal{B}(t)x(t)) = x'(t) + \bar{\mathcal{B}}(t)x(t),$$

где $\mathcal{R}_j(t)$, $j = \overline{0, r}$, $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\bar{\mathcal{B}}(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, причём $\mathcal{R}_r(t) \neq 0$.

Методы построения оператора $\mathcal{P}_r$ с использованием проекторов и различных обобщённых обратных матриц изложены в [2, 3]. Для ДАУ порядка выше первого можно ввести аналогичное понятие индекса или новую переменную и записать рассматриваемую задачу в виде ДАУ первого порядка. Однако оба эти варианта обладают определёнными недостатками, а

именно для таких задач индекс не будет отражать сложность создания численных методов. В частности, для одного класса ДАУ второго порядка ряд различных схем будет неустойчив или принципиально неприменим, а для других классов ДАУ второго порядка те же самые алгоритмы сходятся к точному решению. Таким образом, возникает необходимость проводить исследование на предмет существования и единственности достаточно гладкого решения и создавать методы численного решения ДАУ, не используя редукцию исходной задачи к ДАУ первого порядка.

Отметим также, что известно очень мало статей, посвящённых численному решению ДАУ высокого порядка. Из них можно выделить [5], где описано применение неявного метода Эйлера для рассматриваемых задач, и [6], в которой данные задачи исследованы с привлечением техники проекторов.

В настоящей работе выделен класс линейных ДАУ второго порядка (начальная задача), для которого предложено семейство многошаговых методов. Эти результаты основаны на особом свойстве матричных полиномов [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n -мерные вектор-функции соответственно, $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (4)$$

Систему (2) с условием (4) принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка* (ДАУ2). Предполагается, что начальные условия (3) согласованы, т.е. рассматриваемая задача имеет решение. Под *решением* мы понимаем любую дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (2) в тождество и удовлетворяет условиям (3).

Большую роль при исследовании ДАУ первого порядка играет теория регулярных матричных пучков [4, 8, 9]. Для дальнейшего изложения нам потребуются определения и вспомогательные результаты.

Определение 1 [9]. Выражение вида $\lambda A + B$, где λ – скалярный параметр, A и B – матрицы размера $m \times n$, называют *матричным пучком*. Если $m = n$ и $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, где λ – скаляр, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется *регулярным*. В противном случае ($m \neq n$ или $\det(\lambda A + B) = 0$ для любого λ) пучок называется *сингулярным*.

Определение 2 [7]. Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ, μ – скалярные параметры, имеет *простую структуру* на отрезке $[0, 1]$, если для любого $t \in [0, 1]$ выполняются условия:

- 1) $\text{rank } A(t) = k = \text{const}$;
- 2) $\text{rank}(A(t)|B(t)) = k + l = \text{const}$;
- 3) $\det(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = a_0(t)\lambda^k\mu^l + \dots, \quad a_0(t) \neq 0$.

Лемма 1 [4]. Если элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\text{rank } A(t) = k = \text{const}$, то существует матрица $P(t)$, элементы которой принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\det P(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$, такая, что матричный пучок $P(t)(\lambda A(t) + B(t))$ имеет блочный вид

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$ – $((n - k) \times n)$ -матрица, $\text{rank } A_1(t) = k = \text{const}$ для любого $t \in [0, 1]$.

Лемма 2 [7]. Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$ и элементы матриц принадлежат классу $C_{[0,1]}^p$, то существуют матрицы $R(t)$, $Q(t)$ с элементами из $C_{[0,1]}^p$ такие, что

$$R(t)(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l \times n)$ -матрицы, $C_3(t)$ – $((n - k - l) \times n)$ -матрица, 0 – нулевые матрицы соответствующих размеров, и имеет место равенство

$$R(t)(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t))Q(t) = \\ = \lambda \begin{pmatrix} E_k & 0 & A_{13}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} B_{11}(t) & 0 & B_{22}(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & 0 \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix},$$

здесь $A_{13}(t)$, $B_{11}(t)$, $B_{22}(t)$, $C_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, – блочные матрицы подходящих размеров, а E_k , E_l и E_{n-k-l} – единичные матрицы размеров k , l и $n - k - l$ соответственно.

Из данных лемм вытекает

Следствие. Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$ и матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют блочный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l \times n)$ -матрицы, $C_3(t)$ – $((n - k - l) \times n)$ -матрица, то

$$\det \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

для любого $t \in [0, 1]$.

Вернёмся к задаче (2), (3). Одним из подходов к исследованию на предмет единственности решения (с учётом того, что начальные условия (3) заданы корректно) и построению численных методов решения является редукция рассматриваемой задачи к системе первого порядка путём введения новой переменной $y(t) = (x'(t)^T, x(t)^T)^T$. С учётом данного обозначения задачу (2), (3) можно записать в виде ДАУ первого порядка

$$\mathcal{A}(t)y'(t) + \mathcal{B}(t)y(t) = \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

где матрицы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ имеют блочный вид

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & C(t) \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = (f^T(t), 0)^T, \quad (6)$$

а начальные условия – вид $y(0) = (x'_0(t))^T$, $x(t)_0^T = y_0$. Эту задачу исследуют или численно решают методами, разработанными для ДАУ первого порядка (см., например, [4]).

Другой подход – это построение дифференциального оператора степени r такого, что

$$\mathcal{P}_r \circ (A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t)) = x'' + \tilde{B}(t)x'(t) + \tilde{C}(t)x(t). \quad (7)$$

Такие подходы – запись задачи (2), (3) в виде ДАУ первого порядка с матрицами и правой частью, определёнными по формуле (6), и построение дифференциального оператора (7) –

имеют принципиальный недостаток: индекс ДАУ (5) и r в формуле (7) не всегда являются показателями сложности создания численных методов решения исходной задачи. Приведём достаточно простые иллюстративные примеры, в которых предполагается, что входные данные удовлетворяют тем условиям гладкости, которые необходимы для проведения выкладок.

Пример 1 [1]. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha \\ 1 & \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $g(t) \in C_{[0,1]}^2$, $q(t) \in C_{[0,1]}^1$, α – скалярный параметр.

Из второго уравнения имеем $u' = g(t) - \alpha t v'$. Подставив это выражение в первое уравнение (8), получим $v = q(t) - g'(t)$.

Достаточно просто можно убедиться в том, что данная система имеет индекс равный двум, а оператор может быть выбран как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

здесь $r = 2$.

Хорошо известно [1, 2, 4, 10, 11], что ряд неявных схем, разработанных для ОДУ, в том числе и жёстких, для ДАУ (1) часто порождают неустойчивые процессы или принципиально неприменимые из-за сингулярности матричного пучка $\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}$. То же самое можно сказать и про задачу (2), (3).

Проведём анализ устойчивости простейшей разностной схемы для этого примера. Для упрощения выкладок положим $q(t) = g(t) = 0$. Обозначим $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $u_j \approx u(t_j)$, $v_j \approx v(t_j)$ и рассмотрим алгоритм

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha \\ 1 & \alpha t_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

полагая, что u_0 , u_1 , v_0 , v_1 заранее заданы. Опуская несложные выкладки, получим, что данная схема будет устойчива только при $|\alpha/(1 + \alpha)| < 1$.

Пример 2. ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad (9)$$

при $c_{22}(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$ и $g(t), c_{22}(t) \in C_{[0,1]}^2$ также имеет индекс равный двум.

Оператор $\mathcal{P}_r$ можно взять в виде

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right].$$

Однако в отличие от первого примера простейшая разностная схема

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} c_{11}(t_{i+1}) & c_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & c_{22}(t_{i+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}' = h^2 \begin{pmatrix} q(t_{i+1}) \\ g(t_{i+1}) \end{pmatrix},$$

где $i = \overline{1, N-1}$, сходится к точному решению с первым порядком при определённой гладкости элементов входных данных и $|u_j - u(t_j)| = O(h)$, $|v_j - v(t_j)| = O(h)$, $j = 0, 1$. Элементарные, но громоздкие выкладки показывают, что, записывая системы (8), (9) в виде ДАУ первого

порядка с матрицами $A(t)$, $B(t)$ и правой частью, определённой по формуле (6), получим задачу индекса два.

Приведём в терминах матричных полиномов достаточные условия существования рассматриваемых задач.

Утверждение 1 [7]. Пусть для задачи (2), (3) выполнены следующие условия:

- 1) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру;
- 2) элементы входных данных обладают достаточной гладкостью (из класса $C_{[0,1]}^p$);
- 3) начальные условия (3) согласованы с правой частью (2).

Тогда данная задача имеет единственное решение из класса $C_{[0,1]}^p$.

Данное утверждение носит только достаточный характер. Проиллюстрируем это. В примере 1 условия утверждения 1 не выполняются, так как $\text{rank } A(t) = 1$, $\text{rank}(A(t)|B(t)) = 2$. Однако нарушается третье условие определения 1:

$$\det(\lambda A(t) + \mu B(t)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \alpha t + \mu(1 + \alpha) \\ \mu & \mu \alpha t \end{pmatrix} = -\mu^2(1 + \alpha).$$

В примере 2 при $c_{22}(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$ все условия утверждения 1 выполнены: $\text{rank } A(t) = \text{rank}(A(t)|B(t)) = 1$, $\det(\lambda A(t) + C(t)) = \lambda c_{22}(t) + c_{11}c_{22}(t)$.

Приведём ещё один пример.

Пример 3. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с условиями $u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0$. При $a_{11} \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{21} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$ и $a_{11}c_{22} = b_{12}b_{21}$ эта задача имеет множество решений $x = (u, v) = (\varphi(t), -b_{221}/c_{22}\varphi'(t))^T$, где $\varphi(t)$ – функция из $C_{[0,1]}^3$, удовлетворяющая условиями $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.

В данном примере матричный полином $\lambda A + \mu B + C$ не имеет простой структуры, так как $\text{rank } A(t) = 1$, $\text{rank}(A|B) = 2$,

$$\det(\lambda A + \mu B + C) = \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \mu b_{12} \\ \mu b_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \lambda a_{11}c_{22} - \mu^2 b_{12}b_{21}.$$

Приведём условия согласования начальных условий и построения оператора $\mathcal{P}_2$. Для этого нам потребуется следующее

Определение 3 (см., например, [3]). Матрица $A^+(t)$ называется псевдообратной к матрице $A(t)$, если она удовлетворяет уравнениям:

- 1) $A(t)A^+(t)A(t) = A(t)$;
- 2) $A^+(t)A(t)A^+(t) = A^+(t)$;
- 3) $(A^+(t)A(t))^T = A^+(t)A(t)$;
- 4) $(A(t)A^+(t))^T = A(t)A^+(t)$.

Матрица $A^+(t)$ определена единственным образом для любой матрицы $A(t)$, её элементы непрерывны, если $\text{rank } A(t) = \text{const}$ при любом t и $A^+(t) = A^{-1}(t)$; если $\det A(t) \neq 0$ для всех t (см., например, [3, 4]), то

$$V(t)A(t) \equiv 0, \quad (10)$$

где $V(t) = E - A^+(t)A(t)$.

Продифференцируем (2) и умножим полученную систему на матрицу $V(t)$. В силу (10) получим систему второго порядка вида

$$V(t)((A'(t) + B(t))x''(t) + (B'(t) + C(t))x'(t) + C'(t)x(t)) = V(t)f'(t).$$

Итогом суммирования данной системы с (2) является система

$$A^1(t)x''(t) + B^1(t)x'(t) + C^1(t)x(t) = f^1(t), \quad t \in [0, 1], \quad (11)$$

где матрицы $A^1(t)$, $B^1(t)$, $C^1(t)$ и вектор-функция $f^1(t)$ определены по формулам

$$A^1(t) = A(t) + V(t)(A'(t) + B(t)), \quad (12)$$

$$B^1(t) = B(t) + V(t)(B'(t) + C(t)), \quad (13)$$

$$C^1(t) = C(t) + V(t)C'(t), \quad (14)$$

$$f^1(t) = f(t) + V(t)f'(t). \quad (15)$$

Аналогичным образом поступим с системой (11): продифференцируем её и умножим на матрицу $V^1(t) = E - A^{1+}(t)A^1(t)$. Суммируя полученную систему и систему (11), имеем

$$A^2(t)x''(t) + B^2(t)x'(t) + C^2(t)x(t) = f^2(t), \quad t \in [0, 1],$$

где

$$A^2(t) = A^1(t) + V^1(t)(A^{1'}(t) + B^1(t)), \quad B^2(t) = B^1(t) + V^1(t)(B^{1'}(t) + C^1(t)),$$

$$C^2(t) = C^1(t) + V^1(t)C^{1'}(t), \quad f^2(t) = f^1(t) + V^1(t)f^{1'}(t).$$

Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру, то, используя технику блочного представления матриц $A(t)$, $A^1(t)$, $B(t)$, $B^1(t)$, $C(t)$, $C^1(t)$ и $V(t)$, $V^1(t)$ (см., например, [12]), лемму 2 и следствие, можно показать, что $\det A^2(t) \neq 0$ при любом $t \in [0, 1]$.

Итак, оператор $\mathcal{P}_2$ для системы (3) можно выбрать в виде

$$\mathcal{P}_2 = (A^2(t))^{-1} \left(E - A^{1+}(t)A^{1+} \frac{d}{dt} \right) (E - A^+(t)A(t)).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r \circ (A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t)) &= \\ = x''(t) + (A^2(t))^{-1}B^2(t)x(t) + (A^2(t))^{-1}C^2(t)x(t) &= (A^2(t))^{-1}f^2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что, используя технику проекторов [2] и операцию дифференцирования, можно указать другой вид оператора $\mathcal{P}_2$. Приведём условия согласования начальных условий (3) для ДАУ (2).

Утверждение 2. Если для задачи (2), (3) выполнены условия 1) и 2) утверждения 1 и условия согласования начальных данных:

$$1) \operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank} (A(0)|B(0)x'_0 + C(0)x_0 - f(0));$$

$$2) \operatorname{rank} A^1(0) = \operatorname{rank} (A^1(0)|B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 - f^1(0)),$$

где $A^1(0)$, $B^1(0)$, $C^1(0)$, $f^1(0)$ определены по формулам (12)–(15), то задача (2), (3) имеет единственное решение.

Доказательство. Подставляя в (2) и в (11) значение $t = 0$, будем соответственно иметь системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A(0)x''(t)|_{t=0} + B(0)x'_0 + C(0)x_0 = f(0)$$

и

$$A^1(0)x''(t)|_{t=0} + B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 = f^1(0).$$

Условия согласования начальных данных вытекают из условий 1) и 2) утверждения 1 и теоремы Кронекера–Капелли. В силу утверждения 2 система (2) эквивалентна (16), которая с условием (3) имеет единственное решение. Утверждение доказано.

Для иллюстрации данного утверждения вернёмся к примеру 2 (формула (9)), для упрощения положив $c_{22}(t) = 1$. В этом случае компоненты $v(t)$ должны удовлетворять условиям

$$v(0) = g(0), \quad (17)$$

$$v'(t)|_{t=0} = g'(t)|_{t=0}. \quad (18)$$

Из условия 1) утверждения 2 вытекает, что $v(0) = g(0)$ (т.е. справедлива формула (17)). Опуская элементарные выкладки, можно показать, что система (11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) + g'(t) \end{pmatrix}.$$

Из условия 2) утверждения 2 вытекает (так как $\text{rank } A^1 = 1$ для любого t), что

$$\text{rank}(A^1(0)|B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 - f^1(0))$$

должен быть равным единице, т.е.

$$\text{rank} \left[\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' \Big|_{t=0} + \begin{pmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \\ g + g' \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \right] = 1.$$

Это возможно только при

$$v'(t)|_{t=0} - v(0) - g(0) - g'(t)|_{t=0} = 0,$$

а так как $v(0) = g(0)$ (формула (17)), то и $v'(t) = g'(t)|_{t=0}$ (т.е. формула (18) справедлива).

Следующий пункт посвящён многошаговым методам решения задачи (2), (3).

2. Разностные схемы. Анализ примера 2 показывает, что известные разностные схемы могут быть использованы для численного решения некоторых классов ДАУ второго порядка. Зададим на отрезке интегрирования равномерную сетку $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $h = 1/N$ и обозначим

$$A_j = A(t_j), \quad B_j = B(t_j), \quad C_j = C(t_j), \quad f_j = f(t_j), \quad x_j \approx x(t_j).$$

С учётом данных обозначений линейные многошаговые (m -шаговые) методы для задачи (2), (3) имеют вид

$$\bar{A}_{i+1} \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} + \bar{B}_{i+1} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + \bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = \bar{f}_{i+1}, \quad i = \overline{m-1, N-1}. \quad (19)$$

Здесь $\bar{A}_{i+1} = A(t_i^*)$, $\bar{B}_{i+1} = B(t_i^*)$, $\bar{C}_{i+1} = C(t_i^*)$, $f_{i+1}^* = f(t_i^*)$, $t_i^* \in [t_{i+1-m}, t_{i+1}]$ и

$$\frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} \approx x''(t)|_{t=t_i^*}, \quad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} \approx x'(t)|_{t=t_i^*}, \quad \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} \approx x(t)|_{t=t_i^*}.$$

Коэффициенты ρ_j , σ_j , γ_j и способы вычисления $\bar{A}_{i+1}$, $\bar{B}_{i+1}$, $\bar{C}_{i+1}$, $\bar{f}_{i+1}$ зависят от выбора точки t_i^* . Стандартно предполагается, что при реализации схем (19) заданы или заранее вычислены стартовые значения $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$.

Схемы (19) можно разделить на классы:

- 1) неявные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$);
- 2) явные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 = \gamma_0 = 0$);
- 3) явно-неявные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 \neq 0$, $\gamma_0 = 0$ или $\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 = 0$, $\gamma_0 \neq 0$).

При реализации схем (19) для задачи (2), (3) на каждом шаге интегрирования требуется решать СЛАУ вида

$$(\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h \sigma_0 \bar{B}_{i+1} + h^2 \gamma_0 \bar{C}_{i+1}) x_{i+1} = \sum_{j=1}^m (\rho_j \bar{A}_{i+1} + h \sigma_j \bar{B}_{i+1} + h^2 \gamma_j \bar{C}_{i+1}) x_{i+1-j} + h^2 \bar{f}_{i+1}. \quad (20)$$

В силу того, что $\det A(t) \equiv 0$, явные методы (20) для задачи (2), (3) принципиально неприменимы. Реализация явно-неявных схем приводит к необходимости решать СЛАУ с матрицей

перед $\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h\sigma_0 \bar{B}_{i+1}$ или $\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h\gamma_j \bar{C}_{i+1}$. Эти матрицы также могут быть тождественно вырожденными. Приведём пример $A(t) = \text{diag}\{a_{11}(t), 0, 0\}$, $B(t) = \text{diag}\{0, b_{22}(t), 0\}$, $C(t) = \text{diag}\{0, 0, c_{33}(t)\}$, где $a_{11}(t)$, $b_{22}(t)$, $c_{33}(t) \neq 0$ для любого t . Поэтому остановимся на неявных схемах.

Приведём хорошо известные факты (см., например, [13]) из теории разностных схем для линейных ОДУ второго и первого порядков вида

$$x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad t \in [0, 1], \quad (21)$$

$$x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (22)$$

Эти схемы для задач (21) и (22) имеют вид

$$\sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} + h\bar{B}_{i+1} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + h^2 \bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = h^2 \bar{f}_{i+1}, \quad (23)$$

$$\sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + h\bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = h\bar{f}_{i+1} \quad (24)$$

соответственно.

В предположении, что элементы входных данных задач (21) и (22) достаточно гладкие, схемы (23) и (24) аппроксимируют соответствующие задачи с порядком $O(h^q)$, начальные значения $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$, $j = \overline{0, m-1}$, и схемы устойчивы, тогда они сходятся к точному решению и справедливы оценки $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^q)$, $i = \overline{m, N}$.

Для устойчивости разностных схем (23) и (24) для задач (21) и (22) соответственно, как правило, рассматривают характеристические полиномы

$$\sum_{j=0}^m \rho_j p^{m-j} = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^m \sigma_j p^{m-j} = 0, \quad (26)$$

где p – скаляр.

Следуя общепринятой терминологии [14], будем называть схемы ρ -устойчивыми, если характеристическое уравнение (25) имеет два кратных корня $p_1 = p_2 = 1$, а остальные корни $p_3, p_4, \dots, p_m$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней; σ -устойчивыми, если характеристическое уравнение (26) имеет корень $p_1 = 1$, а остальные корни $p_2, p_3, \dots, p_m$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней. В силу того, что рассматриваемая задача может включать в себя и алгебраические уравнения (см. пример 3), потребуем, чтобы корни характеристического полинома

$$\sum_{j=0}^m \gamma_j p^{m-j} = 0$$

лежали в единичном круге, на границе круга не было кратных корней и не было корня, равного единице. Это условие по аналогии будем называть γ -устойчивостью. Анализ устойчивости и скорости сходимости многшаговых методов для ДАУ первого порядка (1) проведён в работах [1, 2, 11, 14]. Если в исходной системе положим $A(t) \equiv 0$, то получим задачу (1), и приведённые выше определения устойчивости схем совпадают с классическими.

Относительно сходимости схем (19) справедливо

Утверждение 3. Пусть для задачи (2), (3) выполнены условия:

1) элементы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $C_{[0,1]}^q$;

2) начальные значения $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ удовлетворяют оценке $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) схема (19) аппроксимирует задачу (2), (3) с порядком q ;

4) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру;

5) схема (19) ρ -, σ - и γ -устойчива;

6) матрица $Q(t) = Q$ в лемме 2 постоянная.

Тогда справедлива оценка $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$.

Доказательство. Умножим каждое из соотношений (19) на матрицу $\bar{R}_{i+1} = R(t_i^*)$ и произведём замену переменной $x_i = Qy_i$, $i = \overline{0, N}$, где матрицы $R(t)$, $Q(t)$ те же, что и в лемме 2.

В силу условия 6) утверждения 3 и леммы 2 имеем блочные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} E_k & 0 & A_{13}(t_i^*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \rho_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} B_{11}(t_i^*) & 0 & B_{22}(t_i^*) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \sigma_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} C_{11}(t_i^*) & C_{12}(t_i^*) & 0 \\ C_{21}(t_i^*) & C_{22}(t_i^*) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \gamma_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} = Q^{-1} x_{i+1-j}, \quad \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix} = R(t_i^*) f(t_i^*).$$

В силу γ -устойчивости разностных схем, условий 2) и 3) утверждения 3 получим

$$\|y_i^3 - y^3(t_i)\| = O(h^q). \quad (28)$$

Для первой и второй компонент блочной системы (27) будем иметь равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (\rho_j E_k + \sigma_j h B_{11}(t_i^*) + \gamma_j h^2 C_{11}(t_i^*)) y_{i+1-j}^1 + \sum_{j=0}^m \gamma_j C_{12}(t_i^*) y_{i+1-j}^2 = \\ = h^2 \varphi_{i+1}^1(t_i^*) - \sum_{j=0}^m (\rho_j A_{13}(t_i^*) + \sigma_j B_{22}(t_i^*)) y_{i+1-j}^3, \\ \sum_{j=0}^m (\sigma_j + h \gamma_j C_{22}(t_i^*)) y_{i+1-j}^2 + \sum_{j=0}^m h \gamma_j C_{21}(t_i^*) y_{i+1-j}^1 = \varphi_{i+1}^2(t_i^*). \end{aligned}$$

Из условий ρ - и σ -устойчивости схем, аппроксимации задачи и результатов о сходимости схем для ОДУ первого и второго порядков [13, 14] следует, что

$$\|y_i^2 - y^2(t_i)\| = O(h^q), \quad \|y_i^1 - y^1(t_i)\| = O(h^q). \quad (29)$$

Вспоминая, что $x(t) = Qy(t)$, и учитывая оценки (28), (29), будем иметь $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^q)$, $i = \overline{m, N}$. Утверждение доказано.

Отметим, что условие 6) утверждения 3 для схем вида (19) пока не удалось обойти. Предварительный анализ показывает, что его можно смягчить.

Для иллюстрации приведём двухшаговый метод первого порядка

$$A_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + hB_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + h^2C_{i+1}x_{i+1} = h^2f_{i+1} \quad (30)$$

и трёхшаговый метод второго порядка

$$A_{i+1}(2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2}) + \frac{h}{6}B_{i+1}(11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2}) + h^2C_{i+1}x_{i+1} = h^2f_{i+1}. \quad (31)$$

В следующем пункте будут приведены некоторые расчёты для данных алгоритмов.

3. Численные расчёты. Проведём расчёты модельных примеров по схемам (30), (31). В качестве стартовых точек взяты точные значения $x(h)$ и $x(2h)$ соответственно.

Пример 4. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2\alpha \exp(t) & 0 & 0 \\ 2\alpha & \exp(-t) & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' + \\ + \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2) \exp(t) & 0 & 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2) & 3\gamma \exp(-t) & 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2) & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0) = (0, 1, 0)$, $x'(t)|_{t=0} = (\beta, -\gamma, 1)^T$. Точное решение имеет вид

$$x(t) = (\exp(-\alpha t) \sin(\beta t), \exp(-\gamma t), \sin t)^T.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться что данный пример удовлетворяет условиям утверждения 1. Варьируя параметры α , β , γ , будем иметь жёсткую систему ОДУ первого порядка для второй компоненты, жёсткую и быстро осциллирующую систему ОДУ второго порядка для первой компоненты, и алгебраическую связь для третьей компоненты.

Результаты расчётов представлены в табл. 1, 2 при параметрах $\alpha = 20$, $\beta = 5$, $\gamma = 30$. Погрешности приведены для каждой компоненты в точке $t = 1$.

Таблица 1. Результаты применения метода (30) для примера 4

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	$7.4 \cdot 10^{-7}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
0.025	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

Таблица 2. Результаты применения метода (31) для примера 4

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
0.025	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

При увеличении жёсткости или жёсткости и осцилляции, т.е. при увеличении параметров α , β и γ , предложенные алгоритмы также неплохо работают.

Отметим, что предложенные схемы можно применять и для численного решения более широкого класса задач.

Пример 5. Точное решение $x(t)$ задачи

$$\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2\exp(t) & 1 & 0 \\ 4 & \exp(-t) & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 3 & \exp(t) \\ 0 & 3\exp(-t) & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t) \sin t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0) = (1, 1, 0)$, $x'(t)|_{t=0} = (-2, -3, 1)^T$ определяется по формуле

$$x(t) = (\exp(-2t), \exp(-3t), \sin t)^T.$$

С помощью элементарных преобразований получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 1 - \exp(-t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 3\exp(-t) & 1 \\ 0 & -3\exp(-t) & -1 \\ 0 & 3 - \exp(-t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя ДАУ при $t = 0$ не удовлетворяет условиям утверждения 1, так как нарушено условие 3) определения 2. Численные расчёты этого примера представлены в табл. 3 и 4 для

методов (30), (31). Здесь, также как и в предыдущем примере, погрешности для каждой компоненты приведены при $t = 1$.

Таблица 3. Результаты применения метода (30) для примера 5

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	0.027	0.01	$1.7 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.014	0.0055	$2.8 \cdot 10^{-13}$

Таблица 4. Результаты применения метода (31) для примера 5

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	0.0043	0.00013	$4.8 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.0012	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-13}$

Заключение. В статье выделены классы ДАУ второго порядка (начальная задача), которые имеют единственное решение в классе достаточно гладких функций. Для численного решения таких задач предложено построение многошаговых методов. Приведены конкретные двухшаговый и трёхшаговый методы первого и второго порядков соответственно. Их работоспособность продемонстрирована на расчётах модельных примеров.

Работа выполнена в рамках базового проекта “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (проект 121041300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia, 1996.
2. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: a Projector Based Analysis. Berlin; Heidelberg, 2013.
3. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.
4. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.
5. *Sand J.* On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEs // Appl. Numer. Math. 2002. № 42. P. 411–424.
6. *Mehrmann V., Shi C.* Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numer. Algorithms. 2006. № 42. P. 281–307.
7. *Булатов М.В., Минг-Гонг Ли.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1299–1306.
8. *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2006.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1986.
10. *Данилов В.А., Чистяков В.Ф.* О препятствиях на пути построения эффективных численных методов решения алгебро-дифференциальных систем. Иркутск, 1990 (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР; № 5).
11. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Zürich, 2006.
12. *Булатов М.В.* О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 360–372.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М., 1975.
14. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., 1999.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 19.08.2020 г.
После доработки 11.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.