

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ
ГАММЕРШТЕЙНА–СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследована система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Стилтьеса, предъядра которых представляют собой непрерывные функции распределений. Доказана конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного и ограниченного решения системы. Изучена интегральная асимптотика построенного решения. Приведены примеры систем, для которых выполняются все условия доказанной теоремы.

DOI: 10.31857/S0374064123030093, EDN: QVJFJH

Введение. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений на положительной полуоси $x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$

$$f_i(x) = \int_0^\infty K_i(x, y) G_i(f_1(r(x, y)), \dots, f_n(r(x, y))) d\mu_i(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ (T – знак транспонирования). В системе (1) меры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательные функции со свойствами

$$\mu_i(0) = 0, \quad \mu_i(+\infty) = 1, \quad \mu_i(y) \uparrow \text{ по } y \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Ядра $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ – измеримые функции на множестве $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям: существуют непрерывные на $\mathbb{R}^+$ функции $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$ со свойствами

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \quad \lambda_i(x) \neq 0, \quad \lambda_i(x) \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_i(x) \uparrow 1, \quad x \rightarrow +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$(1 - \lambda_i(x))x^m \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, \quad (4)$$

такие, что

$$\lambda_i(x) \leq K_i(x, y) \leq 1, \quad K_i(x, y) \neq 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Функция $r(x, y)$, фигурирующая в (1), непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}_+^2$, принимает неотрицательные значения и удовлетворяет следующим условиям:

I) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x, y) \uparrow$ по y на $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^+$ данная функция $\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

II) $r(x, 0) \geq x$, $x \in \mathbb{R}^+$, и существует число $\delta > 0$ такое, что $r(x, \delta) \geq x + \delta$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Нелинейности $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}_+^n := \underbrace{\mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+}_n$, принима-

ют вещественные значения и удовлетворяют определённым ограничениям (см. п. 1 ниже).

Системы вида (1) имеют приложения во многих разделах математического естествознания, например, в теории марковских процессов, в теории переноса излучения в неоднородных средах и в кинетической теории газов (в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука) (см., например, [1–5]).

Изучение вопроса существования нетривиальных решений системы (1) играет существенную роль в исследованиях скалярных и векторных нелинейных псевдодифференциальных уравнений в динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн, а также в вопросах

существования и единственности решения нелинейных многомерных интегральных уравнений в математической теории географического распространения пандемии (см. [6–9]).

В случае когда $r(x, y) = y$ или $r(x, y) = x + y$, $\mu_i(y) = y$, $i = \overline{1, n}$, а ядра $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ зависят от разности своих аргументов, системы вида (1) при различных ограничениях на $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ исследованы в работах [10–12].

Следует отметить, что соответствующий скалярный аналог системы (1) ($n = 1$) достаточно подробно исследован в статьях [13–16] для случая $r(x, y) = y$ или $r(x, y) = x + y$, $\mu(y) = y$, а для $K(x, y)$ минорантой в смысле М.А. Красносельского служит консервативное ядро Винера–Хопфа.

В настоящей работе при некоторых естественных ограничениях на $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ (см. п. 1) удаётся доказать конструктивную теорему существования неотрицательного и ограниченного решения. Исследуется также интегральная асимптотика построенного решения на бесконечности. Для иллюстрации полученных результатов приводятся конкретные примеры функций $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$.

1. Обозначения и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ – алгебра вещественных $n \times n$ матриц с единицей I . Обозначим через $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ конус матриц с неотрицательными компонентами. Данный конус вводит частичный порядок $\geq$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$. Будем писать, что $A \succ 0$, если $A \geq 0$, и $A > 0$, если все компоненты матрицы A положительны. Класс $\mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}$ примитивных матриц состоит из матриц A , для которых существует натуральное число p такое, что $A^p > 0$.

Пусть $r(A)$ – спектральный радиус матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (модуль наибольшего по модулю собственного значения A). Согласно теореме Перрона (см. [17, с. 260]) если $A \in \mathcal{K}_p$, то $r(A)$ является её наибольшим по модулю простым собственным значением, причём существует вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i , $i = \overline{1, n}$, такой, что

$$A\eta = r(A)\eta.$$

Для нелинейностей $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ предположим выполнение следующих условий:

- а) $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на $\mathbb{R}_+^n$ функции, которые принимают вещественные значения и монотонно возрастают по каждому аргументу u_j , $j = \overline{1, n}$, на множестве $\mathbb{R}^+$;
- б) существует примитивная и симметричная матрица A со спектральным радиусом $r(A) = 1$ такая, что

$$G_i(u_1, \dots, u_n) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, \eta_1] \times \dots \times [0, \eta_n],$$

где $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – элементы матрицы $A \in \mathcal{K}_p$, а $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$, $\eta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, – неподвижный вектор A (существование такого вектора следует из теоремы Перрона).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Если нелинейности $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют неравенствам

$$G_i(\eta_1, \dots, \eta_n) \leq \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

и выполняются условия (2)–(5), I), II), а), б), то система нелинейных интегральных уравнений (1) имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение. Более того, $\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Сформулированная теорема обобщает и дополняет соответствующий результат из работы [16].

Замечание 2. К сожалению, вопрос единственности построенного решения до сих пор остаётся открытым.

2. Доказательство теоремы.

Шаг 1. Сначала рассмотрим вспомогательную линейную систему интегральных уравнений на полуоси

$$F_i(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$.

Рассмотрим следующие простые итерации для системы (7):

$$F_i^{(p+1)}(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y),$$

$$F_i^{(0)}(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Ввиду непрерывности функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $r(x, y)$ и $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ на соответствующих множествах, индукцией по p несложно доказать, что

$$F_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

С учётом условий (2), (3), I) и II) легко можно проверить также, что

$$F_i^{(p)}(x) \uparrow \text{ по } p, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Докажем теперь, что

$$F_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad p = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

При $p = 0$ утверждение (11) сразу следует из условий (3). Предположим, что $F_i^{(p)}(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$, при некотором натуральном p . Тогда для любых $(x_1, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x_2, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $x_1 > x_2$, в силу условия I) имеет место неравенство

$$F_i^{(p)}(r(x_1, y)) \leq F_i^{(p)}(r(x_2, y)), \quad i = \overline{1, n}.$$

С учётом (2) и (3) из (8) будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} F_i^{(p+1)}(x_1) &= (1 - \lambda_i(x_1))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_1, y)) d\mu_i(y) \leq \\ &\leq (1 - \lambda_i(x_2))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_2, y)) d\mu_i(y) = F_i^{(p+1)}(x_2), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Таким образом, свойство (11) доказано.

Теперь, используя (11), убедимся, что

$$F_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad p = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Действительно, при $p = 0$ данное включение сразу следует из условия (4). Предположим, что $F_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$, при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2), I), II), (10) и (11), из (8) получаем неравенства

$$0 \leq F_i^{(p+1)}(x) \leq (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, 0)) d\mu_i(y) \leq$$

$$\leq (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j^{(p)}(x) \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

а значит, $F_i^{(p+1)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Шаг 2. Докажем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что имеет место оценка

$$\int_0^\infty F_i^{(p)}(x) dx \leq C, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть $a \geq 0$ – произвольное число. Умножим обе части (8) на η_i , $i = \overline{1, n}$. Далее проинтегрируем обе части полученного равенства по x на множестве $[a, +\infty)$, после чего просуммируем это соотношение по всем $i = \overline{1, n}$. Тогда с учётом (2), (4), I) и II) из (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(x) dx &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_a^\infty \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\infty \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_\delta^\infty \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, 0)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(r(x, \delta)) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx$$

или

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (12)$$

Так как $(1 - \mu_i(\delta)) > 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, то из (12) в силу теоремы Перрона имеем

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (13)$$

С учётом (11) и (9) из (13) получим оценку

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j F_j^{(p+1)}(a + \delta) \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (14)$$

Используя теорему Фубини (см. [18, с. 317]), в силу (4) из (14) получаем

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(a + \delta) da \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty x(1 - \lambda_i(x)) dx := \gamma, \quad (15)$$

откуда следует, что

$$\int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (\eta_i) \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty x(1 - \lambda_i(x)) dx := C_1, \quad (16)$$

где $j = \overline{1, n}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Проинтегрируем теперь обе части (8) по x в пределах от 0 до δ , затем умножим на η_i и просуммируем полученное равенство по всем $i = \overline{1, n}$. В результате, если учесть (10) и (15), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^\delta F_i^{(p+1)}(x) dx &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\delta \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, y)) d\mu_i(y) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x, 0)) dx d\mu_i(y) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, \delta)) dx d\mu_i(y) \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx d\mu_i(y) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x + \delta) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i \int_\delta^\infty \int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i(\delta)) \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx + \gamma, \end{aligned}$$

отсюда, ввиду того, что $\max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i(\delta)) < 1$, следует оценка

$$\int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (\eta_i) (1 - \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \gamma := C_2. \quad (17)$$

Учитывая (16) и (17), а также определение нулевого приближения в итерациях (8), получаем

$$\int_0^\infty F_j^{(p)}(x) dx \leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left(\eta_i \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx \right), C_1 + C_2 \right\} := C, \quad j = \overline{1, n}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (18)$$

Таким образом, в силу (9)–(11), (18) и теоремы Б. Леви (см. [18, с. 303]) заключаем, что последовательность монотонных непрерывных вектор-функций $F^{(p)}(x) := (F_1^{(p)}(x), \dots, F_n^{(p)}(x))^T$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, почти всюду на $\mathbb{R}^+$ имеет предел при $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F^{(p)}(x) =: F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T,$$

причём предельная вектор-функция удовлетворяет системе (7). Из (10) и (18) следует, что

$$\eta_i(1 - \lambda_i(x)) \leq F_i(x), \quad \int_0^\infty F_i(x) dx \leq C, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

где число C определяется по формуле (18).

Шаг 3. Рассмотрим теперь вторую вспомогательную систему линейных интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \varphi_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

относительно неизвестной вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$.

Введя следующие последовательные приближения для системы (20):

$$\varphi_i^{(p+1)}(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \varphi_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y),$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

индукцией несложно убедиться в достоверности приведённых ниже утверждений:

$$\varphi_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \uparrow \text{ по } p, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (22)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leq F_i(x), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leq \eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (24)$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ – суммируемое решение вспомогательной системы (7), удовлетворяющее неравенствам (19).

Следовательно, в соответствии с (21)–(24) последовательность непрерывных вектор-функций $\varphi^{(p)}(x) = (\varphi_1^{(p)}(x), \dots, \varphi_n^{(p)}(x))^T$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, имеет поточечный предел $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_i^{(p)}(x) = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно теореме Б. Леви предельная вектор-функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ удовлетворяет системе (20). Из (22)–(24) получаем также двусторонние оценки

$$\eta_i(1 - \lambda_i(x)) \leq \varphi_i(x) \leq \min\{\eta_i, F_i(x)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (25)$$

Из (19) и (25), в частности, следует, что $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Заметим теперь, что системе интегральных уравнений (20) удовлетворяет также неподвижный вектор матрицы A . Очевидно, что вектор-функция $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))^T$, где $\phi_i(x) = \eta_i - \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяет соответствующей однородной системе линейных интегральных уравнений

$$\phi_i(x) = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из (19) и (25) получаем

$$0 \leq \phi_i(x) \leq \eta_i, \quad \phi_i(x) \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \eta_i - \phi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Шаг 4. Рассмотрим специальные итерации для исходной системы нелинейных интегральных уравнений

$$f_i^{(p+1)}(x) = \int_0^\infty K_i(x, y) G_i(f_1^{(p)}(r(x, y)), \dots, f_n^{(p)}(r(x, y))) d\mu_i(y),$$

$$f_i^{(0)}(x) = \eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (27)$$

С учётом непрерывности функций $r(x, y)$, $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и измеримости ядер $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ методом математической индукции несложно проверить, что $\{f_i^{(p)}(x)\}_{i=1}^n$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – измеримые функции на $\mathbb{R}^+$. Используя условия *a)*, (6) и (2), нетрудно доказать, что

$$f_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (28)$$

Докажем, что

$$f_i^{(p)}(x) \geq \phi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (29)$$

Неравенства (29) при $p = 0$ сразу следуют ввиду неотрицательности функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ и определения нулевого приближения в (27). Предположим, что оценки (29) справедливы при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая условия *b)* и (5), из (27) получаем неравенства

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty K_i(x, y) f_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty K_i(x, y) \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y) \geq$$

$$\geq \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y) = \phi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, на основании (28) и (29) заключаем, что последовательность измеримых вектор-функций $f^{(p)}(x) = (f_1^{(p)}(x), \dots, f_n^{(p)}(x))^T$ имеет поточечный предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Принимая во внимание непрерывность функций r , $\{G_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mu_i\}_{i=1}^n$, а также измеримость ядер $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, в силу теоремы Б. Леви предельная вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ удовлетворяет системе (1). Из (28), (29) и (26) вытекает, что

$$\phi_i(x) \leq f_i(x) \leq \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема доказана.

3. Примеры. Приведём конкретные примеры функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и нелинейностей $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих всем условиям теоремы.

Примеры $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$:

$\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, где $\varepsilon_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, – произвольные числовые параметры;
 $\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i/(1 + x^3)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$.

Примеры $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$:

$K_i(x, y) = \lambda_i(x) + (1 - \lambda_i(x))W_i(x, y)$, где $\{W_i(x, y)\}_{i=1}^n$ – произвольные неотрицательные и измеримые функции, удовлетворяющие неравенству $W_i(x, y) \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$;

$K_i(x, y) = 0.5(1 + \lambda_i(x) + (1 - \lambda_i(x))W_i(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $i = \overline{1, n}$.

Наглядными примерами функций $\{W_i(x, y)\}_{i=1}^n$ могут служить следующие функции:

$W_i(x, y) = \alpha_i e^{-\beta_i(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, где α_i , β_i – числовые параметры, $\beta_i > 0$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, n}$;

$W_i(x, y) = (\gamma_i/\sqrt{\pi})e^{-(x-y)^2} + \delta_i e^{-(x+y)}$, $0 < \gamma_i \leq \sqrt{\pi}/2$, $0 < \delta_i \leq 1/2$, $i = \overline{1, n}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Примеры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$:

$\mu_i(y) = 1 - e^{-\alpha_i y}$, $\alpha_i > 0$, $y \in \mathbb{R}^+$, где α_i – числовые параметры, $i = \overline{1, n}$;

$\mu_i(y) = 1 - n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{-\alpha_i \varepsilon_j y}$, $y \in \mathbb{R}^+$, где $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – положительные числовые параметры, $i = \overline{1, n}$.

Примеры $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$:

$G_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j(u_j)$, $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $i = \overline{1, n}$, где $\{Q_j(u)\}_{j=1}^n$ – непрерывные и монотонные на $\mathbb{R}^+$ функции со свойствами $Q_j(u) \geq u$, $u \in [0, \eta_j]$, $Q_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = \overline{1, n}$;

$$G_i(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2} Q_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М., 1963.
2. Соболев В.В. Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
3. Енгибарян Н.Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
4. Арабаджян Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1618–1622.
5. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Журн. теор. и мат. физики. 2012. Т. 172. № 3. С. 497–504.
6. Владимиров В.С., Волович Я.И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. Хачатрян Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 172–193.
8. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
9. Сергеев А.Г., Хачатрян Х.А. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // Тр. Московского мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 1. С. 113–131.
10. Хачатрян Х.А. О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21. № 2. С. 154–161.
11. Хачатрян Х.А. О некоторых системах нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 4. С. 552–566.
12. Хачатрян Х.А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.

13. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
14. *Banas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
15. *Хачатрян Х.А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Докл. РАН. 2009. Т. 425. № 4. С. 462–465.
16. *Хачатрян Х.А.* Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 173–200.
17. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 05.01.2023 г.
После доработки 05.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.