

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© 2023 г. О. Х. Абдуллаев

Для параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа, содержащего нелинейное нагруженное слагаемое, исследуется нелокальная задача с интегральным условием склеивания. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – с применением теории интегральных уравнений. Определяются классы и достаточные условия для заданных функций, обеспечивающих однозначную разрешимость исследуемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030056, EDN: QUNKQU

Введение. Данная работа посвящена исследованию нелокальной задачи с интегральными условиями склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_CD_{0y}^\alpha u + f_1(x, y; u(x; 0)) & \text{при } x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_2(x, y; u(x + y; 0)) & \text{при } x > 0, \quad y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_3(x, y; u_y(0; x + y)) & \text{при } x < 0, \quad y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

с оператором Капуто [1, с. 108]

$${}_CD_{0y}^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^y (y - z)^{-\alpha} f'(z) dz$$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$, где $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$, – заданные функционалы, действующие на следы решения уравнения (1) и его производной по переменной y .

Локальная задача с разрывными условиями склеивания (но без интегрального слагаемого) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sign}(xy)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 + \operatorname{sign}(xy)}{2} {}_CD_{0t}^\alpha u = f(x, y), \quad \alpha \in (0, 1),$$

была изучена в статье [2]. Следует отметить, что это уравнение линейное (причём без нагруженной части). При исследовании поставленной задачи с линейными условиями для него были получены линейное дифференциальное уравнение (относительно $u(x, 0) = \tau_1(x)$) и линейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода (относительно $u_y(0, y) = \tau_2'(y)$) со слабой особенностью, однозначная разрешимость которой сразу следует из теории интегральных уравнений.

Локальные и нелокальные задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания для нагруженных уравнений параболо-гиперболических типа с одной линией изменения типа, содержащие различные интегро-дифференциальные операторы целого и дробного порядков, были изучены в работах [3–6] и др. Хотелось бы отметить, что уравнения и задачи, рассмотренные в этих работах, не содержат нелинейные части.

Задачи для уравнений смешанного типа с двумя и тремя линиями изменения типа целого и дробного порядка рассмотрены в статьях [7–10] и др.

В работах [11] и [12] доказана однозначная разрешимость различных локальных и нелокальных краевых задач с интегральными условиями склеивания для парабола-гиперболического уравнения с нелинейной нагруженной частью и дифференциальным оператором Капуто, имеющего только одну линию изменения типа.

1. Постановка задачи и основные функциональные соотношения. Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной отрезками A_1A_2 , A_2B_2 прямых $x = l$, $y = h$ при $x > 0$, $y > 0$ и A_1C_1 , C_1B_1 на характеристиках $x - y = l$, $x + y = 0$ уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$, а также отрезками B_1C_2 , C_2B_2 на характеристиках $x + y = 0$, $y - x = h$ уравнения (1) при $x < 0$, $y > 0$, здесь $l, h = \text{const} > 0$. Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_1 , а гиперболические части – через Ω_2 при $x > 0$ и Ω_3 при $x < 0$.

Задача NL. Требуется найти решение $u(x; y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_3 \cup B_1C_2) \cap C^2(\Omega_2 \cup \Omega_3); u_{xx}, {}_CD_{0y}^\alpha u \in C(\Omega_1)\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(l; t) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x; -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dy}u(-y/2; y/2) = a_1(y)u_x(-0; y) + a_2(y)u_y(-0; y) + a_3(y)u(0; y) + a_4(y), \quad 0 < y < h, \quad (4)$$

и интегральным условиям склеивания

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x; y) &= \lambda_1(x)u_y(x; -0) + \lambda_2(x)u_x(x; -0) + \lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)u^{p_1}(t; 0) dt + \\ &+ \lambda_4(x)u^{p_2}(x; 0) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < l, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_x(+0; y) &= \mu_1(y)u_x(-0; y) + \mu_2(y)u_y(-0; y) + \mu_3(y) \int_0^y r_2(t)u(0; t) dt + \\ &+ \mu_4(y)u(0; y) + \mu_5(y), \quad 0 < y < h, \end{aligned} \quad (6)$$

где $a_k(y)$, $\lambda_k(x)$, $\mu_k(y)$, $k = \overline{1, 5}$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $r_1(x)$, $r_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причём $\sum_{k=1}^4 \lambda_k^2(x) \neq 0$, $\sum_{i=1}^3 a_i^2(x) \neq 0$ и $\sum_{k=1}^4 \mu_k^2(x) \neq 0$.

Учитывая решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u_y(x, -0) = \nu_1^-(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq h; \quad u_x(-0, y) = \nu_2^-(y), \quad 0 < y < h,$$

а также используя краевые условия (3) и (4), находим основные функциональные соотношения

$$\nu_1^-(x) = \tau_1'(x) - \psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} (2a_1(y) + 1)\nu_2^-(y) &= (1 - 2a_2(y))\tau_2'(y) - 2a_3(y)\tau_2(y) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^y f_3\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_2'(\xi)\right) d\xi - 2a_4(y), \quad 0 < y < h, \end{aligned} \quad (8)$$

соответственно из гиперболических областей Ω_2 и Ω_3 .

2. Исследование задачи NL. Введём обозначения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = \nu_1^+(x), \quad u_x(+0, y) = \nu_2^+(y).$$

Из интегральных условий склеивания (5), (6) имеем

$$\nu_1^+(x) = \lambda_1(x)\nu_1^-(x) + \lambda_2(x)\tau_1'(x) + \lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt + \lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

$$\nu_2^+(y) = \mu_1(y)\nu_2^-(y) + \mu_2(y)\tau_2'(y) + \mu_3(y) \int_0^y r_2(t)\tau_2(t) dt + \mu_4(y)\tau_2(y) + \mu_5(y), \quad 0 < y < h. \quad (10)$$

Далее из параболического уравнения (1) при $y \rightarrow +0$ с учётом равенства $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} f(y)$ (см. [13, с. 35]) и интегрального условия склеивания (9) получим

$$\begin{aligned} \tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu_1^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau_1'(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + f_1(x, 0; \tau_1(x)) - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (7) в (11), запишем интегро-дифференциальное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\begin{aligned} \tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)(\lambda_1(x) + \lambda_2(x))\tau_1'(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + f_1(x, 0; \tau_1(x)) + \\ + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x) \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) + \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'\left(\frac{x}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) запишем в следующем виде:

$$\tau_1''(x) - \beta(x)\tau_1'(x) + \Phi(x; \tau_1(x)) = g(x), \quad (13)$$

где $\beta(x) = \Gamma(\alpha)(\lambda_1(x) + \lambda_2(x))$,

$$\begin{aligned} \Phi(x; \tau_1(x)) = f_1(x, 0; \tau_1(x)) + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x) \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x), \\ g(x) = \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) + \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'(x/2). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть существуют значения p_1 и p_2 , удовлетворяющие неравенству

$$|z_1^{p_i}(x) - z_2^{p_i}(x)| \leq L(p_i)|z_1(x) - z_2(x)|, \quad L(p_i) = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

для всех функций $z_i(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $i = 1, 2$, кроме того, функции $f_i(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу, т.е. имеют место оценки

$$|f_1(x, 0; z_1(x)) - f_1(x, 0; z_2(x))| \leq L_1|z_1(x) - z_2(x)|, \quad L_1 = \text{const} > 0, \quad (16)$$

$$\left| f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; z_1(\xi)\right) - f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; z_2(\xi)\right) \right| \leq L_2 |z_1(\xi) - z_2(\xi)|, \quad L_2 = \text{const} > 0, \quad (17)$$

$$\left| f_3\left(\frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+y}{2}; z_1(\xi)\right) - f_3\left(\frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+y}{2}; z_2(\xi)\right) \right| \leq L_3 |z_1(\xi) - z_2(\xi)|, \quad L_3 = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Тогда справедлива

Теорема. Пусть числа $p_1, p_2 \geq 1$, $a_3(y)\mu_1(y) \neq 0$, функции $f_i(\cdot) \in C(\bar{\Omega}_i \times \mathbb{R}) \cap C^1(\Omega_i \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу и имеют место условия

$$\lambda_i(x), \lambda_5(x), r_1(x) \in C[0, l] \cap C^1(0, l), \quad i = \overline{1, 4}, \quad \psi(x) \in C[0, l/2] \cap C^2(0, l/2), \quad (19)$$

$$a_i(y), \mu_i(y), \mu_5(y), \varphi(y), r_2(y) \in C[0, h] \cap C^1(0, h), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (20)$$

$$2a_1(y) + 1 \neq 0, \quad \mu_i(y)(1 - 2a_2(y)) + \mu_2(y)(2a_1(y) + 1) \neq 0, \quad (21)$$

$$l^2 e^{\beta_0} (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2)) < 1, \quad (22)$$

где $\beta_0 = \Gamma(\alpha)(\|\lambda_1(x)\|_C + \|\lambda_2(x)\|_C)$, $c_1 = \Gamma(\alpha)\|\lambda_1(x)\|_C/2$, $c_2 = \Gamma(\alpha)L(p_1)\|\lambda_3(x)\|_C\|r_1(x)\|_C$, $c_3 = \Gamma(\alpha)L(p_2)\|\lambda_4(x)\|_C$. Тогда решение задачи NL существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что нелинейное дифференциальное уравнение (13) с условиями $\tau_1(0) = \psi(0)$ и $\tau_1(l) = \varphi(0)$ (эти условия вытекают из краевых условий (2) и (3)) легко сводится к нелинейному интегральному уравнению вида

$$\tau_1(x) - g_1(x) = \int_0^l \Phi(z; \tau_1(z)) K_1(x, z) dz \equiv I(\tau_1), \quad (23)$$

где

$$K_1(x, z) = B^-(x) \begin{cases} \delta(x) \int_z^l B(t) dt - \int_x^l B(t) dt & \text{при } 0 \leq z \leq x, \\ \delta(x) \int_z^l B(t) dt - \int_z^l B(t) dt & \text{при } x \leq z \leq l, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \int_0^l g(z) K_1(x, z) dx + (\varphi(0) - \psi(0))\delta(x) + \psi(0), \quad \delta(x) = \int_x^l B(t) dt \Big/ \int_0^l B(t) dt,$$

$B(x) = \exp(\int_0^x \beta(t) dt)$, $B^-(x) = \exp(-\int_0^x \beta(t) dt)$, причём, учитывая класс заданных функций (19), имеем

$$|K_1(x, z)| \leq k_{01} = l e^{\beta_0}, \quad |g_1(x)| \leq g_{01} = \Gamma(\alpha) k_{01} l (\|\lambda_5(x)\|_C + \|\lambda_1(x)\varphi'(x/2)\|_C) + |\varphi(0)|. \quad (24)$$

В случае если $p_1 = p_2 = 1$ и $f_j(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$, – линейные функции относительно третьего аргумента, однозначная разрешимость интегрального уравнения (23) следует из единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [14, с. 78, теорема 2] (т.е. в этом случае отдельно доказывается единственность решения задачи).

Пусть функции $f_i(\cdot)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (16) и (17), тогда из (14), учитывая класс заданных функций (см. (19)) и используя неравенство (15), получаем

$$|\Phi(z; \tilde{\tau}_1(z)) - \Phi(z; \tilde{\tau}_2(z))| \leq L_1 |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| + c_1 L_2 \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right| + c_3 |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| = \\
& = (L_1 + c_3) |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| + (c_1 L_2 + c_2) \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right|, \quad (25)
\end{aligned}$$

где $\tilde{\tau}(x) = \tau_1(x)$. Разрешимость интегрального уравнения (23) доказываем методом последовательных приближений, при этом функциональную последовательность относительно функции $\tilde{\tau}(x)$ построим с помощью рекуррентного уравнения

$$\tilde{\tau}_n(x) = \int_0^l \Phi(z; \tilde{\tau}_{n-1}(z)) K_1(x, z) dz + g_1(x),$$

где $\tilde{\tau}_0(x) = g_1(x)$.

Учитывая неравенства $|\Phi(z; \tilde{\tau}(z))| \leq \Phi_0$, $\Phi_0 = \text{const} > 0$, и (24), (25), можно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}
|\tilde{\tau}_1(x) - \tilde{\tau}_0(x)| & \leq k_{01} l \Phi_0, \quad |\tilde{\tau}_2(x) - \tilde{\tau}_1(x)| \leq k_{01}^2 l^2 (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2)) \Phi_0, \quad \dots \\
\dots, \quad |\tilde{\tau}_n(x) - \tilde{\tau}_{n-1}(x)| & \leq k_{01}^n l^n (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2))^{n-1} \Phi_0. \quad (26)
\end{aligned}$$

В силу условия (22) из оценки (26) следует, что оператор в правой части интегрального уравнения (23) является сжимающим. Следовательно, для оператора $I(\tau_1)$ существует единственная неподвижная точка, т.е. интегральное уравнение (23) имеет единственное решение в классе $C[0, l] \cap C^2(0, l)$. После определения функции $\tau_1(x)$ из функционального соотношения (7) находим $\nu_1(x)$. Таким образом, решение исследуемой задачи в области Ω_2 можно восстановить как решение задачи Коши.

Далее, воспользовавшись решением первой краевой задачи для параболического уравнения в области Ω_1 , находим второе функциональное соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2^+(y)$ на отрезке $B_1 B_2$, которое имеет вид [2, формула (2.12); 15, формула (11)]

$$\nu_2^+(y) = - \int_0^y K(y-t) \tau_2'(t) dt + \Phi_1(y), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
K(y-t) &= \frac{1}{(y-t)^\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,1-\beta} \left(-\frac{2nl}{(y-t)^\beta} \right) \right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \\
\Phi_1(y) &= 2 \int_0^y \sum_{m=0}^{\infty} (y-\eta)^{-\beta-1} e_{1,\beta}^{1,-\beta} \left(-\frac{2ml+1}{(y-\eta)^\beta} \right) \varphi(\eta) d\eta - \\
&- \int_0^l \sum_{m=0}^{\infty} y^{-\alpha} e_{1,\beta}^{1,1-\alpha} \left(-\frac{2ml-\xi}{y^\beta} \right) \tau_1(\xi) d\xi - \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^y \int_0^l G_x(x, y, \xi, \eta) f_1(\xi, \eta, \tau_1(\xi)) d\xi d\eta, \\
V(x, y; \eta) &= \lim_{\xi \rightarrow l} G_\xi(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{y-\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sign}(x + (2n+1)l) e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{x + (2n+1)l}{(y-\eta)^\beta} \right), \\
\bar{G}(x, \xi, y) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \eta^{-\alpha} G(x, y, \xi, \eta) d\eta,
\end{aligned}$$

$$e_{1,\beta}^{1,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\gamma - \beta n)}$$

– функция типа Райта [13, с. 23], а

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y - \eta)^{\alpha/2-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x - \xi + 2nl|}{(y - \eta)^{\alpha/2}} \right) - e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x + \xi + 2nl|}{(y - \eta)^{\alpha/2}} \right) \right]$$

– функции Грина первой краевой задачи [13, с. 123; 16]. Заметим, что ядро $K(y-t)$, представленное в виде ряда функций типа Райта, имеет слабую особенность (см. [13, формулы (2.2.5), (2.2.24)]), т.е. $|K(y-t)| \leq \text{const} \times (y-t)^{-\beta}$. Также можно убедиться, что $|\Phi_1(y)| \leq \text{const}$ (см. [13, с. 108]).

Пусть $2a_1(y) + 1 \neq 0$. Тогда, учитывая (8), (10) и (27), получаем

$$\begin{aligned} & A_1(y)\tau_2'(y) - A_2(y) \int_0^y \tau_2'(t) dt + \mu_3(y) \int_0^y \tau_2'(z) dz \int_z^y r_2(t) dt + \\ & + \int_0^y K(y-t)\tau_2'(t) dt - \tilde{A}_3(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt = F(y), \\ & F(y) = \Phi_1(y) + \psi(0) \left(\mu_3(y) \int_0^y r_2(t) dt - A_2(y) \right) - \mu_5(y) + \frac{2a_4(y)\mu_1(y)}{1 + 2a_1(y)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_3(y)\mu_1(y)/(2 + 4a_1(y))$. Далее, учитывая условие (21), последнее уравнение запишем в виде

$$\tau_2'(y) + \int_0^y K_2(t, y)\tau_2'(t) dt = F^*(y) - A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt, \quad (28)$$

где

$$K_2(t, y) = \frac{\mu_3(y) \int_t^y r_2(z) dz + K(y-t) - A_2(y)}{A_1(y)}, \quad A^*(y) = -\frac{\tilde{A}_3(y)}{A_1(y)}, \quad F^*(y) = \frac{F(y)}{A_1(y)},$$

причём, учитывая класс заданных функций (см. (20)) и неравенства $|K(y-t)| \leq \text{const} \times (y-t)^{-\beta}$, $|\Phi_1(y)| \leq \text{const}$, имеем

$$|A^*(y)| \leq A_0, \quad |K_2(t, y)| \leq k_{02}(y-t)^{-\beta}, \quad |F^*(y)| \leq F_0, \quad \left| f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) \right| \leq f_{03},$$

где $A_0, k_{02}, F_0, f_{03} = \text{const} > 0$.

Так как ядро интегрального уравнения (28) имеет слабую особенность и правая часть этого уравнения является непрерывной функцией, то, основываясь на теории интегральных уравнений Вольтерры второго рода, запишем решение в виде

$$\begin{aligned} \tau_2'(y) = & F^*(y) + \int_0^y R(t, y)F^*(t) dt - A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt - \\ & - \int_0^y R(t, y)A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_2'(z)\right) dz, \end{aligned} \quad (29)$$

где $R(t, y)$ – резольвента ядра $K_2(t, y)$, причём $|R(t, y)| \leq r_0(y - t)^{-\beta}$, $r_0 = \text{const} > 0$. Полученное уравнение (29) исследуем также методом последовательных приближений.

Рассмотрим рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} \tau_n^*(y) = & -A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_{n-1}^*(t)\right) dt - \\ & - \int_0^y R(t, y) A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_{n-1}^*(z)\right) dz + \tilde{F}(y), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\tilde{F}(y) = F^*(y) + \int_0^y R(t, y) F^*(t) dt$, причём $|\tilde{F}(y)| \leq \tilde{F}_0$.

Пусть функция $f_3(\cdot, \cdot; \tau_2'(t))$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу (см. условие (18)), т.е.

$$|f_3(\cdot, \cdot; \tau_1^*(t)) - f_3(\cdot, \cdot; \tau_2^*(t))| \leq L_3 |\tau_1^*(t) - \tau_2^*(t)|, \quad L_3 = \text{const} > 0,$$

где $\tau^*(t) = \tau_2'(t)$. Тогда, предполагая $\tau_0^*(y) = \tilde{F}(y)$ и учитывая (30), составим функциональную последовательность относительно $\tau^*(y)$, сходимость которой следует из неравенств

$$\begin{aligned} |\tau_1^*(y) - \tau_0^*(y)| & \leq \left| A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_0^*(t)\right) dt \right| + \\ & + \left| \int_0^y R(t, y) A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_0^*(z)\right) dz \right| \leq A_0 f_{03} y + A_0 r_0 f_{03} \frac{y^2}{2} \leq cy, \\ |\tau_2^*(y) - \tau_1^*(y)| & \leq cL_3 \left| A^*(y) \int_0^y t dt \right| + c \left| \int_0^y A^*(t) R(t, y) dt \int_0^t z dz \right| \leq \\ & \leq cA_0 L_3 \frac{y^2}{2!} + cA_0 r_0 \frac{y^3}{3!} \leq cA_0 (L_3 + r_0) \frac{y^2}{2!}, \quad \dots \\ \dots, \quad |\tau_n^*(y) - \tau_{n-1}^*(y)| & \leq cA_0 (L_3 + r_0)^{n-1} \frac{y^n}{n!} \end{aligned}$$

при $0 < y < h \leq 1$. Отметим также, что если $1 < y < h < \infty$, то можно получить аналогичные неравенства, из которых следует сходимость функциональной последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$.

Пусть предел последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$ есть функция $\hat{\tau}_2(y)$, т.е. $\tau_2'(y) = \hat{\tau}_2(y)$, тогда, учитывая равенство $\tau_2(0) = \psi(0)$, находим

$$\tau_2(y) = \int_0^y \hat{\tau}(t) dt + \psi(0).$$

Пусть $2a_1(y) + 1 \equiv 0$. Тогда при выполнении одного из условий: $2a_2(y) - 1 \neq 0$ или $a_3(y) \neq 0$, из (8) можно найти $\tau_2(y)$. Далее, определяя из соотношения (27) функцию $\nu_2^+(y)$, находим $\nu_2^-(y)$ из интегрального условия склеивания (10) при условии $\mu_1(y) \neq 0$. Следовательно, решение задачи NL можно будет восстановить и в областях Ω_1 и Ω_3 соответственно как решение первой краевой задачи [13, с. 108; 16] и задачи Коши [2]. Так как искомые функции являются решениями нелинейных интегральных и функциональных уравнений, для которых с помощью принципа сжимающих отображений найдены условия однозначной разрешимости, из полученного результата также следует единственность решения поставленной задачи. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies. V. 204. Amsterdam, 2006.
2. *Kadirkulov B.J.* Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative // Electronic J. of Differ. Equat. 2014. V. 57. P. 1–7.
3. *Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 62–76.
4. *Сабитов К.Б.* Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
5. *Abdullaev O.Kh., Sadarangani K.* Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative // Electron. J. of Differ. Equat. 2016. V. 164. P. 1–10.
6. *Исломов Б.И., Абдуллаев О.Х.* Задача типа Геллершtedта для нагруженного уравнения параболическо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдели-Кобера дробного порядка // Изв. вузов. Математика. 2020. № 106. С. 33–46.
7. *Ефимов А.В.* О краевых задачах с операторами Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. 2004. Т. 26. С. 16–20.
8. *Елеев В.А., Лесев В.Н.* О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказ. мат. журн. 2001. Т. 3. № 4. С. 9–22.
9. *Karimov E.T., Sotvoldiev A.I.* Existence of solutions to non-local problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing // Electron. J. of Differ. Equat. 2013. V. 138. P. 1–5.
10. *Исломов Б., Холбеков Ж.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-I // Узбекский мат. журн. 2015. № 4. С. 47–57.
11. *Yuldashev T.K., Abdullaev O.Kh.* Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 5. P. 1113–1123.
12. *Abdullaev O.Kh.* Solvability of BVPs for the parabolic-hyperbolic equation with non-linear loaded term // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14. № 2. P. 133–145.
13. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
14. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
15. *Сопуев А., Дж. Т. Джусураев* Краевые задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1009–1015.
16. *Matichuev M.O.* Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. № 1. P. 190–211.

Институт математики имени В.И. Романовского,
г. Ташкент, Узбекистан
Ташкентский международный университет Кимё,
Узбекистан

Поступила в редакцию 10.08.2021 г.
После доработки 11.12.2022 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.