

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
С ОДНОМАСШТАБНЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

© 2023 г. Р. Е. Симаков

Рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, а другое – три непересекающихся простых (однократных) корня. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденных уравнений являются простыми, но также не совпадает с разложениями в исследованных ранее задачах с двукратными корнями, в частности, внутренний переходный слой оказывается одномасштабным.

DOI: 10.31857/S0374064123030044, EDN: QUJPPV

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = F(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ и $v(x, \varepsilon)$ – искомые скалярные функции, F и f – заданные функции в области $D = I_u \times I_v \times [0, 1] \times [0, \varepsilon_0]$, I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v , $\varepsilon_0 > 0$.

При $\varepsilon = 0$ уравнения (1) принимают вид

$$F(u, v, x, 0) = 0, \quad f(u, v, x, 0) = 0. \quad (3)$$

В данной работе ставятся вопросы о существовании и асимптотике по параметру ε решения задачи (1), (2) с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x_* отрезка $[0, 1]$ (назовём её *точкой перехода*), где решение совершает быстрый переход из малой окрестности одного решения вырожденной системы (3) в малую окрестность другого её решения. Такие решения называются *контрастными структурами типа ступеньки* (КСТС).

Опишем кратко структуру работы. В п. 1 приводятся условия, обеспечивающие существование искомой КСТС в задаче (1), (2). В п. 2 строится формальная асимптотика КСТС, причём построение ведётся раздельно слева и справа от точки перехода. В п. 3 проводится сшиваание асимптотик в точке x_* и строится асимптотическое приближение для этой точки. В п. 4 доказывается существование решения задачи (1), (2) с построенной асимптотикой. В п. 5 приводится пример задачи вида (1), (2), на котором иллюстрируется построение асимптотики решения. В п. 6 содержатся некоторые замечания в отношении рассмотренной задачи и других возможных задач о КСТС.

Сформулируем условия, при которых задача (1), (2) будет рассматриваться ниже.

Условие А1. Функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$F(u, v, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(v, x))^2 - \varepsilon F_1(u, v, x, \varepsilon),$$

где $h(x) > 0$ при $x \in [0, 1]$ и $\varphi(v, x) \in I_u$ при $(v, x) \in I_v \times [0, 1]$.

Из условия A1 следует, что корень $u = \varphi(v, x)$ первого уравнения (3) является двукратным. Отметим, что КСТС в сингулярно возмущённых задачах с кратными корнями исследовались во многих работах, краткий обзор которых можно найти в [1]. В данной статье асимптотика решения имеет свои качественные особенности, относящиеся, прежде всего, к переходному слою.

Условие A2. Уравнение $g(v, x) := f(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0$ имеет три простых корня $v = \psi_i(x) \in I_v$, $i = 1, 2, 3$, причём

$$\psi_1(x) < \psi_2(x) < \psi_3(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4)$$

Условие A3. Функции $h(x)$, $\varphi(v, x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $F_1(u, v, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими при $(u, v, x, \varepsilon) \in D$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

Условие A4. Уравнение

$$I(x) := \int_{\psi_1(x)}^{\psi_3(x)} g(v, x) dv = 0$$

имеет корень $x = x_0 \in (0, 1)$, и

$$I'(x_0) < 0. \quad (5)$$

Будем искать решение задачи (1), (2), удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(\psi_1(x), x), & 0 \leq x < x_0, \\ \varphi(\psi_3(x), x), & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x, \varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \leq x < x_0, \\ \psi_3(x), & x_0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы сформулировать остальные условия, определим несколько кривых на плоскости переменных (v, x) и в пространстве переменных (u, v, x) :

$$l_1 = \{(v, x) : v = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0\}, \quad l_2 = \{(v, x) : \psi_1(x_0) \leq v \leq \psi_3(x_0), \quad x = x_0\},$$

$$l_3 = \{(v, x) : v = \psi_3(x), \quad x_0 \leq x \leq 1\},$$

$$L_i = \{(u, v, x) : u = \varphi(v, x), (v, x) \in l_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad l = \bigcup_{i=1}^3 l_i, \quad L = \bigcup_{i=1}^3 L_i.$$

Отметим, что l_i и L_i , $i = 1, 2, 3$, – гладкие кривые, а l и L – непрерывные кривые, составленные из трёх гладких звеньев.

Условие A5. $F_1(u, v, x, 0) > 0$ в точках кривых L_1 и L_3 .

Условие A6. $\partial g(v, x) / \partial v > 0$ в точках кривых l_1 и l_3 .

Условие A7. Выполнены неравенства

$$\int_{\psi_1(x_0)}^v g(s, x_0) ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) < v \leq \psi_2(x_0)$$

и

$$\int_{\psi_3(x_0)}^v g(s, x_0) ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leq v < \psi_3(x_0).$$

Условие A8. Имеют место неравенства

$$G_1(v, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) \leq v \leq \psi_2(x_0)$$

и

$$G_3(v, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leq v \leq \psi_3(x_0),$$

где

$$G_i(v, x) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v, x)g(v, x) + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(v, x) \int_{\psi_i(x)}^v g(s, x) ds + F_1(\varphi(v, x), v, x, 0), \quad i = 1, 3.$$

Условие A9. $\partial \varphi(v, x)/\partial v > 0$ в точках кривой l .

Условие A10. $\partial f(u, v, x, 0)/\partial u < 0$ в точках кривой L .

Заметим, что неравенства в условиях A5–A10 останутся верными при замене x_0 на x_* в определениях кривых l и L , если точка x_* принадлежит достаточно малой и не зависящей от ε окрестности точки x_0 .

2. Построение асимптотики. Определим точку перехода x_* как точку пересечения v -компоненты искомого решения с корнем ψ_2 : $v(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*)$, и поставим на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$ две вспомогательные задачи, аналогичные задаче (1), (2) с добавлением граничных условий

$$v^{(-)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad v^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*). \quad (7)$$

Индексами $(-)$ и $(+)$ будем отмечать функции, определяемые соответственно из левой и правой вспомогательных задач.

Считая x_* фиксированной точкой из достаточно малой окрестности точки x_0 , будем строить асимптотики решений вспомогательных задач в виде

$$U^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp}, \varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon), \quad (8)$$

$$V^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp}, \varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon). \quad (9)$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi_-, \varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi_-, \varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta_-, \varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta_-, \varepsilon)$ – погранслоиные части асимптотики в окрестности точки $x = 0$, $\xi_- = x/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_- = x/\varepsilon^{3/4}$ – погранслоиные переменные; $\Pi^{(+)}u(\xi_+, \varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\xi_+, \varepsilon)$ и $P^{(+)}u(\zeta_+, \varepsilon)$, $P^{(+)}v(\zeta_+, \varepsilon)$ – погранслоиные части асимптотики в окрестности точки $x = 1$, $\xi_+ = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_+ = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ – погранслоиные переменные; $Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon)$ – внутрислоиные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки перехода x_* , $\tau = (x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$ – внутрислоиная переменная. Каждое слагаемое в правых частях представлений (8), (9) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε .

2.1. Регулярные части асимптотики. Регулярные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x).$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$ будем получать стандартным способом (см. [2, с. 29]) из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{u}^{(\mp)}}{dx^2} = F(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon), \quad (10)$$

$$\varepsilon \frac{d^2 \bar{v}^{(\mp)}}{dx^2} = f(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon). \quad (11)$$

В нулевом порядке имеем вырожденные системы уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0,$$

из которых в соответствии с (6) получаем

$$\begin{aligned}\bar{u}_0^{(-)}(x) &= \varphi(\psi_1(x), x), & \bar{v}_0^{(-)}(x) &= \psi_1(x), & 0 \leq x \leq x_*, \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) &= \varphi(\psi_3(x), x), & \bar{v}_0^{(+)}(x) &= \psi_3(x), & x_* \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x) := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), \quad \bar{f}_v^{(\mp)}(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), \quad (12)$$

$$\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x), x), \quad \bar{g}_v^{(\mp)}(x) := \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x), x) = \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x).$$

Уравнения (10) не содержат членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. членов первого порядка. Во втором порядке получаем квадратные уравнения

$$h(x)[\bar{u}_1^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}]^2 = \bar{F}_1^{(\mp)}(x) := F_1(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0).$$

В силу условия А5 они имеют по два корня, из которых выбираем положительные:

$$\bar{u}_1^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)} = a^{(\mp)}(x) := \sqrt{h^{-1}(x)\bar{F}_1^{(\mp)}(x)}. \quad (13)$$

Вторые уравнения для $\bar{u}_1^{(\mp)}$, $\bar{v}_1^{(\mp)}$ получаем из равенства (11):

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)} = 0. \quad (14)$$

Определители систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (13), (14) равны

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x) = \bar{g}_v^{(\mp)}(x).$$

В силу условия А6 СЛАУ (13), (14) однозначно разрешимы:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}(x) = \bar{f}_v^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{f}_u^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x).$$

Для каждого $i = 2, 3, \dots$ из равенств (10), (11) находятся СЛАУ относительно $\bar{u}_i^{(\mp)}$, $\bar{v}_i^{(\mp)}$ такого же типа, как (13), (14):

$$\bar{u}_i^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = a_i^{(\mp)}(x), \quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_i^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = b_i^{(\mp)}(x),$$

где $a_i^{(\mp)}(x)$, $b_i^{(\mp)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_j^{(\mp)}(x)$ с номерами $j < i$. Отсюда однозначно определяются функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$.

2.2. Погранслоиные части асимптотики. Погранслоиные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp}, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)}u(\xi_{\mp}), \quad \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp}, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)}v(\xi_{\mp}),$$

$$P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}), \quad P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}, \varepsilon) = \varepsilon^{5/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}).$$

Функции $\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_{\mp})$, $\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_{\mp})$ и $P_i^{(\mp)}u(\zeta_{\mp})$, $P_i^{(\mp)}v(\zeta_{\mp})$ определяются точно так же, как погранслоиные функции в первой вспомогательной задаче в работе [3]. Все они находятся в явном виде и экспоненциально убывают с ростом соответствующей погранслоиной переменной.

2.3. Внутрислойные части асимптотики. Внутрислойные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}u(\tau), \quad Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}v(\tau).$$

Стандартным способом (см. [2, с. 28]) для функций $Q^{(\mp)}u$, $Q^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2 Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}F, \quad \frac{d^2 Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f, \quad (15)$$

где

$$Q^{(\mp)}F := [F(\bar{u}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}u, \bar{v}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}v, x, \varepsilon) - F(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon)]|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функции $Q^{(\mp)}f$ имеют аналогичные выражения. Из этих систем также стандартным способом будем последовательно для $i = 0, 1, 2, \dots$ извлекать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$.

Для $Q_0^{(\mp)}u$, $Q_0^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*, 0) &= 0, \\ \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2} &= f(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*, 0), \end{aligned}$$

здесь и далее до конца этого пункта уравнения для функций с индексами $(-)$ и $(+)$ рассматриваются на полупрямых $\tau \leq 0$ и $\tau \geq 0$ соответственно. Из первых уравнений этих систем следуют равенства

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u = \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*), \quad (16)$$

в силу которых вторые уравнения, используя вид функции $g(v, x)$ (см. условие A2), можно записать в виде

$$\frac{d^2 Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2} = g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*). \quad (17)$$

Чтобы получить граничные условия при $\tau = 0$, подставим выражения (9) для $V^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ в равенства (7) вместо $v^{(\mp)}(x, \varepsilon)$. В результате получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}v(0) = \psi_2(x_*). \quad (18)$$

Отсюда находим

$$Q_0^{(\mp)}v(0) = \psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*). \quad (19)$$

Отметим, что $\psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(-)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*) > 0$ и $\psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(+)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_3(x_*) < 0$ (см. (4)).

В качестве вторых граничных условий для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ и также для остальных функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $i = 1, 2, \dots$, возьмём стандартные условия на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

В силу условия A7 задачи (17), (19), (20) для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ сводятся стандартным способом к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau} = \left(2 \int_0^{Q_0^{(\mp)}v} g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + s, x_*) ds \right)^{1/2} \quad (21)$$

с начальными условиями (19). Уравнения интегрируются в квадратурах, их решения являются возрастающими функциями и имеют экспоненциальные оценки

$$0 < Q_0^{(-)}v(\tau) \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad -c \exp(-\kappa\tau) \leq Q_0^{(+)}v(\tau) < 0, \quad \tau \geq 0.$$

Из равенств (16) находим

$$\begin{aligned} Q_0^{(\mp)}u(\tau) &= \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) = \\ &= \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*), x_*). \end{aligned} \quad (22)$$

Функции $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и их производные также имеют экспоненциальные оценки:

$$|Q_0^{(-)}u(\tau)| \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad |Q_0^{(+)}u(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (23)$$

Несложные вычисления показывают, что справедливы равенства

$$Q_1^{(\mp)}v(\tau) = 0, \quad Q_1^{(\mp)}u(\tau) = 0,$$

а для функций $Q_2^{(\mp)}u$, $Q_2^{(\mp)}v$ вследствие (15) получаем системы уравнений

$$h(x_*)(Q_2^{(\mp)}u - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \phi^{(\mp)}(\tau))^2 = B^{(\mp)}(\tau), \quad (24)$$

$$\frac{d^2 Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}u + \hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \chi^{(\mp)}(\tau), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_u^{(\mp)}(x, \tau) &:= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x, 0), \\ \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x, \tau) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x), \end{aligned}$$

$\hat{f}_v^{(\mp)}(x, \tau)$, $\hat{f}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ и $\hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ имеют аналогичный смысл,

$$\phi^{(\mp)}(\tau) := \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) \frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x_*, \tau) \right) \tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) \bar{v}_1^{(\mp)}(x_*),$$

$$B^{(\mp)}(\tau) := \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) + F_1(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*), \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*, 0), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(\mp)}(\tau) &:= (\hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_*)) \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) \tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*) \right) + \\ &+ (\hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_*)) \left(\frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) \tau + \bar{v}_1^{(\mp)}(x_*) \right) + (\hat{f}_x^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_*)) \tau, \end{aligned}$$

$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ и $\bar{f}_v^{(\mp)}(x)$ определены в (12), $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$ вводится аналогичным образом.

Дифференцируя дважды выражения (22) для функций $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и используя (17) и (21), приходим к равенствам

$$\frac{d^2 Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) + 2\hat{\varphi}_{vv}^{(\mp)}(x_*, \tau) \int_{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*)}^{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau)} g(s, x_*) ds.$$

Поэтому выражения (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$ можно записать в виде

$$B^{(-)}(\tau) = G_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*), \quad B^{(+)}(\tau) = G_3(\bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v(\tau), x_*),$$

функции $G_i(v, x)$ введены в условии А8.

Так как

$$\psi_1(x_*) < \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau) \leq \psi_2(x_*) \quad \text{при} \quad \tau \leq 0$$

и

$$\psi_2(x_*) \leq \bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v(\tau) < \psi_3(x_*) \quad \text{при} \quad \tau \geq 0,$$

из условия А8 следует, что $B^{(-)}(\tau) > 0$ при $\tau \leq 0$ и $B^{(+)}(\tau) > 0$ при $\tau \geq 0$. Тогда из уравнений (24) получаем

$$Q_2^{(\mp)}u = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + b^{(\mp)}(\tau) - \phi^{(\mp)}(\tau), \quad (27)$$

где

$$b^{(\mp)}(\tau) = \sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)} \geq c > 0,$$

берём положительные значения корней из $h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)$.

Из определений (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$, используя экспоненциальные оценки функций $Q_0^{(\mp)}v$, $d^2Q_0^{(\mp)}u/d\tau^2$ и равенства (13) для $a^{(\mp)}(x)$, получаем

$$b^{(\mp)}(\mp\infty) = \sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\mp\infty)} = \sqrt{h^{-1}(x_*)\bar{F}_1^{(\mp)}(x_*)} = a^{(\mp)}(x_*).$$

Кроме того, из выражений для $\phi^{(\mp)}(\tau)$ следует, что $\phi^{(\mp)}(\mp\infty) = a^{(\mp)}(x_*)$, а функции $r_2^{(\mp)}(\tau) := b^{(\mp)}(\tau) - \phi^{(\mp)}(\tau)$ имеют экспоненциальные оценки вида (23):

$$|r_2^{(-)}(\tau)| \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad |r_2^{(+)}(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Такие же оценки имеют функции $\chi^{(\mp)}(\tau)$.

Подставляя выражения (27) для $Q_2^{(\mp)}u$ в уравнения (25) и учитывая, что

$$\hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)\hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) + \hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) := \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*),$$

приходим к следующим уравнениям для функций $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + q_2^{(\mp)}(\tau), \quad (28)$$

где $q_2^{(\mp)}(\tau) = \chi^{(\mp)}(\tau) + \hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)r_2^{(\mp)}(\tau)$, функции $q_2^{(\mp)}(\tau)$ имеют оценки вида (23).

Граничные условия для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют из (18) и (20):

$$Q_2^{(\mp)}v(0) = -\bar{v}_1^{(\mp)}(x_*), \quad Q_2^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \quad (29)$$

Решения задач (28), (29) выражаются формулами

$$Q_2^{(\mp)}v(\tau) = \Phi_{(\mp)}(\tau) \left(\frac{Q_2^{(\mp)}v(0)}{\Phi_{(\mp)}(0)} + \int_0^\tau \Phi_{(\mp)}^{-2}(s) \int_{\mp\infty}^s \Phi_{(\mp)}(t) q_2^{(\mp)}(t) dt ds \right),$$

где $\Phi_{(\mp)}(\tau) := dQ_0^{(\mp)}v(\tau)/d\tau$. Отсюда для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют экспоненциальные оценки вида (23). Зная $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, по формулам (27) находим функции $Q_2^{(\mp)}u(\tau)$, для которых, очевидно, также справедливы оценки вида (23).

При $i = 3, 4, \dots$ для $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ получаются линейные системы уравнений, которые приводятся к виду, аналогичному (27), (28):

$$Q_i^{(\mp)}u = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + r_i^{(\mp)}(\tau), \quad (30)$$

$$\frac{d^2 Q_i^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + q_i^{(\mp)}(\tau), \quad (31)$$

где функции $r_i^{(\mp)}(\tau)$ и $q_i^{(\mp)}(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_j^{(\mp)}v(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (23).

Граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ извлекаются из (18), (20):

$$Q_i^{(\mp)}v(0) = -\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*), \quad Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad (32)$$

где $\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число.

Решения задач (31), (32) задаются формулами, аналогичными выражениям для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, а функции $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ определяются после этого формулами (30). Из этих формул для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ получаются оценки вида (23).

Сохраняя прежние обозначения для внутрислойных и погранслойных функций, будем далее считать, что все они умножены на бесконечно дифференцируемые срезающие функции (см. [2, с. 82]).

3. Сшивание асимптотик в точке перехода. Формальные асимптотические ряды $V^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ удовлетворяют в точке перехода равенствам

$$V^{(-)}(x_*, \varepsilon) = V^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad (33)$$

причём их построение проводилось для произвольного x_* из достаточно малой окрестности точки x_0 . Будем искать асимптотическое приближение для точки перехода в виде

$$x_* = X_n := \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/4} x_i, \quad (34)$$

где x_0 определено в условии А4, а остальные коэффициенты x_i , $i \geq 1$, выбираются таким образом, чтобы также выполнялось формальное равенство

$$\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{dV^{(-)}}{dx}(X_n, \varepsilon) - \frac{dV^{(+)}}{dx}(X_n, \varepsilon) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \quad (35)$$

Подставим в (35) ряды (9) с учётом того, что производные $\Pi^{(\mp)}$ -функций и $P^{(\mp)}$ -функций равны нулю в точке X_n . Придём к равенству

$$\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \left(\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(X_n) - \frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(X_n) \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \left(\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0, X_n) - \frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0, X_n) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}),$$

в записи которого отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\mp)}$ -функции зависят от параметра $x_* = X_n$. Подставим в это равенство выражение (34), разложим левую часть в ряд по целым

степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$ и будем приравнять к нулю коэффициенты разложения при степенях $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{n/4}$. В нулевом порядке, используя выражения (21) для производных, получаем

$$J(x_0) := \frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0, x_0) - \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0, x_0) = \left(2 \int_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv\right)^{1/2} - \left(2 \int_{\psi_3(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv\right)^{1/2} = 0,$$

где последнее равенство имеет место в силу условия A4, причём $J'(x_0) < 0$ в силу (5).

Для следующих коэффициентов x_i суммы (34) последовательно при $i = \overline{1, n}$ получаются линейные уравнения

$$J'(x_0)x_i = a_i, \quad (36)$$

где числа a_i рекуррентно выражаются через x_j с номерами $j < i$, которые на i -м шаге уже известны, причём $a_1 = 0$. Так как $J'(x_0) \neq 0$, уравнение (36) имеет единственное решение

$$x_1 = 0, \quad x_i = (J'(x_0))^{-1}a_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Итак, для точки перехода построено асимптотическое приближение (34), обеспечивающее выполнение формальных равенств (35). Докажем, что в этой точке также справедливы формальные равенства

$$U^{(-)}(X_n, \varepsilon) - U^{(+)}(X_n, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}), \quad \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{dU^{(-)}}{dx}(X_n, \varepsilon) - \frac{dU^{(+)}}{dx}(X_n, \varepsilon) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \quad (37)$$

С этой целью введём обозначения

$$u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau, X_n, \varepsilon), \quad v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau, X_n, \varepsilon)$$

и запишем разложения $u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$ в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$u^{(-)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} u_i^{(-)}(\tau), \quad v^{(-)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} v_i^{(-)}(\tau), \quad \tau \leq 0, \quad (38)$$

$$u^{(+)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} u_i^{(+)}(\tau), \quad v^{(+)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} v_i^{(+)}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (39)$$

Главные члены этих разложений имеют вид

$$u_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau, x_0), \quad v_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau, x_0).$$

Из (33), (35) вытекают равенства

$$v_i^{(-)}(0) = v_i^{(+)}(0), \quad \frac{dv_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{dv_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0, n}, \quad (40)$$

причём

$$v_0^{(\mp)}(0) = \psi_2(x_0), \quad \frac{dv_0^{(\mp)}}{d\tau}(0) = \frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau}(0, x_0) = \left(2 \int_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv\right)^{1/2} =: \Phi_0. \quad (41)$$

Докажем, что имеют место аналогичные равенства для $u_i^{(\mp)}(\tau)$:

$$u_i^{(-)}(0) = u_i^{(+)}(0), \quad \frac{du_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{du_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0, n}. \quad (42)$$

Отсюда вытекают формальные равенства (37). Введём для $i = \overline{0, n}$ функции

$$u_i(\tau) = \begin{cases} u_i^{(-)}(\tau), & \tau \leq 0, \\ u_i^{(+)}(\tau), & \tau > 0, \end{cases} \quad v_i(\tau) = \begin{cases} v_i^{(-)}(\tau), & \tau \leq 0, \\ v_i^{(+)}(\tau), & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Из уравнений (17) следует, что функция $v_0(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{d\tau^2} = g(v_0, x_0), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

а равенства (41) показывают, что она удовлетворяет начальным условиям

$$v_0(0) = \psi_2(x_0), \quad \frac{dv_0}{d\tau}(0) = \Phi_0.$$

Тогда $v_0(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \tau < \infty$.

Функцию $u_0(\tau)$ в силу равенств (16) можно записать в виде $u_0(\tau) = \varphi(v_0(\tau), x_0)$, откуда следует, что $u_0(\tau)$ также является бесконечно гладкой функцией при всех τ и, значит, выполнены равенства (42) при $i = 0$.

Докажем, что $u_i(\tau)$ и $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкие функции для всех $i = \overline{1, n}$. Для $u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$ из (10), (11) и (15) запишем системы уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2 u^{(\mp)}}{d\tau^2} = F(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon), \quad \frac{d^2 v^{(\mp)}}{d\tau^2} = f(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon).$$

Подставим в них разложения (38) и (39). Точно так же как в п. 2.3 извлекались уравнения для $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$, отсюда для $u_i^{(\mp)}$, $v_i^{(\mp)}$ получим системы уравнений

$$u_i^{(\mp)} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i^{(\mp)} + r_i(\tau), \quad (43)$$

$$\frac{d^2 v_i^{(\mp)}}{d\tau^2} = \frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i^{(\mp)} + q_i(\tau), \quad (44)$$

где $r_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ выражаются рекуррентно через $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$ с номерами $j < i$ и являются бесконечно гладкими функциями, если таковыми являются $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$. Из (44) и (40) следует, что функция $v_i(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 v_i}{d\tau^2} = \frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i + q_i(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

с начальными условиями

$$v_i(0) = v_i^{(\mp)}(0), \quad \frac{dv_i}{d\tau}(0) = \frac{dv_i^{(\mp)}}{d\tau}(0).$$

Поэтому $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \tau < \infty$. Из (43) следует теперь, что $u_i(\tau)$ также бесконечно гладкая функция.

Таким образом, выполнены равенства (42) и, значит, в точке X_n справедливы формальные равенства (37).

4. Обоснование асимптотики.

4.1. Теорема об асимптотике решения. Обозначим через $U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ и $V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ следующие частичные суммы формальных асимптотических рядов (8), (9):

$$\begin{aligned} U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)} u(\xi_{\mp}) + \\ &+ \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)} u(\zeta_{\mp}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)} u(\tau, x_*), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)} v(\xi_{\mp}) + \\
&+ \varepsilon^{5/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)} v(\zeta_{\mp}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)} v(\tau, x_*).
\end{aligned} \quad (46)$$

Из алгоритма построения асимптотики следуют равенства

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}) &= O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad M_\varepsilon(V_n^{(-)}, U_n^{(-)}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (0, x_*), \\
L_\varepsilon(U_n^{(+)}, V_n^{(+)}) &= O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad M_\varepsilon(V_n^{(+)}, U_n^{(+)}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (x_*, 1), \\
\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon, x_*) &= \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(1, \varepsilon, x_*) = 0, \quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon, x_*) = \frac{dV_n^{(+)}}{dx}(1, \varepsilon, x_*) = 0, \\
V_n^{(-)}(x_*, \varepsilon, x_*) &= V_n^{(+)}(x_*, \varepsilon, x_*) = \psi_2(x_*),
\end{aligned}$$

где

$$L_\varepsilon(U, V) := \varepsilon^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - F(U, V, x, \varepsilon), \quad M_\varepsilon(V, U) := \varepsilon \frac{d^2 V}{dx^2} - f(U, V, x, \varepsilon). \quad (47)$$

Теорема. Пусть выполнены условия A1–A10. Тогда для любого целого $n \geq 0$ при всех достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad v(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in [0, 1], \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned}
U_n(x, \varepsilon) &= \begin{cases} U_n^{(-)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & 0 \leq x \leq X_{2n+1}, \\ U_n^{(+)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & X_{2n+1} < x \leq 1; \end{cases} \\
V_n(x, \varepsilon) &= \begin{cases} V_n^{(-)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & 0 \leq x \leq X_{2n+1}, \\ V_n^{(+)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & X_{2n+1} < x \leq 1; \end{cases} \quad \tau = \frac{x - X_{2n+1}}{\sqrt{\varepsilon}}.
\end{aligned} \quad (49)$$

4.2. О методе доказательства теоремы. Докажем теорему с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. построив верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) на основе формальных асимптотических рядов (8), (9) (см. [4]). Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (1), (2).

Определение. Две пары функций $\bar{U}(x, \varepsilon)$, $\bar{V}(x, \varepsilon)$ и $\underline{U}(x, \varepsilon)$, $\underline{V}(x, \varepsilon)$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0, 1) \cap C^{(1)}[0, 1]$, называются *упорядоченными верхним и нижним решениями* задачи (1), (2), если они удовлетворяют следующим условиям:

1) при $x \in [0, 1]$ выполнены неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon) \quad \text{и} \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq \bar{V}(x, \varepsilon);$$

2) при $x \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}), \quad M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U})$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (47));

3) имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{U}}{dx}(0, \varepsilon) &\leq 0 \leq \frac{d\underline{U}}{dx}(0, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(0, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{d\underline{V}}{dx}(0, \varepsilon), \\
\frac{d\bar{U}}{dx}(1, \varepsilon) &\geq 0 \geq \frac{d\underline{U}}{dx}(1, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(1, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{d\underline{V}}{dx}(1, \varepsilon).
\end{aligned}$$

В случае если верхнее и нижнее решения

$$\overline{U}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \overline{x}, \\ \overline{U}^{(+)}(x, \varepsilon), & \overline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \overline{V}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \overline{x}, \\ \overline{V}^{(+)}(x, \varepsilon), & \overline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (50)$$

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \underline{x}, \\ \underline{U}^{(+)}(x, \varepsilon), & \underline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \underline{V}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \underline{V}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \underline{x}, \\ \underline{V}^{(+)}(x, \varepsilon), & \underline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (51)$$

не являются гладкими в точках $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно, они должны удовлетворять дополнительным условиям (см. [4]):

4) справедливы неравенства

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) \geq \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon), \quad \frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) \geq \frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon);$$

5) справедливы неравенства

$$\frac{d\underline{U}^{(-)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon) \leq \frac{d\underline{U}^{(+)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon), \quad \frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon) \leq \frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon).$$

При этом неравенства условия 2) должны выполняться всюду на интервале $(0, 1)$, за исключением точек $\overline{x}$ и $\underline{x}$ для верхнего и нижнего решений соответственно.

Условие 2) сформулировано для случая, когда функции F и f удовлетворяют в области

$$G_0 = \{(u, v, x, \varepsilon) : \underline{U}(x, \varepsilon) \leq u \leq \overline{U}(x, \varepsilon), \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq v \leq \overline{V}(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \quad (52)$$

условию квазимоноотонности, т.е. функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v , а функция $f(u, v, x, \varepsilon)$ – невозрастающей функцией аргумента u . Ниже будет показано, что в рассматриваемой задаче это свойство имеет место.

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u = u(x, \varepsilon)$, $v = v(x, \varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon), \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq v(x, \varepsilon) \leq \overline{V}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1]. \quad (53)$$

4.3. Оценки производных функции F . Введём обозначения

$$\tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \tilde{u}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)} u(\tau, x_*) + \sqrt{\varepsilon}(\tilde{u}_1^{(\mp)}(x) + \Pi_0^{(\mp)} u(\xi_{\mp}) + Q_2^{(\mp)} u(\tau, x_*)),$$

$$\tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \tilde{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)} v(\tau, x_*) + \sqrt{\varepsilon}(\tilde{v}_1^{(\mp)}(x) + \Pi_0^{(\mp)} v(\xi_{\mp}) + Q_2^{(\mp)} v(\tau, x_*)),$$

$$\tilde{F}_u^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \frac{\partial F}{\partial u}(\tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*), \tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*), x, \varepsilon),$$

аналогично определяется $\tilde{F}_v^{(\mp)}$.

Для производных $\tilde{F}_u^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ и $\tilde{F}_v^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ при достаточно малых ε нетрудно получить оценки (см. [3])

$$\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, x_*) \geq c_0 \sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [0, x_*], \quad \tilde{F}_u^{(+)}(x, \varepsilon, x_*) \geq c_0 \sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [x_*, 1], \quad (54)$$

$$\tilde{F}_v^{(-)}(x, \varepsilon, x_*) \leq -c \sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [0, x_*], \quad \tilde{F}_v^{(+)}(x, \varepsilon, x_*) \leq -c \sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [x_*, 1]. \quad (55)$$

Так как при $n \geq 1$ имеют место равенства

$$U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) = \tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) = \tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) + O(\varepsilon^{3/4}),$$

оценки (55) обеспечивают квазимоноотонность функции F . Отметим, что при доказательстве этих оценок используется условие A9.

4.4. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2). Введём точки $\bar{x}(\varepsilon)$ и $\underline{x}(\varepsilon)$:

$$\bar{x}(\varepsilon) = X_{2n+1} - \varepsilon^{(n+1)/2}\delta, \quad \underline{x}(\varepsilon) = X_{2n+1} + \varepsilon^{(n+1)/2}\delta,$$

где δ – положительное число, которое будет выбрано ниже. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) построим отдельно слева и справа от точек $\bar{x}$ и $\underline{x}$ соответственно в виде (50), (51). В точках $\bar{x}$ и $\underline{x}$ будем сшивать функции $\bar{U}^{(\mp)}$, $\bar{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ так, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\bar{U}^{(\mp)}(\bar{x}, \varepsilon) = \frac{U_n^{(-)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x}) + U_n^{(+)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x})}{2} + \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad \bar{V}^{(\mp)}(\bar{x}, \varepsilon) = \psi_2(\bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad (56)$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(\underline{x}, \varepsilon) = \frac{U_n^{(-)}(\underline{x}, \varepsilon, \underline{x}) + U_n^{(+)}(\underline{x}, \varepsilon, \underline{x})}{2} - \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad \underline{V}^{(\mp)}(\underline{x}, \varepsilon) = \psi_2(\underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}\mu. \quad (57)$$

Отсюда следует непрерывность функций $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$. Здесь μ – положительное число, которое выбирается далее вместе с δ так, чтобы обеспечить выполнение условий 4) и 5) определения.

Будем строить функции $\bar{U}^{(\mp)}$, $\bar{V}^{(\mp)}$, $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ как модификацию функций $U_n^{(\mp)}$ и $V_n^{(\mp)}$, определённых в (45), (46):

$$\bar{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \bar{Q}^{(\mp)}u(\bar{\tau}) + \bar{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\bar{\sigma}}),$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}u(\underline{\tau}) + \underline{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

$$\bar{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \bar{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})) + \varepsilon^{n/2+1}k\bar{\Lambda}_{\mp}(1 - e^{\pm\gamma\bar{\sigma}}),$$

$$\underline{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}v(\underline{\tau})) - \varepsilon^{n/2+1}k\underline{\Lambda}_{\mp}(1 - e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{x - \bar{x}}{\varepsilon^{3/4}}, \quad \underline{\tau} = \frac{x - \underline{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \underline{\sigma} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon^{3/4}}, \quad \gamma = \sqrt{c_0},$$

постоянная c_0 определена в (54). Считаем, что все функции, зависящие от “растянутых” переменных, умножены на срезающие функции.

Определим функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ как решения СЛАУ

$$\alpha^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A, \quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A,$$

где $A > 0$ – число, которое будет выбрано ниже достаточно большим. Так как определители этих систем, равные $\bar{g}_v^{(\mp)}(x)$, отличны от нуля в силу условия A6, существуют единственные решения

$$\alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x) + \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A, \quad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{1 - \bar{f}_u^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A.$$

В следующем пункте будет показано как выбрать числа A , δ , μ , k , $\bar{\Lambda}_{\mp}$, $\underline{\Lambda}_{\mp}$ и функции $\bar{Q}^{(\mp)}u$, $\bar{Q}^{(\mp)}v$, $\underline{Q}^{(\mp)}u$, $\underline{Q}^{(\mp)}v$, чтобы для всех достаточно малых ε две пары функций (50) и (51) были верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.5. Проверка выполнения условий определения. Пусть $n \geq 1$. Заметим, что функции $F(u, v, x, \varepsilon)$ (в силу неравенств (55)) и $f(u, v, x, \varepsilon)$ (в силу условия A10) удовлетворяют условию квазимоноотонности для достаточно малых ε в области G_0 (см. (52)).

Проверим выполнение неравенств $L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) \leq 0$ и $M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) \leq 0$ условия 2) на интервале $(0, \bar{x})$, где $\bar{U} = \bar{U}^{(-)}$, $\bar{V} = \bar{V}^{(-)}$. Выражения для $L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V})$ и $M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U})$ после длинных, но простых преобразований принимают вид

$$L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) = \varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{U}^{(-)}}{dx^2} - F(\bar{U}^{(-)}, \bar{V}^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} A -$$

$$- \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} (\bar{Q}^{(-)} u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v + O(Ae^{\kappa\bar{\tau}})) -$$

$$- \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma\bar{\sigma}} (\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) - c_0 \sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2), \quad (58)$$

$$M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) = \varepsilon \frac{d^2 \bar{V}^{(-)}}{dx^2} - f(\bar{U}^{(-)}, \bar{V}^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2} A +$$

$$+ \varepsilon^{(n+1)/2} \left(\frac{d^2 \bar{Q}^{(-)} v}{d\bar{\tau}^2} - \hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} u - \hat{f}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v + O(Ae^{\kappa\bar{\tau}}) \right) -$$

$$- \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma\bar{\sigma}} (\hat{f}_u^{(-)}(x, \bar{\tau}, \bar{x}) + kc_0) + \varepsilon^{n/2+1} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2). \quad (59)$$

Определим функции $\bar{Q}^{(-)} u$, $\bar{Q}^{(-)} v$ как решение задачи

$$\bar{Q}^{(-)} u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v = \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa\bar{\tau}},$$

$$\frac{d^2 \bar{Q}^{(-)} v}{d\bar{\tau}^2} = \hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} u + \hat{f}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v - \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa\bar{\tau}},$$

$$\bar{Q}^{(-)} v(0) = \mu - \beta^{(-)}(\bar{x}), \quad \bar{Q}^{(-)} v(-\infty) = 0, \quad (60)$$

где число $\bar{C}^{(-)}$ выбирается достаточно большим, чтобы слагаемые $O(Ae^{\kappa\bar{\tau}})$ в правых частях равенств (58), (59) удовлетворяли неравенствам $|O(Ae^{\kappa\bar{\tau}})| \leq \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa\bar{\tau}}$. Эта задача аналогична задаче (30)–(32), и её решение находится в явном виде

$$\bar{Q}^{(-)} v(\bar{\tau}, \bar{x}) = \Phi_{(-)}(\bar{\tau}, \bar{x}) \left(\frac{\mu - \beta^{(-)}(\bar{x})}{\Phi_{(-)}(0, \bar{x})} + \int_0^{\bar{\tau}} \Phi_{(-)}^{-2}(s, \bar{x}) \int_{-\infty}^s \Phi_{(-)}(t, \bar{x}) \bar{q}^{(-)}(t, \bar{x}) dt ds \right),$$

$$\bar{Q}^{(-)} u(\bar{\tau}, \bar{x}) = \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v(\bar{\tau}, \bar{x}) + \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa\bar{\tau}},$$

где $\bar{q}^{(-)}(t, \bar{x}) = (\hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, t, \bar{x}) - 1) \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa t}$.

Первое граничное условие (60) обеспечивает выполнение второго равенства в (56) для знака $(-)$. Определим число $\bar{\Lambda}_-$ так, чтобы выполнялось первое равенство в (56):

$$\bar{\Lambda}_- = \frac{U_n^{(+)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x}) - U_n^{(-)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x})}{2\varepsilon^{(n+1)/2}} - \alpha^{(-)}(\bar{x}) - \bar{Q}^{(-)} u(0, \bar{x}) + \mu.$$

Число $\bar{\Lambda}_-$ зависит от ε , но является ограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как разность в числителе дроби есть величина порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$. Заметим, что $\bar{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ .

Выражение (58) теперь принимает вид

$$L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) = O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} A - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} (\bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa\bar{\tau}} + O(Ae^{\kappa\bar{\tau}})) -$$

$$- \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma\bar{\sigma}} (\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) - c_0 \sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2).$$

Первое слагаемое в правой части равенства не зависит от A , поэтому сумму первых двух слагаемых в силу (54) можно сделать отрицательной выбором достаточно большого A . Третье слагаемое является отрицательным при достаточно большом $\overline{C}^{(-)}$. С учётом (54) четвёртое слагаемое также будет отрицательным при $\overline{\Lambda}_- > 0$. Так как $n \geq 1$, то пятое и шестое слагаемые имеют более высокий порядок малости по ε , чем первые четыре, и, значит, при достаточно малых ε не изменят знака всей суммы, т.е. будет выполнено неравенство

$$L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

Выражение (59) принимает вид

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) &= O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2} A - \varepsilon^{(n+1)/2} (\overline{C}^{(-)} A e^{\kappa \overline{\tau}} + O(A e^{\kappa \overline{\tau}})) - \\ &- \varepsilon^{(n+1)/2} \overline{\Lambda}_- e^{\gamma \overline{\tau}} (\hat{f}_u^{(-)}(x, \overline{\tau}, \overline{x}) + k c_0) + \varepsilon^{n/2+1} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2). \end{aligned}$$

С той лишь разницей, что здесь отрицательность четвёртого слагаемого обеспечивается за счёт выбора достаточно большого k , отсюда получаем выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

На интервале $(\overline{x}, 1)$, где $\overline{U} = \overline{U}^{(+)}$, $\overline{V} = \overline{V}^{(+)}$, неравенства $L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0$ и $M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0$ проверяются точно так же. Аналогичным образом доказывается, что на интервалах $(0, \underline{x})$ и $(\underline{x}, 1)$ выполнены неравенства для нижнего решения $L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) > 0$ и $M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) > 0$.

Таким образом, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2) определения для случая негладких верхнего и нижнего решений. Кроме того, эти функции являются непрерывными на отрезке $[0, 1]$, так как $\overline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ по построению удовлетворяют равенствам (56), (57).

Условие 1) упорядоченности верхнего и нижнего решений проверяется стандартным способом (см. [5]).

Легко проверяется, что функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 3) определения. Перейдём к проверке условия 4). Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) &= \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) + \varepsilon^{n/2-1/4} \gamma (\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) + \\ &+ \varepsilon^{(n+1)/2} \left(\frac{d\alpha^{(-)}}{dx}(\overline{x}) - \frac{d\alpha^{(+)}}{dx}(\overline{x}) \right) + \varepsilon^{n/2} \left(\frac{d\overline{Q}^{(-)} u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x}) - \frac{d\overline{Q}^{(+)} u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x}) \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Из формальных равенств (37) следует, что

$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) = O(\varepsilon^{n/2}),$$

а так как $\overline{x} - X_{2n+1} = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, то это равенство останется верным и при замене X_{2n+1} на $\overline{x}$. При этом выражение (61) примет вид

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) = \varepsilon^{n/2-1/4} \gamma (\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) + O(\varepsilon^{n/2}).$$

Выше было показано, что $\overline{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ ; такое же неравенство получается для $\overline{\Lambda}_+$. Следовательно, при достаточно малых ε рассматриваемая разность будет положительной, т.е. будет выполнено первое неравенство условия 4).

Разность производных V -компонент верхнего решения приводится к виду

$$\frac{d\bar{V}^{(-)}}{dx}(\bar{x}, \varepsilon) - \frac{d\bar{V}^{(+)}}{dx}(\bar{x}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2}) - \varepsilon^{n/2}\delta J'(x_0) + O(\varepsilon^{n/2+1/4}),$$

где слагаемое $O(\varepsilon^{n/2})$ не зависит от δ . Так как $J'(x_0) < 0$ в силу (5), отсюда следует, что при достаточно большом δ и достаточно малых ε разность в левой части равенства будет положительной, т.е. будет выполнено второе неравенство из условия 4).

Условие 5) определения проверяется точно так же.

Таким образом, при $n \geq 1$ две пары функций $\bar{U}(x, \varepsilon)$, $\bar{V}(x, \varepsilon)$ и $\underline{U}(x, \varepsilon)$, $\underline{V}(x, \varepsilon)$, определённые формулами (50) и (51), являются для достаточно больших A , k , δ , μ и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.6. Завершение доказательства теоремы. Из существования упорядоченных верхнего и нижнего решений задачи (1), (2) следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам (53), а так как $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от U_n , V_n на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2})$, то и решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ отличается от U_n , V_n на величины того же порядка, т.е.

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad v(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, 1].$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если написать их для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1}(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $x \in [0, 1]$. Тогда для $n \geq 0$ получим равенства (48). Теорема доказана.

Следствие 1. Имеют место предельные равенства (6).

Следствие 2. Предельным положением при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривой $l_\varepsilon = \{(u, v, x) : u = u(x, \varepsilon), v = v(x, \varepsilon), 0 \leq x \leq 1\}$ (т.е. графика решения задачи (1), (2)) является кривая L .

Следствие 3. При каждом $t = \overline{0, n-1}$ для решения $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ справедливы равенства вида (48), в которых n заменено на t .

Следствие 4. Для производных решения задачи (1), (2) справедливы асимптотические представления

$$\frac{du}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dU_n}{dx}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad \frac{dv}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dV_n}{dx}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, 1].$$

5. Пример. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = (u - v)^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon \frac{dv}{dx^2} = v^3 - u + (v^2 - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad 0 < x < 1, \quad (62)$$

с граничными условиями (2). Легко проверяется выполнение условий A1–A10, где

$$\varphi(v, x) = v, \quad g(v, x) = (v^2 - 1) \left(v + x - \frac{1}{2} \right), \quad \psi_1(x) = -1, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2} - x, \quad \psi_3(x) = 1,$$

$$I(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - x \right), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Построим асимптотику решения нулевого порядка, т.е. функции $U_0(x, \varepsilon)$, $V_0(x, \varepsilon)$ (см. (49)). Для функций регулярной части находим $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \mp 1$. Все погранслоиные функции нулевого порядка оказываются равными нулю (это связано с тем, что в данном при-
мере $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ – постоянные).

Внутрислойную часть асимптотики следует строить при $x_* = X_1 = x_0 + \varepsilon^{1/4}x_1 = x_0 = 1/2$. Функции $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ определяются как решения задач (21), (19). В отличие от общего случая, в данном примере удаётся найти их в явном виде:

$$Q_0^{(\mp)}v(\tau) = \frac{\pm 2}{1 + \exp(\mp\sqrt{2}\tau)}.$$

Из (22) следует равенство $Q_0^{(\mp)}u(\tau) = Q_0^{(\mp)}v(\tau)$.

Таким образом, асимптотика нулевого порядка в задаче (62), (2) имеет вид

$$U_0(x, \varepsilon) = V_0(x, \varepsilon) = \begin{cases} -1 + \frac{2}{1 + \exp(-\sqrt{2}\tau)}, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - \frac{2}{1 + \exp(\sqrt{2}\tau)}, & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \tau = \frac{x - 1/2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

По доказанной теореме существует решение этой задачи, которое отличается от $U_0(x, \varepsilon)$, $V_0(x, \varepsilon)$ на величину $O(\sqrt{\varepsilon})$.

6. Заключительные замечания.

1. В данной задаче внутренний переходный слой описывается функциями, зависящими от одной растянутой переменной τ , т.е. является одномасштабным, что нехарактерно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) с различными степенями малого параметра при вторых производных. В исследованных ранее задачах такого типа с кратным корнем вырожденного уравнения внутренний слой оказывался двухмасштабным. Для случая простых корней одномасштабный внутренний слой был описан, например, в работе [6].

2. Если функция h (см. условие A1) зависит не только от x , но также от u и v , причём $h(u, v, x) > 0$ при $(u, v, x) \in I_u \times I_v \times [0, 1]$, то качественные особенности асимптотики решения с переходным слоем сохраняются, но выкладки становятся более громоздкими.

3. Представляет интерес случай, когда корень $u = \varphi(v, x)$ первого уравнения (3) является трёхкратным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефёдов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е. Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 435–465.
4. Нефёдов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
5. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущённой системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
6. Левашова Н.Т., Петровская Е.С. Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки // Учен. зап. физ. ф-та Моск. ун-та. 2014. № 3. С. 143101.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.11.2022 г.
После доработки 26.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.