

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.929

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
СО СДВИГОМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ВЕКТОР
В СВОБОДНОМ ЧЛЕНЕ

© 2023 г. Н. В. Зайцева, А. Б. Муравник

В полупространстве для гиперболических дифференциально-разностных уравнений с оператором сдвига общего вида в свободном члене (или в нелокальном операторном потенциале) построены трёхпараметрические семейства решений. Доказано, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа соответствующих дифференциально-разностных операторов положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

DOI: 10.31857/S037406412303007X, EDN: QUXGJY

Введение. В современной теории дифференциальных уравнений одним из важнейших направлений является исследование задач для дифференциально-разностных уравнений, что объясняется их многочисленными приложениями. И если обыкновенным дифференциально-разностным уравнениям посвящено значительное число работ (см., например, [1–4] и библиографию в них), то дифференциально-разностные уравнения с частными производными изучены в гораздо меньшей степени.

В настоящее время наиболее полно и подробно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений (см., например, [5–9]). В статьях [10–13] изучен вопрос классической разрешимости начальных и модельных задач для таких уравнений в неограниченных областях.

Краевые задачи для параболических уравнений со сдвигами рассматриваются в [14, 15] и в монографии [16]. Гиперболическим дифференциально-разностным уравнениям со сдвигами по времени посвящены работы [17–19], а со сдвигами по пространственным переменным – статьи [20–25].

В данной работе в полупространстве $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ исследуется вопрос существования (и построения в явном виде) гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{tt}(x, t) - a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + bu(x - h, t) = 0, \quad (1)$$

где $a \neq 0$, $b > 0$ – заданные вещественные числа; $h := (h_1, \dots, h_n)$ – заданный вектор с действительными координатами, длина которого не равна нулю.

Определение. Функция $u(x, t)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если в каждой точке полупространства $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ существуют классические производные u_{tt} и $u_{x_j x_j}$ ($j = \overline{1, n}$) и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1).

1. Построение решений уравнения. Применим формально к уравнению (1) преобразование Фурье по n -мерной переменной x :

$$\widehat{f}(\xi) := F_x[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx,$$

где $\xi \cdot x$ – скалярное произведение, и перейдём к двойственной переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Согласно операционной схеме (см. работы [12, 13, 24]) и с учётом формул [26, с. 163, 164]

$$F_x[f(x - x_0)] = e^{ix_0 \cdot \xi} F_x[f], \quad F_x[D_x^\alpha D_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_t^\beta F_x[f]$$

получим для функции $\widehat{u}(\xi, t) := F_x[u](\xi, t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} + (a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi) + ib \sin(h \cdot \xi)) \widehat{u} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\widehat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \widehat{u}_t(\xi, 0) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

решение которой определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2i\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi))}]. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin \varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos \varphi(\xi), \quad (3)$$

$$\rho(\xi) := [(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi))^2 + b^2 \sin^2(h \cdot \xi)]^{1/4}, \quad (4)$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)}. \quad (5)$$

Подробные вычисления, аналогичные данным, приведены в статье [22].

Применим теперь к равенству (2) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим соотношения

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2i\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi))}] e^{-ix \cdot \xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi)} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)}] d\xi = \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + ie^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\ &\quad - e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + ie^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Используем полученное интегральное представление ниже, выбрав по аналогии с работой [20] в качестве частных линейно независимых решений уравнения (1) функции, содержащие синус.

2. Существование классических решений уравнения. Доказана следующая

Теорема. При выполнении условия

$$a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi) > 0 \quad (6)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ функции

$$F(x, t; \xi) := e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \quad (7)$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \quad (8)$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Проверим сначала, что функция (7) удовлетворяет уравнению (1). Для этого вычислим производные

$$\begin{aligned} F_{x_j}(x, t; \xi) &= \xi_j e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j^2 e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_t(x, t; \xi) &= G_1(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \\ &\quad + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Найдём теперь значения выражений $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ в формуле (9).

Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), то имеет место равенство

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin(2\varphi(\xi)).$$

Из (5) следует, что $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$ и, значит, $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$. В работах [12, 13, 24] показано, что при выполнении неравенства $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ справедливы соотношения

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi(\xi))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)} \frac{|a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

С учётом выполнения условия (6) отсюда получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)} \frac{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = b \sin(h \cdot \xi). \quad (10)$$

Далее при установленном выше неравенстве $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ и выполнении условия (6) получим

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = -\rho^2(\xi) \cos(2\varphi(\xi)) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = -a^2 |\xi|^2 - b \cos(h \cdot \xi). \quad (11)$$

С учётом найденных выражений (10) и (11) функция (9) принимает вид

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= [-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \\ &\quad + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] e^{tG_1(\xi)}. \end{aligned}$$

Подставим производные F_{tt} и $F_{x_j x_j}$ в уравнение (1):

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) - a^2 \sum_{j=1}^n F_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= \left[-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \right. \\ &\quad \left. + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + a^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) \right] e^{tG_1(\xi)} = \\ &= [-b \cos(h \cdot \xi) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] e^{tG_1(\xi)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -b \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi - h \cdot \xi) e^{tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + (x - h) \cdot \xi) e^{tG_1(\xi)} = -bF(x - h, t; \xi).
\end{aligned}$$

Проверим теперь, что функция (8) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле. Для этого найдём производные:

$$\begin{aligned}
H_{x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\
&\quad - 2G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi). \tag{12}
\end{aligned}$$

С учётом выражений (10) и (11) запишем функцию (12) в виде

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x, t; \xi) &= [-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\
&\quad - b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi)] e^{-tG_1(\xi)}.
\end{aligned}$$

Подставим производные H_{tt} и $H_{x_j x_j}$ в уравнение (1):

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x, t; \xi) - a^2 \sum_{j=1}^n H_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= \left[-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \right. \\
&\quad \left. - b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + a^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) \right] e^{-tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi + h \cdot \xi) e^{-tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - (x - h) \cdot \xi) e^{-tG_1(\xi)} = -bH(x - h, t; \xi).
\end{aligned}$$

Отметим, что при выполнении условия (6) функции (4) и (5) (а значит, и функции (7), (8)) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, так как подкоренное выражение в формуле (4) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (5) не обращается в нуль. Таким образом, построенные решения (7), (8) уравнения (1) действительно являются гладкими и, более того, бесконечно гладкими. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условия (6) семейство функций

$$G(x, t; A, B, \xi) := C_1 e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + C_2 e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \tag{13}$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых значениях параметров $C_{1,2} \in \mathbb{R}^1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Классы уравнений, удовлетворяющих условию теоремы. Очевидно, что при $\xi_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, и $b > 0$ условие (6) теоремы и следствия выполняется.

При выполнении неравенства $|h \cdot \xi| < \pi/2$ условие теоремы также выполняется всегда, так как косинус такого аргумента положителен.

Рассмотрим случай $|h \cdot \xi| \geq \pi/2$. Имеем

$$|h \cdot \xi| = |h| |\xi| |\cos(\widehat{h, \xi})| \geq \frac{\pi}{2},$$

т.е.

$$|\xi| \geq \frac{\pi}{2|h| |\cos(\widehat{h, \xi})|} \geq \frac{\pi}{2|h|}.$$

Таким образом, неравенство (6) будет выполнено, если коэффициенты и сдвиги уравнения подчиняются соотношению

$$\frac{\pi}{2|h|} > \sqrt{\frac{b}{a^2}}, \quad (14)$$

так как в этом случае $|\xi|^2 > b/a^2$ или $a^2|\xi|^2 > b \geq b|\cos(h \cdot \xi)|$ для любого значения аргумента косинуса.

Замечание. Условие (14) является достаточным, гарантирующим существование классических решений уравнения (1), определяемых по формуле (13).

Авторы признательны А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284; вторым автором – при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-03-2020-223/3, ФССФ-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pinney E. Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley, 1958.
2. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
5. Hartman P., Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential functional equations // Acta Math. 1966. V. 115. P. 271–310.
6. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
7. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // Соврем. математика. Фунд. направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.
8. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II // Соврем. математика. Фунд. направления. 2009. Т. 33. С. 3–179.
9. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 3–112.
10. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Мат. заметки. 2020. Т. 108. № 5. С. 764–770.
11. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
12. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами в полупространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 6. С. 987–993.
13. Муравник А.Б. Эллиптические уравнения со сдвигами общего вида в полупространстве // Мат. заметки. 2022. Т. 111. № 4. С. 571–580.
14. Shamin R.V., Skubachevskii A.L. The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equat. 2001. V. 8. P. 407–424.
15. Йаакбариев А., Сакбаев В.Ж. Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Изв. вузов. Математика. 2015. № 4. С. 17–25.
16. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
17. Зарубин А.Н. Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.
18. Власов В.В., Медведев Д.А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. математика. Фунд. направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
19. Акбари Фаллахи А., Йаакбариев А., Сакбаев В.Ж. Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 352–365.

20. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
21. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.
22. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.
23. *Зайцева Н.В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.
24. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 628–637.
25. *Зайцева Н.В.* Классические решения одного многомерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 810–819.
26. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.
После доработки 02.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.