

УДК 517.977.1

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ АЛГОРИТМА “СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ”

© 2023 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Для алгоритма “супер-скручивания” приводится новый способ доказательства необходимых и достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости. Новый метод основывается на получении полного аналитического решения системы для “наихудшего” возмущения и позволяет получить критерий в более простой, полностью вещественной форме, а также найти оценки для наихудшей (мажорирующей) траектории.

DOI: 10.31857/S0374064123020103, EDN: PVEYXZ

Введение. Задачи управления для динамических систем в условиях неопределённости, т.е. при наличии у системы неизвестных входных воздействий, занимают важное место в современной теории управления. Данной проблематике посвящены, в частности, монографии [1, 2]. Одной из основных задач управления для систем с неопределённостью является задача стабилизации. Популярными алгоритмами для решения этой задачи являются методы систем с переменной структурой, теория которых развивается ещё с середины 60-х гг. прошлого века [1, 3]. Среди используемых алгоритмов свою эффективность доказали алгоритм скручивания [4] и алгоритм “супер-скручивания” [5, 6]. Для последнего в работе [6] было доказано существование параметров, при которых данный алгоритм управления является алгоритмом скольжения второго порядка, что означает существование устойчивого скользящего режима второго порядка. Это, в свою очередь, означало существование параметров алгоритма, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы управления.

В дальнейшем с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия для параметров системы, выполнение которых обеспечивает устойчивость системы (см. [7, 8]). Кроме того, в статьях [9, 10] была проанализирована система алгоритма “супер-скручивания” с “наихудшим” входным воздействием. Такой подход позволил получить в [9] необходимые и достаточные условия на параметры алгоритма, обеспечивающие сходимость системы к началу координат, однако аналитически не было найдено полное решение системы с “наихудшим” входным воздействием, а определены только координаты его пересечения с одной из координатных осей. Цель настоящей работы – найти альтернативный способ доказательства необходимого и достаточного условия, основанного на получении полного аналитического решения системы с “наихудшим” входным воздействием. Данный алгебраический критерий не требует выполнения операций над комплексными числами, что делает его менее сложным.

1. Постановка задачи. Рассматривается система алгоритма “супер-скручивания” [5]

$$\dot{x}_1 = x_2 - k \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi - \mu \operatorname{sgn}(x_1), \quad (1)$$

где ξ – неизвестный измеримый ограниченный сигнал, $|\xi| \leq \xi_0$.

Требуется получить аналитическое решение системы (1) с “наихудшей” помехой и новый полностью вещественнозначный вид необходимых и достаточных условий сходимости системы (1) к началу координат при любом возмущении $\xi(t)$ из рассматриваемого класса.

2. Фазовые траектории. Заметим, что система (1) центрально симметрична относительно начала координат (т.е. семейство траекторий системы при всевозможных $\xi(t)$ из рассматриваемого класса симметрично), поэтому все последующие рассуждения будем проводить для правой полуплоскости, т.е. при $x_1 \geq 0$.

Рассмотрим первую четверть координатной плоскости. Заметим, что траектория системы (1) при $x_2 > 0$ не может перейти во вторую четверть из первой, так как в малой окрестности

оси $x_1 = 0$ при $x_2 > 0$, например в области $kx_1^{1/2} < x_2$, имеет место неравенство $\dot{x}_1 > 0$. Значит, поскольку всюду в правой полуплоскости выполняются соотношения $\dot{x}_2 \leq -\mu + \xi_0 < 0$, траектория системы (1) из первой четверти может либо перейти в четвертую, либо сойтись к началу координат. Из четвертой же четверти, поскольку $\dot{x}_1 \leq x_2 < 0$, $\dot{x}_2 \leq -\mu + \xi_0 < 0$, система (1) может перейти только в третью четверть.

3. Наихудшее возмущение. Заметим, что траектории системы (1) с произвольными ξ будут ограничены траекторией системы (1) с $\xi = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1)$. Действительно, в области, где x_1 возрастает, траектории систем вида (1) будут ограничены траекторией системы с наибольшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = \xi_0$. В области же, где x_1 убывает, ограничивающей будет система с наименьшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = -\xi_0$. В силу того, что траектории системы с наихудшим ξ ограничивают траектории системы с любым другим $\xi(t)$, а также приведенных выше рассуждений о фазовом портрете системы, для глобальной асимптотической устойчивости системы (1) необходима и достаточна асимптотическая устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) - \mu \operatorname{sgn}(x_1). \quad (2)$$

Всюду далее будем рассматривать систему (2) в правой полуплоскости.

Начнём рассмотрение с области $x_2 > kx_1^{1/2}$, т.е. при $\dot{x}_1 > 0$ (область (а) на рисунке). Положим начальные условия равными $(0, x_2^0)$. Решив второе уравнение системы (2) $\dot{x}_2 = \xi_0 - \mu$ и сделав замену переменной $z = \sqrt{x_1}$, получим

$$\dot{z} = \frac{a - bz}{2z} - \frac{k}{2}, \quad (3)$$

где $a = x_2^0$, $b = \mu - \xi_0$.

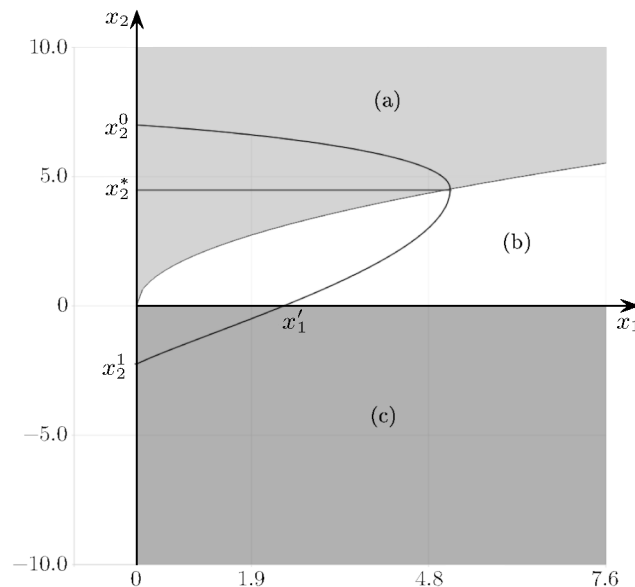


Рисунок. Рассматриваемые области полуплоскости.

С помощью замены переменной времени $\tau = t - a/b$ получим равенство

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-bz}{2z} - \frac{k}{2}.$$

Будем искать z в виде $z(\tau) = \tau u(\tau)$. В результате имеем соотношения

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\left(u^2 + \frac{k}{2}u + \frac{b}{2}\right)^{-1} u du = -\left(\left(u + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{b}{2}\right)^{-1} u du. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k^2 < 8b$, т.е. когда знаменатель правой части уравнения (4) всюду положителен. Проинтегрировав правую и левую части уравнения, находим

$$C = \frac{1}{2} \ln \left(z^2 + \frac{k}{2} z\tau + \frac{b}{2} \tau^2 \right) - \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4u + k}{\sqrt{8b - k^2}} \right). \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид $t_0 = 0$, $z(t_0) = 0$, т.е. $\tau_0 = -a/b$, $u(\tau_0) = 0$. Условие достижения границы области есть равенство $\dot{z} = 0$, т.е. $kz = a - bt$, а значит, $u = -b/k$. Подставив начальные и конечные условия, получим

$$x'_2 = \frac{ak}{\sqrt{2b}} \exp \left\{ \frac{-k}{\sqrt{8b - k^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} + \operatorname{arctg} \frac{4b - k^2}{k\sqrt{8b - k^2}} \right) \right\},$$

где x'_2 – координата по оси x_2 точки выхода системы (2) при $k^2 < 8(\mu - \xi_0)$ из области $x_1 > 0$ (из области (а) в (б) на рисунке).

Теперь рассмотрим случай, когда $k^2 > 8b$, т.е. когда у знаменателя правой части (4) есть корни

$$u_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8b}}{4}.$$

При этом в области (а) $\dot{x}_1 > 0$, т.е. $a - bt > kz$, а значит $-b/k < u < 0$. Заметим, что

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 8b}}{4} > \frac{b}{k},$$

тогда выражение $u - u_{1,2}$ положительно всюду в области. Уравнение (4) преобразуется к виду

$$-\frac{d\tau}{\tau} = \frac{A du}{u - u_1} + \frac{B du}{u - u_2},$$

где $A = \frac{u_1}{u_1 - u_2}$, $B = \frac{-u_2}{u_1 - u_2}$. Проинтегрировав левую и правую части уравнения, имеем

$$C - \ln(-\tau) = A \ln(u - u_1) + B \ln(u - u_2).$$

Подставив начальные и конечные условия такие же, как и в случае $k^2 < 8b$, найдём

$$x''_2 = \frac{-kau_1}{-b - ku_1} \left(\frac{u_2(b + ku_1)}{u_1(b + ku_2)} \right)^B,$$

где x''_2 – координата точки выхода системы (2) при $k^2 \geq 8(\mu - \xi_0)$ из области $x_1 > 0$ (из области (а) в область (б) на рисунке).

Перейдём к рассмотрению области $x_2 < kx_1^{1/2}$. Заметим, что система (2) приводится в этой области к виду (3), где $b = \mu + \xi_0$, $a = x_2^*$ (т.е. x'_2 либо x''_2 , в зависимости от выбора параметров) – координата перехода системы в эту область ((б) на рисунке). Это означает, что если $k^2 < 8(\mu + \xi_0)$, $\tau < 0$, то для решения будет выполнено уравнение (5). Начальные условия для рассмотрения системы в этой области положим следующие: $t = 0$, $kz = a$, т.е. $u = -b/k$. Подставив их, получим значение

$$C = \ln \left(\frac{a}{k} \right) - \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \operatorname{arctg} \frac{-4b + k^2}{k\sqrt{8b - k^2}}.$$

Перейдём в уравнении (5) к пределу при $\tau \rightarrow 0 - 0$ и получим

$$z_1 = \frac{a}{k} \exp \left\{ \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{-4b + k^2}{k\sqrt{8b - k^2}} \right) \right\}, \quad (6)$$

где $z_1 = \sqrt{x'_1}$, x'_1 – координата перехода системы (2) в четвёртую четверть координатной плоскости (из области (b) в область (c) на рисунке). Заметим, что если $8b > k^2$, то $z_1 > 0$.

В четвёртой четверти (область (c) на рисунке) для системы также будет выполнено уравнение (4). Проинтегрировав его, имеем

$$C = \frac{1}{2} \ln \left(z^2 + \frac{k}{2} z\tau + \frac{b}{2} \tau^2 \right) - \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4u + k}{\sqrt{8b - k^2}} \right).$$

Перейдём к пределу при $\tau \rightarrow 0 + 0$ и подставим конечное условие $u = 0$, соответствующее точке перехода в третью четверть. В результате найдём

$$|x_2^1| = z_1 \sqrt{2b} \exp \left\{ \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{k}{\sqrt{8b - k^2}} \right) \right\}, \quad (7)$$

где x_2^1 – координата перехода системы (2) в третью четверть координатной плоскости.

Объединив (6) и (7), находим

$$|x_2^1| = \frac{x_2^* \sqrt{2(\mu + \xi_0)}}{k^2} \exp \left\{ \left(-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k} \right) / \sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2} \right\}. \quad (8)$$

Заметим, что при $k^2 \rightarrow 8(\mu + \xi_0) - 0$ имеет место $|x_2^1| \rightarrow 0$. Из того факта, что траектории системы (2) с большими k ограничивают траектории системы с меньшими значениями, а также из приведённых рассуждений о фазовых траекториях системы следует, что при $k^2 \geq 8(\mu + \xi_0)$ траектория системы (2) будет сходиться к началу координат в первой четверти координатной плоскости.

Подставив x_2'' или x_2'' вместо x_2^* в уравнение (8), получим, что при $k^2 < 8(\mu - \xi_0)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{|x_2^1|}{x_2^0} &= \sqrt{\frac{\mu + \xi_0}{\mu - \xi_0}} \exp \left\{ \left(-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k} \right) / \sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2} - \right. \\ &\quad \left. - k \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - k^2}}{k} \right) / \sqrt{8(\mu - \xi_0) - k^2} \right\} = \nu_1(\mu, \xi_0, k), \end{aligned}$$

а при $8(\mu - \xi_0) \leq k^2 < 8(\mu + \xi_0)$ – равенство

$$\begin{aligned} \frac{|x_2^1|}{x_2^0} &= \sqrt{\frac{2u_1(\mu + \xi_0)}{ku_1 + (\mu - \xi_0)}} \left(\frac{u_2(ku_1 + (\mu - \xi_0))}{u_1(ku_2 + (\mu - \xi_0))} \right)^B \times \\ &\times \exp \left\{ \left(-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k} \right) / \sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2} \right\} = \nu_2(\mu, \xi_0, k). \end{aligned}$$

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (2), а значит, доказана

Теорема. Система (1) с ограниченным входным сигналом $|\xi| \leq \xi_0$ глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\nu(\mu, \xi_0, k) < 1,$$

где

$$\nu = \begin{cases} \nu_1, & 0 < k < \sqrt{8(\mu - \xi_0)}, \\ \nu_2, & \sqrt{8(\mu - \xi_0)} \leq k < \sqrt{8(\mu + \xi_0)}, \\ 0, & k \geq \sqrt{8(\mu + \xi_0)}. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределённости. М., 1997.
2. Fridman L., Shtessel Yu., Edwards Ch., Levant A. Sliding Mode Control and Observation. New York, 2014.
3. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
4. Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В. Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1338–1342.
5. Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В. Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
6. Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
7. Moreno J., Osorio M. Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Automat. Control. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
8. Seeber R., Horn M. Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
9. Seeber R., Horn M. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2018. P. 120–125.
10. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.12.2022 г.
После доработки 02.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.