

УДК 517.977.1+517.957+517.988

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2023 г. А. В. Чернов

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с неограниченным максимальным монотонным оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние. При этом использованы обобщение теоремы Минти–Браудера и результаты о тотальной глобальной разрешимости данного уравнения, полученные автором ранее. В качестве примера рассматривается полулинейное волновое уравнение.

DOI: 10.31857/S0374064123020115, EDN: PVQFXU

Введение. На сегодняшний день различным вопросам теории управляемости линейных систем (как сосредоточенных, так и распределённых) посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1, § 4.9; 2–5; 6, § 8.10; 7, гл. 5; 8] и библиографию в них). Для случая нелинейных распределённых систем достаточные условия управляемости носили зачастую локальный характер (см., например, [9; 10; 11, гл. 7; 12]). Проблема управляемости нелинейных распределённых систем стала активно изучаться с конца прошлого века, см. обзор [13] по абстрактным уравнениям в банаховом пространстве, а также работы [14–16] и монографию [17], касающиеся главным образом эволюционных уравнений второго порядка того или иного конкретного вида. При этом исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

В статье [18] были получены достаточные условия поточечной управляемости по вектору нелинейных функционалов для нелинейных распределённых систем, допускающих представление в виде вольтеррова функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна в лебеговом пространстве. Управления предполагались кусочно-постоянными вектор-функциями. В качестве примеров рассматривались первая краевая задача для уравнения диффузии и смешанная задача для уравнения переноса.

Проблема получения нелокальных достаточных условий точной управляемости распределённых систем представляется в известной степени актуальной. По этой теме имеет смысл выделить, например, следующие результаты, наиболее близкие к полученным в данной статье.

В работе [19] рассматривалась нелинейная интегро-дифференциальная система вида

$$x'(t) + Ax(t) = (Bu)(t) + f(t, x(t)) + \int_0^t g\left(t, s, x(s), \int_0^s K(s, \tau, x(\tau)) d\tau\right) ds, \quad t \in J = [0, a],$$

$$x(0) = x_0$$

в банаховом пространстве X с управлением $u \in L_2(J, U)$, U – банахово пространство; A – линейный оператор, генератор компактной полугруппы $T(t)$, $t > 0$, на X , $B : U \rightarrow X$ – линейный ограниченный оператор. Все нелинейные операторы правой части непрерывны и равномерно ограничены (откуда следует существование слабого решения). Точная нелокальная управляемость устанавливается при условии точной управляемости линейной системы

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

на подпространство V . Аналогичный результат был получен и для полулинейной системы соболевского типа

$$(Kx'(t)) + Ax(t) = Bu(t) + f(t, x(t)), \quad t \in J, \quad x(0) = x_0,$$

а также её обобщений на интегро-дифференциальный случай (см. [13, § 3]).

В [20] установлены достаточные условия точной управляемости в нуль для некоторых классов абстрактного эволюционного уравнения вида

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве X , с управлением $u \in L_2(0, T; U)$, U – гильбертово пространство; $f : X \rightarrow X$; A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы; $B : U \rightarrow X$ – линейный ограниченный оператор. Функция f предполагается непрерывно дифференцируемой по Фреше с равномерно ограниченной производной. Полученные абстрактные результаты применяются к уравнению теплопроводности. Точная управляемость в нуль доказывается при условии точной нуль-управляемости и равномерной наблюдаемости соответствующей линеаризованной системы.

В статье [21] рассматривается абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + Ay(t) = g(y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

в гильбертовом пространстве H ; A – положительно определённый, самосопряжённый оператор с областью определения $D(A) \subset H$; $B : U \rightarrow H$ – линейный ограниченный оператор, U – гильбертово пространство. Кроме того, накладываются специальные условия относительно гельфандовой тройки оператора A . Предполагается, что функция $g : H \rightarrow H$ непрерывно дифференцируема по Фреше, причём производная удовлетворяет некоторым специальным условиям [21, формулы $(H5)$, $(H5)'$], и накладывается специальное условие [21, формула $(H6)$] на финальное время T (грубо говоря, оно должно быть достаточно велико). Полученные абстрактные результаты применяются к полулинейному волновому уравнению

$$y'' - \Delta y = g(y) + \chi_\omega(x)u(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega,$$

$$y(\cdot, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad y'(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\omega \subset \Omega$ – подобласть области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g' \in L_\infty(\mathbb{R})$; $T \geq 2 \dim \Omega$ (см. [21, теорема 4.1]).

Отдельно отметим работу [22], в которой была установлена точная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с нелинейностью, удовлетворяющей глобальному условию Липшица, при условии достаточной малости промежутка времени. Управляемость доказывалась с помощью классической теоремы Минти–Браудера о разрешимости операторного уравнения первого рода с монотонным хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности. В данной статье рассмотрен случай абстрактного полулинейного эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве с максимальным монотонным оператором и нелинейностью, удовлетворяющей локальному условию Липшица. Получены достаточные условия точной управляемости, в некотором смысле аналогичные условиям в [22], при этом использовано обобщение теоремы Минти–Браудера, полученное в статье [23]. В качестве примера приведено полулинейное волновое уравнение.

1. Предварительные построения и соглашения. Пусть X – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_X$, $G : X \rightarrow X$ – инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0, T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2([0, T]; X)$, $x_0 \in X$. Следуя [1, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1 [1, теорема 4.8.3]. Для любых $z \in Z$ и $x_0 \in X$ существует единственная функция $x : [0, T] \rightarrow X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ функция $[x(t), y]_X$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$, и имеют место равенства

$$\frac{d}{dt}[x(t), y]_X = [x(t), G^*y]_X + [z(t), y]_X$$

$$\text{для п.в. } t \in [0, T], \quad \lim_{t \rightarrow +0} [x(t), y]_X = [x_0, y] \quad \text{для любого } y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)z(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Лемма 1.2 [1, следствие 4.8.1]. Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная слабо непрерывная функция $x : [0, T] \rightarrow X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ имеем

$$[x(t), y]_X = [x_0, y]_X + \int_0^t [x(s), G^*y]_X ds + \int_0^t [z(s), y]_X ds$$

и, более того, эта функция представляется формулой (2).

Напомним (см., например, [24, гл. III, с. 72; 25, с. 96]), что функция $x : [0, T] \rightarrow X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y[x(t)]$ непрерывна на отрезке $[0, T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w([0, T]; X)$. Для дальнейшего изложения важно, что норма $\|x(t)\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$ ограничена на $[0, T]$. С другой стороны (см., например, [26, гл. IV, теорема 1.9, с. 154]), всякая функция $x \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Стало быть, имеет место включение $\mathbb{C}_w([0, T]; X) \subset L_\infty([0, T]; X)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой во множестве $\mathbb{C}_w([0, T]; X)$ утверждается в леммах 1.1, 1.2, будем называть *слабым решением* задачи (1).

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G. Оператор $B = -G$ является максимальным монотонным, т.е. $[Bx, x]_X \geq 0$ для всех $x \in D(B) = D(G)$ (монотонность), и множество значений $\{(I+B)[x] : x \in D(G)\} = X$ (максимальность).

Замечание 1.1. Пусть G – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию G. Тогда по теореме Хилле–Йосиды (см. [27, теорема 7.4, с. 185]) для любого $x_0 \in D(G)$ существует единственное решение $x \in \mathbb{C}^1([0, +\infty); X) \cap \mathbb{C}([0, +\infty); D(G))$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} - Gx = 0, \quad x(0) = x_0,$$

причём $\|x(t)\|_X \leq \|x_0\|_X$, $\|dx/dt\|_X = \|Gx(t)\|_X \leq \|Gx_0\|_X$ для всех $t \geq 0$. Тем самым (см. [27, замечание 5, с. 190]) для любого $t \geq 0$ определён линейный оператор $D(G) \ni x_0 \rightarrow x(t) \in D(G)$. Более того, так как область определения максимального монотонного оператора $D(-G) = D(G)$ плотна в X [27, предложение 7.1, с. 181], $\|x(t)\|_X \leq \|x_0\|_X$, то указанный линейный оператор можно продолжить по непрерывности до линейного ограниченного оператора $S_G(t) : X \rightarrow X$. Как указано в работе [27, замечание 5, с. 190], легко проверить, что $S_G(t)$ обладает следующими свойствами:

- (a) $\|S_G(t)\| \leq 1$ для всех $t \geq 0$;
- (b) $S_G(t_1 + t_2) = S_G(t_1)S_G(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \geq 0$, $S_G(0) = I$;
- (c) $\lim_{t \rightarrow +0} \|S_G(t)x_0 - x_0\|_X = 0$ для всех $x_0 \in X$.

Свойство (b) означает, что семейство $\{S_G(t), t \geq 0\}$ является полугруппой, свойство (c) – что эта полугруппа сильно непрерывна и, таким образом, оператор G автоматически является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $S(t) = S_G(t)$. Свойство (a) означает, что имеем полугруппу сжатий. В обратную сторону, если задана сильно непрерывная полугруппа сжатий на X , то существует единственный оператор G , удовлетворяющий условию G и такой, что $S(t) = S_G(t)$ для всех $t \geq 0$. В силу сказанного выше справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.3. Пусть выполнено условие G и

$$A[z](t) = \int_0^t S(t-s)z(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

– слабое решение задачи (1) при $x_0 = 0$, $z \in Z$. Тогда для п.в. $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\|A[z](t)\|_X \leq \int_0^t \|z(s)\|_X ds.$$

2. Точная управляемость в линейном случае. Предполагая, что выполнено условие G , $y_0 \in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения

$$y'(t) = Gy(t) + u(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad (3)$$

где $u(t)$ – управляющая функция из класса $\mathbb{C}_w([0, T]; X)$. Обозначим через $y(t; u)$ слабое решение задачи (3), отвечающее управлению u . Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow T-0} [y(t; u), z]_X = [y_1, z] \quad \text{для любого } z \in D(G^*).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1 [1, § 4.3]. Пусть G – инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \geq 0$. Тогда $S(t)^*$ – тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором G^* .

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в пространстве X (см. [1, § 4.1, с. 210, 213]).

Далее будем дополнительно предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G^* . Справедливы равенства $[Gx, x] = 0$ для всех $x \in D(G)$; $[G^*x, x] = 0$ для всех $x \in D(G^*)$.

Непосредственно из леммы 2.1, условия G^* и утверждения из [1, следствие 4.3.1] (с учётом того, что мы рассматриваем случай вещественного пространства X , тогда как в [1] речь идет о комплексном X , которое там обозначается буквой H) вытекает

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия G , G^* . Тогда $\|S(t)x\|_X = \|S(t)^*x\|_X = \|x\|_X$ для любых $x \in X$, $t \geq 0$.

Напомним следующее известное определение.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega \subset \mathcal{X}$ – заданное множество. Оператор $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω , если для всех $x, y \in \Omega$, $z \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $z + ty \in \Omega$, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle F[z + ty] - F[z], x \rangle = 0.$$

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [28, теорема 2.1].

Лемма 2.3. Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности

$$\langle F(x), x \rangle \geq \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}}) \|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ – вещественная функция при $t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$. Тогда оператор F осуществляет сюръективное отображение пространства $\mathcal{X}$ на (всё) пространство $\mathcal{X}^*$. Иными словами, для каждого $y \in \mathcal{X}^*$ уравнение $F[x] = y$ имеет решение $x \in \mathcal{X}$.

Как известно [29, гл. V, § 7, с. 236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\cdot, \cdot]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить пространства X и X^* . Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F : X \rightarrow X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1) - F(\xi_2), \xi_1 - \xi_2]_X \geq \alpha \|\xi_1 - \xi_2\|_X^2 \text{ для любых } \xi_1, \xi_2 \in X, \quad \alpha > 0 \text{ при } \gamma(t) = \alpha t - \|F(0)\|_X.$$

Для произвольного $x \in X$ положим $u(t) = S(T-t)^*x$. Фактически $u(t) = z(T-t)$, где $z(t)$ – слабое решение задачи

$$z'(t) = G^*z(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = x,$$

поэтому $u \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$. Определим оператор $F : X \rightarrow X$ формулой

$$F[x] = y(T; u), \quad u(t) = S(T-t)^*x.$$

Нам понадобится также

Условие G' . Справедливы неравенства $\|S(t)^*x\|_X \geq a(t)\|x\|_X$ для всех $x \in X$ и п.в. $t \in [0, T]$ при $a \in L_2^+[0, T]$, $a \neq 0$.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия G и G' . Тогда оператор F является сильно монотонным.

Доказательство. Действительно, слабое решение задачи (3) определяется формулой

$$y(t; u) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)u(s)ds,$$

откуда имеем $F[x] = y(T; u) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-s)S(T-s)^*xds$. Таким образом, для любых $\xi_1, \xi_2 \in X$ получаем соотношения

$$\begin{aligned} [F(\xi_1) - F(\xi_2), \xi_1 - \xi_2]_X &= \int_0^T [S(T-s)S(T-s)^*(\xi_1 - \xi_2), \xi_1 - \xi_2]_X ds = \\ &= \int_0^T [S(T-s)^*(\xi_1 - \xi_2), S(T-s)^*(\xi_1 - \xi_2)]_X ds \geq \alpha \|\xi_1 - \xi_2\|_X^2, \quad \alpha = \int_0^T a^2(t) dt > 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть выполнено условие G . Согласно лемме 2.2 для выполнения условия G' достаточно выполнения условия G^* .

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие G . Тогда оператор F является хеминепрерывным на X .

Доказательство. Повторяя рассуждения из начала доказательства леммы 2.4, для произвольных $\xi_1, \xi_2 \in X$ получаем, что

$$\|F[\xi_1] - F[\xi_1 + \tau\xi_2]\|_X \leq \int_0^T \|S(T-s)S(T-s)^*\tau\xi_2\|_X ds = |\tau| \int_0^T \|S(T-s)S(T-s)^*\xi_2\|_X ds \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2.3–2.5 вытекает

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия G и G' . Тогда для любого $y_1 \in X$ поставленная задача управления имеет решение вида $u(t) = S(T-t)^*x$, $x \in X$.

3. Тотальное глобальная разрешимость управляемого полулинейного эволюционного уравнения. Далее (на протяжении всей статьи) считаем, что условие G выполнено. Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (1). Как уже пояснялось выше, при выполнении условия G для любых $x_0 \in X$, $z \in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w([0, T]; X)$ существует единственное слабое решение задачи (1) и это решение даётся формулой (2). Решение, отвечающее $x_0 \in X$ при $z = 0$, будем обозначать $x = \Theta[x_0](t) = S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z \in Z$ при $x_0 = 0$, будем обозначать $x = A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0 \in X$ фиксированным, положим $\theta(t) = \Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (2), слабое решение задачи (1) можно записать в виде

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t), \quad t \in [0, T].$$

По отдельности рассмотрим следующие два случая.

I. Случай ограниченного множества управлений. Пусть $E = L_\infty([0, T]; X)$, $\sigma \geq 0$ – заданное число, $u \in E$ – управляющая функция, $\|u\|_E \leq \sigma$. Совокупность всех таких управляющих функций будем обозначать через $\mathcal{D}$. Предположим, кроме того, что задана функция (оператор) $f : [0, T] \times X \rightarrow X$, удовлетворяющая условиям:

Условие F_1 . Для всех $x \in E$ отображение $[0, T] \ni t \rightarrow f(t, x(t))$ принадлежит классу $Z = L_2([0, T]; X)$.

Условие F_2 . Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M) : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0, T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x, y \in X$, $\|x\|_X, \|y\|_X \leq M$, п.в. $t \in [0, T]$ имеем оценку

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq \mathcal{N}(t, M)\|x - y\|_X.$$

Условие F_3 . Существует функция $\mathcal{N}_1(t, r) : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t , такая, что $\|f(t, \xi)\|_X + \sigma \leq \mathcal{N}_1(t, M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leq M$, п.в. $t \in [0, T]$.

Замечание 3.1. Условие F_3 можно заменить следующим.

Условие F'_3 . Существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0, T]$ и такая, что для п.в. $t \in [0, T]$ имеем неравенство $\|f(t, 0)\|_X + \sigma \leq \mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2 и F'_3 . Оценим

$$\|f(t, \xi)\|_X + \sigma \leq \|f(t, \xi) - f(t, 0)\|_X + \|f(t, 0)\|_X + \sigma \leq \mathcal{N}(t, M)\|\xi\|_X + \mathcal{N}_2(t) \leq \mathcal{N}_1(t, M),$$

где $\mathcal{N}_1(t, M) \equiv \mathcal{N}(t, M)M + \mathcal{N}_2(t)$. Однако, как видно из формулировки следующей далее теоремы 3.2, важно иметь в качестве функции $\mathcal{N}_1(t, M)$ не хотя бы какую-то оценку сверху, а оценку наиболее точную.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение

$$x'(t) = Gx(t) + f(t, x(t)) + u(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$x(t) = \theta(t) + A[f(\cdot, x(\cdot)) + u(\cdot)](t), \quad t \in [0, T], \quad x \in E. \quad (5)$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия F_1 , F_2 , G . Тогда, каково бы ни было $u \in L_2([0, T]; X)$, уравнение (5) не может иметь более одного решения.

Доказательство вытекает непосредственно из работы [30, теорема 1].

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия F_1 – F_3 , G , $\|\theta(t)\|_X \leq \omega(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$, где $\omega \in L_\infty[0, T]$. Предположим, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_1(t, \omega(t) + \beta(t)), \quad t \in (0, T], \quad \beta(0) = 0 \quad (6)$$

имеет решение – абсолютно непрерывную функцию $\beta(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$. Тогда для любого управления $u \in \mathcal{D}$ уравнение (5) имеет решение $x \in \mathbb{C}_w([0, T], X)$, удовлетворяющее оценке

$$\|x(t)\|_X \leq \|\theta(t)\|_X + \beta(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Доказательство вытекает непосредственно из [30, теорема 2].

II. Случай неограниченного множества управлений. Теперь будем считать, что управление $u \in E$ произвольно. Заменим условие F_3 следующими условиями.

Условие F_4 . Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|f(t, \xi)\|_X \leq \mathcal{N}_0(M)$ для любых $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leq M$, п.в. $t \in [0, T]$, $\max_{r \in [0, r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Условие F_5 . Для всякого $\sigma \geq 1$ имеем

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} = +\infty.$$

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия F_4 , F_5 , а число $\sigma \geq 1$ произвольно фиксировано. Тогда условие F_3 выполнено при

$$\mathcal{N}_1(t, r) = \mathcal{N}_1(r) = \begin{cases} \mathcal{N}_0(r_0) + \sigma, & r \in [0, r_0], \\ \mathcal{N}_0(r) + \sigma, & r > r_0. \end{cases}$$

И более того, задача (6) при $\omega(t) \equiv \|\theta\|_E$ заведомо имеет решение – неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(\cdot; \sigma)$, зависящую от параметра σ .

Доказательство. Выполнение условия F_3 очевидно. Пусть $M \geq \|\theta\|_E$ – произвольное число. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $r_0 \geq M$ (в противном случае надо просто увеличить r_0 и это не нарушит наших предположений). Пользуясь условием F_5 , рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_1(M+r)} = \int_M^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_1(\xi)} \geq \int_{r_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_0(\xi) + \sigma} = +\infty.$$

Таким образом, $J = +\infty$. В соответствии с теоремой Уинтнера [31, теорема 5.1, с. 44] это означает, что задача (6) при $\omega \equiv M$ имеет решение на произвольном отрезке $[0, T]$. Лемма доказана.

Непосредственно из теоремы 3.2 и леммы 3.1 вытекает

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия F_1 , F_2 , F_4 , F_5 , G и, кроме того, $\|\theta(t)\|_X \leq \omega(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$, где $\omega \in L_\infty[0, T]$. Тогда для любого $u \in E$ уравнение (5) имеет единственное решение $x \in \mathbb{C}_w([0, T], X)$, причём $\|x(t)\|_X \leq \omega(t) + \beta(t; \sigma)$ для п.в. $t \in [0, T]$, $\sigma \geq \|u\|_E$.

4. Точная управляемость полулинейного эволюционного уравнения. Считая выполненными условия F_1 , F_2 , F_4 , F_5 , G , G' , будем рассматривать задачу (4), понимая её слабое решение как решение уравнения (5).

В соответствии с результатами п. 3 при сделанных предположениях каждому управлению $u \in E = L_\infty([0, T]; X)$ отвечает единственное решение $x = x(\cdot; u) \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$ задачи (4).

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $x_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0, T]; X)$ такое, что $\lim_{t \rightarrow T-0} [x(t; u), z]_X = [x_1, z]$ для любого $z \in D(G^*)$.

Наряду с оператором $F : X \rightarrow X$, определённым в п. 2, рассмотрим оператор $Q : X \rightarrow X$, определяемый формулой $Q[z] = x[T; u]$, $u = S(T - t)^* z$. При этом будем считать,

что $y_0 = x_0$. В п. 2 уже было показано, что F – монотонный хеминепрерывный оператор, удовлетворяющий условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$, где

$$\alpha = \int_0^T a^2(t) dt > 0, \quad \alpha_0 = \|F(0)\|_X, \quad F(0) = S(T)x_0.$$

При выполнении условия G^* имеем $a \equiv 1$, $\alpha = T$.

Условие F_6 . Существуют число $\nu > 0$ и предел $\lim_{r \rightarrow +\infty} \{\gamma(r) - \nu \mathcal{N}_0(r)\} > 0$.

Лемма 4.1. Из F_6 следует условие F_5 .

Доказательство. Согласно F_6 , не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что

$$\mathcal{N}_0(r) < \frac{\gamma(r)}{\nu}, \quad \alpha r > \alpha_0 \quad \text{для любого } r \geq r_0.$$

Тогда получаем соотношения

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} > \nu \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\gamma(r) + \nu\sigma} = \nu \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\alpha r - \alpha_0 + \nu\sigma} = +\infty.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из [23, теорема 1.1, замечание 2.2] вытекает

Лемма 4.2. Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности

$$\langle F(x), x \rangle \geq \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}}) \|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(r)$ – вещественная функция при $r \geq 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \gamma(r) = +\infty$; $\mu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывная неубывающая функция такая, что существует $\lim_{r \rightarrow +\infty} \{\gamma(r) - \mu(r)\} = +\infty$. Тогда для любого $z \in \mathcal{X}^*$ существует число $\sigma > 0$, зависящее лишь от функций $\gamma(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ и элемента z , такое, что для всякого хеминепрерывного оператора $Q: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$, удовлетворяющего оценке

$$\|Q[x] - F[x]\|_{\mathcal{X}^*} \leq \mu(\|x\|_{\mathcal{X}}) \quad \text{при всех } x \in \mathcal{X},$$

уравнение $Q[x] = z$ имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathcal{X}$ со свойством $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq \sigma$.

Пусть $\|S(t)x_0\|_X \leq M$ для п.в. $t \in [0, T]$, $\|z\|_X \leq \sigma$, откуда следуют неравенства

$$\|u(t)\|_X \leq \|S(T-t)^*z\|_X \leq \|S(T-t)^*\|\sigma = \|S(T-t)\|\sigma \leq \sigma;$$

$\beta(t; \sigma)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_0(M + \beta(t)) + \sigma, \quad t \in (0, T], \quad \beta(0) = 0.$$

Как показано в п. 3, имеет место оценка

$$\|x(t; u)\|_X \leq M + \beta(t; \sigma) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (7)$$

Согласно условию F_6 найдётся число $r_1 > 0$ такое, что $\nu \mathcal{N}_0(r) < \gamma(r)$, $\alpha r > \alpha_0$ для всех $r \geq r_1$. Положим

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad C_0 = (e^{\alpha_1 T} - 1)M + e^{\alpha_1 T} \gamma(r_1) + \frac{\alpha_0}{\alpha}, \quad \psi(\nu, T) = \frac{e^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1} - T.$$

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия $F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^T \|f(s, x(s; u))\|_X ds \leq \tilde{\mu}(\sigma) \equiv \begin{cases} r_1 - \sigma T & \text{при } \beta(T; \sigma) \leq r_1, \\ \psi(\nu, T)\sigma + C_0 & \text{при } \beta(T; \sigma) > r_1. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственно из оценки (7) и условия F_4 получаем

$$\int_0^T \|f(s, x(s; u))\|_X ds \leq \int_0^T \mathcal{N}_0(M + \beta(t; \sigma)) dt = \beta(T; \sigma) - \sigma T.$$

В случае $\beta(T; \sigma) \leq r_1$ утверждение очевидно. Рассмотрим противоположный случай. Положим для краткости $\beta(t) = \beta(t; \sigma)$. Исходя из определения функции $\beta(t)$ и числа r_1 , путём разделения переменных при $\beta(t) > r_1$ получаем

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{\beta'(\xi) d\xi}{\mathcal{N}_0(M + \beta(\xi)) + \sigma} = \int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(M + r) + \sigma} \geq \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu dr}{\nu \mathcal{N}_0(M + r) + \nu \sigma} \geq \\ &\geq \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu dr}{\gamma(M + r) + \nu \sigma} = \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu dr}{\alpha(M + r) - \alpha_0 + \nu \sigma} = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left| \frac{\alpha\beta(t) + \alpha M - \alpha_0 + \nu \sigma}{\alpha r_1 - \alpha_0 + \alpha M + \nu \sigma} \right|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha\beta(t) + \alpha M - \alpha_0 + \nu \sigma \leq e^{\alpha_1 t} [\gamma(r_1) + \alpha M + \nu \sigma], \quad \beta(t) \leq \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha_1 t} - 1) [\alpha M + \nu \sigma] + \frac{\alpha_0}{\alpha} + e^{\alpha_1 t} \gamma(r_1).$$

Таким образом, $\beta(T; \sigma) - \sigma T \leq \psi(\nu, T)\sigma + C_0$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. Пусть выполнены условия $F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'$. Тогда справедлива оценка

$$\|Q[z] - F[z]\|_X \leq \tilde{\mu}(\|z\|_X) \quad \text{для любого } z \in X.$$

Доказательство. Пусть $u = S(T - t)^* z$, $z \in X$, откуда следует неравенство $\|u\|_E \leq \|z\|_X$. Имеем

$$x(t; u) = \theta(t) + A[f(\cdot, x(\cdot; u)) + u(\cdot)](t), \quad t \in [0, T], \quad y(t; u) = \theta(t) + A[u(\cdot)](t), \quad t \in [0, T],$$

соответственно $x(t; u) - y(t; u) = A[f(\cdot, x(\cdot; u))](t)$, $t \in [0, T]$. Следовательно, согласно леммам 1.3 и 4.3 имеют место соотношения

$$\|Q[z] - F[z]\|_X = \|x(T; u) - y(T; u)\|_X \leq \int_0^T \|f(s, x(s; u))\|_X ds \leq \tilde{\mu}(\|z\|_X).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.5. Пусть выполнены условия $F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'$. Тогда оператор Q является хеминепрерывным.

Доказательство. Выберем произвольно $\xi_1, \xi_2 \in X$ и для $\tau \in [-1; 1]$ положим $u_\tau = S(T - t)^* [\xi_1 + \tau \xi_2]$, $\bar{x}_\tau(t) = x(t; u_\tau)$, $\sigma = \|\xi_1\|_X + \|\xi_2\|_X$. Согласно (7) и оценкам, установленным при доказательстве леммы 4.3, для $t \in [0, T]$ имеем

$$\|\bar{x}_\tau(t)\|_X \leq M + \beta(T; \sigma) \leq \bar{M}, \quad \bar{M} = M + \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha_1 T} - 1) [\alpha M + \nu \sigma] + \frac{\alpha_0}{\alpha} + e^{\alpha_1 T} \gamma(r_1),$$

при этом $\bar{x}_\tau(t) = \theta(t) + A[f(\cdot, \bar{x}_\tau) + u_\tau](t)$. Следовательно,

$$\bar{x}_\tau(t) - \bar{x}_0(t) = A[f(\cdot, \bar{x}_\tau) - f(\cdot, \bar{x}_0) + u_\tau - u_0](t).$$

Согласно лемме 1.3 и условию F_2 получим неравенства

$$\|\bar{x}_\tau(t) - \bar{x}_0(t)\|_X \leq \int_0^t \|f(s, \bar{x}_\tau) - f(s, \bar{x}_0)\|_X ds + |\tau|\sigma \leq \int_0^t \mathcal{N}(s, \bar{M}) \|\bar{x}_\tau(s) - \bar{x}_0(s)\|_X ds + |\tau|\sigma.$$

Рассмотрим оператор $\Phi : L_\infty[0, T] \rightarrow L_\infty[0, T]$, определяемый формулой

$$\Phi[z](t) = \int_0^t \mathcal{N}(s, \bar{M}) z(s) ds.$$

Пользуясь результатами работы [32], нетрудно показать, что спектральный радиус $\rho(\Phi) = 0$. Тогда в силу обобщённой леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|\bar{x}_\tau - \bar{x}_0\|_E \leq \|R(\Phi)[|\tau|\sigma]\|_{L_\infty} \leq |\tau|\sigma \|R(\Phi)\|, \quad R(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k,$$

откуда следует, что

$$\|Q[\xi_1] - Q[\xi_1 + \tau\xi_2]\|_X = \|x(T; u_\tau) - x(T; u_0)\|_X \leq |\tau|\sigma \|R(\Phi)\| \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия $F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'$ и, кроме того, $\psi(\nu, T) < \alpha$. Тогда для любого $x_1 \in X$ поставленная задача управления имеет решение вида

$$u = S(T - t)^* z, \quad z \in X.$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 условие F_5 выполнено. Как уже было сказано, определяемый в п. 2 оператор $F : X \rightarrow X$ является монотонным, хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$. Поскольку оператор $Q : X \rightarrow X$ был определён формулой $Q[z] = x(T; u)$, $u = S(T - t)^* z$, то для доказательства утверждения теоремы достаточно установить разрешимость уравнения $Q[z] = x_1$ для всех $x_1 \in X$. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что выполнены условия леммы 4.2 при $X = X$. Пусть $\tilde{\mu}(\sigma)$ – функция из формулировки леммы 4.3. Учитывая определение функции $\beta(t; \sigma)$ и, в частности, монотонность $\beta(T; \sigma)$ по $\sigma \geq 0$, рассмотрим следующие два случая.

1. Если $\beta(T; 0) \geq r_1$, то, очевидно, $\beta(T; \sigma) > r_1$ для всех $\sigma > 0$. Полагаем

$$C_1 = C_0, \quad \mu(\sigma) = \tilde{\mu}(\sigma) = \psi(\nu, T)\sigma + C_1.$$

2. Если $\beta(T; 0) < r_1$, то найдётся $\sigma_1 > 0$ такое, что $\beta(T; \sigma_1) = r_1$. Здесь полагаем

$$C_1 = C_0 + r_1, \quad \mu(\sigma) = \begin{cases} \psi(\nu, T)\sigma_1 + C_1 & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \\ \psi(\nu, T)\sigma + C_1 & \text{при } \sigma > \sigma_1. \end{cases}$$

Отметим, что в обоих случаях функция $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ будет непрерывной и неубывающей, и по построению $\tilde{\mu}(\sigma) \leq \mu(\sigma)$ для всех $\sigma \geq 0$. Поэтому согласно лемме 4.4 справедлива оценка

$$\|Q[z] - F[z]\|_X \leq \mu(\|z\|_X) \quad \text{для любого } z \in X.$$

При этом

$$\gamma(r) - \mu(r) = \{\alpha - \psi(\nu, T)\}r - \alpha_0 - C_1 \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty.$$

Наконец, по лемме 4.5 оператор Q хеминепрерывен. Таким образом, выполнены все условия леммы 4.2. Теорема доказана.

5. Волновое уравнение. Пусть $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество с границей Γ . Положим $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x, t) : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = g(x, t, \varphi) + U(x, t), \quad (x, t) \in Q; \quad (8)$$

$$\varphi|_{\Sigma} = 0; \quad (9)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

В работе [27, п. 10.3] рассматривалась аналогичная задача при $g \equiv 0$, $U \equiv 0$. Управляющую функцию будем представлять в виде $U = w + v'_t$. Следуя [27, п. 10.3], перепишем уравнение (8) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi + v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \varphi + g(t, \varphi) + w, \quad (x, t) \in Q. \quad (11)$$

Обозначим $\eta = (\varphi, \psi)^*$ (здесь $*$ – знак транспонирования), $u = (v, w)^*$; $\eta(t) = \eta(\cdot, t)$, $u(t) = u(\cdot, t)$, $g(t, \varphi) = g(\cdot, t, \varphi)$. Тогда систему (11) можно записать в виде

$$\frac{d\eta}{dt} = G\eta + f(\cdot, \eta) + u,$$

где

$$G\eta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} \psi \\ \Delta \varphi \end{pmatrix}, \quad f(t, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Опять же следуя [27, замечание 7, с. 338], будем использовать на пространствах $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ скалярные произведения

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 \, dx \quad \text{на} \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad [\eta_1, \eta_2]_X = \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 \, dx + \int_{\Omega} \psi_1 \psi_2 \, dx \quad \text{на} \quad X,$$

и в качестве области определения оператора G возьмём

$$D(G) = \{\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)\} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (9) встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (8)–(10) переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (4). Заметим, что

$$\|f\|_X = \sqrt{[f, f]_X} = \|g(t, \varphi)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда условия F_1 , F_2 , F_4 конкретизируются следующим образом.

Условие F_1 . Для всех $\varphi \in E$ отображение $[0, T] \ni t \rightarrow g(t, \varphi(t))$ принадлежит классу $Z = L_2([0, T]; L_2(\Omega))$.

Условие F_2 . Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M) : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0, T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\varphi_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\varphi_i\| \leq M$, $i = 1, 2$, п.в. $t \in [0, T]$ имеем

$$\|g(t, \varphi_1) - g(t, \varphi_2)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mathcal{N}(t, M) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Условие F₄. Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|g(t, \xi)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mathcal{N}_0(M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\xi\| \leq M$, п.в. $t \in [0, T]$, $\max_{r \in [0, r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Как показано в [27, замечание 7, с. 338], операторы G и $G^* = (-G)$ являются максимальными монотонными, причём $[G\eta, \eta]_X = 0$ для всех $\eta \in D(G)$. Стало быть, выполнены условия G и G^* . Согласно лемме 2.2 отсюда следует выполнение условия G' при $a \equiv 1$, $\alpha = T$. Таким образом, применима теорема 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М., 1980.
2. Carthel C., Glowinski R., Lions J.L. On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation: a numerical approach // J. of Optim. Theory and Appl. 1994. V. 82. № 3. P. 429–484.
3. Lebeau G., Robbiano L. Contrôle exact de l'équation de la chaleur // Comm. Partial Differ. Equat. 1995. V. 20. № 1–2. P. 335–356.
4. Васильев Ф.П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
5. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управляемость упругих колебаний систем с распределёнными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 2032–2044.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М., 2002.
7. Егоров А.И. Основы теории управления. М., 2004.
8. Zuazua E. Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems / Eds. C.M. Dafermos et al. Handbook of differential equations: Evolutionary equations. V. III. Amsterdam, 2007. P. 527–621.
9. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
10. Розанова А.В. Управляемость для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения // Мат. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 553–567.
11. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. Klamka J. Constrained exact controllability of semilinear systems // Syst. Control Lett. 2002. V. 47. № 2. P. 139–147.
13. Balachandran K., Dauer J.P. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey // J. of Optim. Theory and Appl. 2002. № 1. P. 7–28.
14. Pighin D., Zuazua E. Controllability under positivity constraints of semilinear heat equations // Math. Control Relat. Fields. 2018. V. 8. № 3–4. P. 935–964.
15. Klamka J., Avetisyan A.S., Khurshudyan A.Zh. Exact and approximate distributed controllability of processes described by KdV and Boussinesq equations: the Green's function approach // Arch. Control Sci. 2020. V. 30. № 1. P. 177–193.
16. Cannarsa P., Komornik V., Loreti P. One-sided and internal controllability of semilinear wave equations with infinitely iterated logarithms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002. V. 8. № 3. P. 745–756.
17. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. Controllability of Evolution Equations. Lecture Notes Ser. V. 34. Seoul, 1996.
18. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределённых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
19. Balachandran K., Dauer J.P., Balasubramanian P. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space // J. of Optim. Theory and Appl. 1995. V. 84. P. 83–91.
20. Mahmudov N.I. Exact null controllability of semilinear evolution systems // J. Glob. Optim. 2013. V. 56. № 2. P. 317–326.
21. Zhang X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application // J. Optimization Theory Appl. 2000. V. 107. № 2. P. 415–432.
22. Liu W., Williams G.H. Exact internal controllability for the semilinear heat equation // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211. P. 258–272.
23. Чернов А.В. Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.
24. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

25. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М., 1979.
26. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
27. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2011.
28. Качуровский Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2 (140). С. 121–168.
29. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1984.
30. Чернов А.В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с неограниченным оператором // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349.
31. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
32. Сумин В.И., Чернов А.В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 23.11.2022 г.
После доработки 16.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.