

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, К. В. Семенов

Рассматривается параболическое уравнение с одной пространственной переменной с Дини-непрерывными коэффициентами. Для этого уравнения доказывается существование классического фундаментального решения и приводятся оценки. Условие на характер непрерывности старшего коэффициента уравнения является точным для существования фундаментального решения.

DOI: 10.31857/S0374064123020061, EDN: PUMUJR

**Введение.** Хорошо известно, что для равномерно-параболического уравнения с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, существует классическое фундаментальное решение, которое строится методом Леви (см., например, [1, с. 404]).

В работе [2] доказано существование фундаментального решения для параболического уравнения произвольного порядка с одной пространственной переменной в случае Дини-непрерывных коэффициентов уравнения, если соответствующий модуль непрерывности  $\omega_0$  удовлетворяет условию Дини “дважды”, а именно, если

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

В дальнейшем этот результат был обобщен на случай параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной (см. [3]). В статье [4] доказано существование классического фундаментального решения для одного уравнения со многими пространственными переменными при приведённом выше условии “дважды”-Дини. Во всех этих работах используется классический метод Леви.

С другой стороны, в статье [5] показано, что в случае, когда старший коэффициент уравнения не удовлетворяет условию Дини (см. ниже (1)), а именно, если не выполнено условие сходимости соответствующего интеграла, классическое фундаментальное решение может не существовать.

До сих пор оставался открытым вопрос, можно ли построить фундаментальное решение для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами, если модуль непрерывности удовлетворяет только условию Дини (см. ниже (1)). Сложность построения фундаментального решения в этом случае заключается в том, что прямое использование классического метода Леви не позволяет отказаться от условия “дважды”-Дини, приведённого выше.

В настоящей работе доказано существование классического фундаментального решения для параболического уравнения с одной пространственной переменной при условии Дини (см. ниже (1)), т.е., как следует из [5], при точных условиях на характер гладкости старшего коэффициента уравнения. Для этого предложен метод, который можно назвать *модифицированным методом Леви*. Отличие от классического метода заключается в конструкции интегрального слагаемого (объёмного потенциала) в представлении фундаментального решения, а именно в этом потенциале используется ядро специального вида (параметрикс), которое строится с помощью регуляризованных коэффициентов уравнения.

Кроме того, в настоящей статье допускается определённый рост младших коэффициентов уравнения при  $t \rightarrow 0 +$ .

Статья состоит из четырёх пунктов. В п. 1 приводятся необходимые сведения и формулируется основная теорема. В п. 2 строится параметрикс  $\Gamma_0$ . Фундаментальное решение для параболического уравнения, в котором отсутствует младший член, строится в п. 3. В п. 4 приводится доказательство основной теоремы.

**1. Необходимые сведения и формулировка основного результата.** Функцию  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  называем *модулем непрерывности*, если (см. [6, с. 147]):  $\omega(0) = 0$ ;  $\omega$  не убывает;  $\omega$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ ;  $\omega$  *полуаддитивна*, т.е.  $\omega(z_1 + z_2) \leq \omega(z_1) + \omega(z_2)$ .

Если  $\omega$  – модуль непрерывности, то

$$\frac{\omega(x)}{x} \leq 2 \frac{\omega(y)}{y}, \quad x \geq y > 0.$$

Для модуля непрерывности справедливо неравенство (см. [7])

$$\omega(|x|) \exp(-|x|^2/t) \leq C \omega(t^{1/2}) \exp(-c|x|^2/t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

при некоторых постоянных  $C, c > 0$ . Говорят, что модуль непрерывности  $\omega$  *удовлетворяет условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(x) = \int_0^x \frac{\omega(z)}{z} dz < +\infty, \quad x > 0. \quad (1)$$

В этом случае функция  $\tilde{\omega}$  также является модулем непрерывности, причём  $\omega(x) \leq 2\tilde{\omega}(x)$ .

Пусть  $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leq T\}$ . В полосе  $D$  рассматривается равномерно-параболический оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u.$$

Предполагаем, что коэффициенты оператора  $L$  – вещественнозначные функции, при этом коэффициент  $a$  задан в  $\bar{D}$ , коэффициенты  $b$  и  $c$  заданы в  $D$ , и выполнены условия:

- (а)  $\delta \leq a(x, t) \leq A$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ , для некоторых  $\delta, A > 0$ ;
- (б) функция  $a$  непрерывна в  $\bar{D}$ , причём имеет место оценка

$$|\Delta_x a(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x|), \quad (x, t), (x + \Delta x, t) \in \bar{D},$$

где  $\omega_0$  – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини, функции  $b$  и  $c$  непрерывны в  $D$  и

$$|b(x, t)| \leq \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad |\Delta_x b(x, t)| \leq \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}},$$

$$|c(x, t)| \leq \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}, \quad |\Delta_x c(x, t)| \leq \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t},$$

$(x, t), (x + \Delta x, t) \in D$ .

Здесь и далее для любой функции  $f(x, t)$  обозначаем  $\Delta_x f(x, t) = f(x + \Delta x, t) - f(x, t)$ .

Положим  $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$ . Функцию  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , называем *фундаментальным решением* уравнения  $Lu = 0$ , если:

- 1) функции  $\Gamma$ ,  $\partial \Gamma / \partial t$ ,  $\partial \Gamma / \partial x$ ,  $\partial^2 \Gamma / \partial x^2$  непрерывны в  $D^*$ ;
- 2) при любых фиксированных  $(\xi, \tau)$  из  $\mathbb{R} \times [0, T)$  функция  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению  $Lu = 0$  по переменным  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (\tau, T]$ ;
- 3) для любой непрерывной финитной функции  $h(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , и для любого  $\tau \in [0, T)$  интеграл (потенциал Пуассона)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \leq t \leq T,$$

является ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times (\tau, T], \quad u(x, \tau) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из единственности решения задачи Коши (см., например, [1, с. 29]) следует, что фундаментальное решение уравнения  $Lu = 0$  единственно.

Пусть  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$  – функция, определённая равенствами  $\rho(x) = C \exp(1/(x^2 - 1))$  при  $|x| < 1$  и  $\rho \equiv 0$  при  $|x| \geq 1$ , где постоянная  $C$  выбирается из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y) dy = 1.$$

Введём обозначения

$$\hat{a}(x, t; s) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x - sy, t) \rho(y) dy = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} a(y, t) \rho\left(\frac{x - y}{s}\right) dy, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad s \geq 0,$$

и

$$Q(x, t, \tau; r) = \int_{\tau}^t \hat{a}(x, \theta; r^{1/4}) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad r \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} Z(x, t; z, \tau; r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\sigma} \exp(-Q(z, t, \tau; r)\sigma^2) d\sigma = \\ &= \frac{1}{(2\pi Q(z, t, \tau; r))^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Q(z, t, \tau; r)}\right), \end{aligned}$$

$x, z \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $r \geq 0$ , и положим (см. [8, с. 17])

$$Z_1(x, t; \xi, \tau) \equiv Z(x, t; \xi, \tau; 0) = \frac{1}{(2\pi Q(\xi, t, \tau; 0))^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Q(\xi, t, \tau; 0)}\right), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть для коэффициентов оператора  $L$  выполнены условия (a) и (b). Тогда для уравнения  $Lu = 0$  существует фундаментальное решение  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , и для него выполнены оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l}\Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (2)$$

при этом для разности

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau)$$

справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{k+l}W}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (3)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ .

Здесь и далее через  $C$  и  $c$  обозначены положительные постоянные, зависящие от коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и числа  $T$ , конкретный вид которых для нас не важен.

**2. Параметрикс  $\Gamma_0(x - \xi, t; x, \tau)$ .** Функции  $\hat{a}(x, t; s)$  обладают свойствами

$$\delta \leq \hat{a}(x, t; s) \leq A, \quad |\hat{a}(x, t; s) - a(x, t)| \leq \omega_0(s),$$

$$\left| \frac{\partial^k \hat{a}}{\partial x^k}(x, t; s) \right| \leq \frac{C_k}{s^k}, \quad \left| \Delta_x \frac{\partial^k \hat{a}}{\partial x^k}(x, t; s) \right| \leq \frac{C_k}{s^k} \omega_0(|\Delta x|),$$

где  $(x, t), (x + \Delta x, t) \in \bar{D}$ ,  $s > 0$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Из этих свойств следуют неравенства

$$\delta(t - \tau) \leq Q(x, t, \tau; r) \leq A(t - \tau), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad r \geq 0,$$

$$|Q(x, t, \tau; r) - Q(x, t, \tau; 0)| \leq C\omega_0(r^{1/4})(t - \tau),$$

$$\left| \frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x, t, \tau; r) \right| \leq C_k(t - \tau)(r^{-1/4})^k,$$

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x, t, \tau; r) \right| \leq C_k\omega_0(|\Delta x|)(t - \tau)(r^{-1/4})^k,$$

здесь  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $r > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Функция  $Z(x - \xi, t; z, \tau; r)$  является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \hat{a}(z, t; r^{1/4}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

с коэффициентом, зависящим от параметров  $z \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 0$ , и обладает свойствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z(x - \xi, t; z, \tau; r) d\xi = 1, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x - \xi, t; z, \tau; r) \right| \leq C_{k,l}(t - \tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x - \xi, t; z, \tau; r) - \frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x - \xi, t; z, \tau; 0) \right| \leq \\ \leq C_k\omega_0(r^{1/4})(t - \tau)^{-(1+k)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right),$$

$$\left| \Delta_z \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x - \xi, t; z, \tau; r) \right| \leq C_{k,l} \frac{\omega_0(|\Delta z|)}{(t - \tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right),$$

$x, \xi, z \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $r \geq 0$ ,  $k, l \geq 0$ .

Кроме того, для полных производных функции  $Z(x - \xi, t; x, \tau; r)$  по переменной  $x$  справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} Z(x - \xi, t; x, \tau; r) \right| \leq \frac{C}{(t - \tau)^{(k+1)/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \sum_{l=0}^k \frac{(t - \tau)^{l/2}}{r^{l/4}}, \quad (6)$$

$x, \xi \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $r > 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Положим

$$Z_0(r, t) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right), \quad r \geq 0, \quad t > 0,$$

и рассмотрим функцию

$$\Gamma_0(x, t; z; \tau) = 2 \int_0^{+\infty} Z_0(r, t - \tau) Z(x, t; z, \tau; r) dr, \quad x, \xi, z \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T. \quad (7)$$

Из (4)–(6) следуют равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x - \xi, t; x, \tau) d\xi = 1 \quad (8)$$

и оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^l \partial x^k} \Gamma_0(x - \xi, t; x, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (9)$$

$$(x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad 0 \leq 2l + k \leq 2.$$

Заметим, что поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial Z_0}{\partial t}(r, t - \tau) dr = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial r^2}(r, t - \tau) dr = 0, \quad t > \tau,$$

то справедливо представление

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial Z_0}{\partial t}(r, t - \tau) \right) Z(x - \xi, t; x, \tau; r) dr = \\ & = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial Z_0}{\partial t}(r, t - \tau) \right) (Z(x - \xi, t; x, \tau; r) - Z(x - \xi, t; x, \tau; 0)) dr, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим параболический оператор  $L_1$  с коэффициентами  $a$ ,  $b$ , удовлетворяющими условиям (a) и (b):

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} K(x, t; \xi, \tau) &= L_{1x,t} \Gamma_0(x - \xi, t; x, \tau) = \\ &= (a(\xi, t) - a(x, t)) \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial x^2}(x - \xi, t; x, \tau) + b(x, t) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}(x - \xi, t; x, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим  $\omega_1(x) = \omega_0(x^{1/4})$ ,  $x \geq 0$ . Из (8) и (9)–(11) следуют равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; \xi, \tau) d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad (12)$$

и оценки

$$|K(x, t; \xi, \tau)| \leq C \frac{\omega_1((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (13)$$

$$|\Delta_x K(x, t; \xi, \tau)| \leq C \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t - \tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) + \exp\left(-c \frac{(x + \Delta x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \right), \quad (14)$$

$$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Пусть функция  $\mu$  непрерывна в  $D^*$  и удовлетворяет условиям

$$|\mu(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{\omega((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right),$$

$$|\Delta_x \mu(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{\omega(|\Delta x|)}{(t - \tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-c \frac{(x + \Delta x - \xi)^2}{t - \tau}\right) + \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \right),$$

$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , где  $\omega$  – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1). Рассмотрим *объёмный потенциал*

$$V\mu(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

где функция  $\Gamma_0$  задана формулой (7). Из (8) и (9) следует, что потенциал  $V\mu$  имеет непрерывные в  $D^*$  производные

$$\frac{\partial V\mu}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V\mu}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) &= \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy = \\ &= \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) [\mu(y, \eta; \xi, \tau) - \mu(x, \eta; \xi, \tau)] dy, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V\mu}{\partial t}(x, t; \xi, \tau) &= \mu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy = \\ &= \mu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x - y, t; x, \eta) [\mu(y, \eta; \xi, \tau) - \mu(x, \eta; \xi, \tau)] dy, \end{aligned} \quad (17)$$

и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l} V\mu}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{\tilde{\omega}((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (18)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ . Из (15)–(17) следует равенство

$$L_{1x,t} V\mu(x, t; \xi, \tau) = \mu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \quad (19)$$

**3. Фундаментальное решение для оператора  $L_1$ .**

**Лемма 1.** Пусть  $\omega$  – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини и

$$J_{\lambda,\omega}(t) = \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau} e^{-\lambda\tau} d\tau, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$  выполняется неравенство

$$J_{\lambda,\omega}(t) \leq \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Фиксируем  $t_0 > 0$  так, что  $J_{\lambda,\omega}(t_0) \leq 2\tilde{\omega}(\sqrt{t_0}) < \varepsilon/2$ . Из этой оценки сразу следует утверждение леммы для  $t \in (0, t_0]$ . Если  $t > t_0$ , то имеют место неравенства

$$J_{\lambda,\omega}(t) \leq J_{\lambda,\omega}(t_0) + 2\frac{\omega(t_0^{1/2})}{t_0^{1/2}} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\lambda\tau}}{\tau^{1/2}} d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{1}{\lambda^{1/2}},$$

откуда, выбирая  $\lambda$  достаточно большим, получаем утверждение леммы.

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную  $c$  из оценок (13), (14) и через  $H$  обозначим линейное пространство непрерывных в  $D^*$  функций  $\mu$ , для которых конечна величина

$$\begin{aligned} \|\mu\|_H = & \sup_{D^*} \left( |\mu(x, t; \xi, \tau)| \frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1((t-\tau)^{1/2})} \exp\left(\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right) + \\ & + \sup_{D^*} \left( |\Delta_x \mu(x, t; \xi, \tau)| \frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1(|\Delta x|)} \left( \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что  $H$  – банахово пространство с нормой  $\|\mu\|_H$ .

**Лемма 2.** Для любой функции  $F \in H$  интегральное уравнение

$$\mu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy = F(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad (20)$$

имеет единственное решение  $\mu \in H$  и справедливо неравенство

$$\|\mu\|_H \leq C \|F\|_H. \quad (21)$$

**Доказательство.** Умножим обе части уравнения (20) на  $e^{-\lambda(t-\tau)}$ , где  $\lambda > 0$  будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (20) уравнение

$$\mu^*(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x-y, t; x, \eta) \mu^*(y, \eta; \xi, \tau) dy = F^{(\lambda)}(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad (22)$$

где  $K^{(\lambda)}(x-y, t; x, \eta) = K(x-y, t; x, \eta) e^{-\lambda(t-\eta)}$ ,  $F^{(\lambda)}(x, t; \xi, \tau) = F(x, t; \xi, \tau) e^{-\lambda(t-\tau)}$ ,  $\mu^*(x, t; \xi, \tau) = \mu(x, t; \xi, \tau) e^{-\lambda(t-\tau)}$ .

Через  $A^{(\lambda)}$  обозначим линейный оператор, действующий на функции  $\mu \in H$  по формуле

$$A^{(\lambda)} \mu(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x-y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Докажем, что для достаточно большого  $\lambda > 0$  оператор  $A^{(\lambda)} : H \rightarrow H$  является сжимающим.

Установим сначала, что существует  $\lambda_1 > 0$  такое, что для любой функции  $\mu \in H$  и для любых  $\lambda \geq \lambda_1$  справедливо неравенство

$$|A^{(\lambda_1)}\mu(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{1}{4}\|\mu\|_H \frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \quad (23)$$

Имеем (см. оценку (13)) соотношения

$$\begin{aligned} |A^{(\lambda)}\mu| &\leq C\|\mu\|_H \int_{\tau}^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}} d\eta \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-y)^2}{t-\eta}\right) \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) dy = \\ &= C\|\mu\|_H \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} d\eta. \end{aligned}$$

Но выполняется оценка

$$\left( \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} + \int_{(t+\tau)/2}^t \right) \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} e^{-\lambda(t-\eta)} d\eta \leq C \frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau} J_{\lambda, \omega_1}(t),$$

поэтому

$$|A^{(\lambda)}\mu(x, t; \xi, \tau)| \leq C\|\mu\|_H \frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_1}(t)$$

и, следовательно (см. лемму 1), существует  $\lambda_1 > 0$  такое, что для любых  $\lambda \geq \lambda_1$  верно неравенство (23).

Покажем далее, что существует число  $\lambda_2 > 0$  такое, что для любой функции  $\mu \in H$  и для любых  $\lambda \geq \lambda_2$  справедлива оценка

$$|\Delta_x A^{(\lambda)}\mu(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{1}{4}\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right), \quad (24)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*$ .

В случае  $2|\Delta x|^2 \geq t - \tau$  неравенство (24) сразу следует из (23). Пусть  $2|\Delta x|^2 \leq t - \tau$ . В этом случае в силу (12) справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta_x A^{(\lambda)}\mu(x, t; \xi, \tau) &= \int_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x + \Delta x - y, t; x + \Delta x, \eta) [\mu(y, \eta; \xi, \tau) - \mu(x + \Delta x, \eta; \xi, \tau)] dy - \\ &\quad - \int_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x - y, t; x, \eta) [\mu(y, \eta; \xi, \tau) - \mu(x, \eta; \xi, \tau)] dy + \\ &\quad + \int_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu(y, \eta; \xi, \tau) - \mu(x, \eta; \xi, \tau)) \Delta_x K^{(\lambda)}(x - y, t; x, \eta) dy + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x K^{(\lambda)}(x-y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv I_1 - I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим интеграл  $I_1$ :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|\mu\|_H \int_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}} e^{-\lambda(t-\eta)} \exp\left(-c \frac{(x+\Delta x-y)^2}{t-\eta}\right) \times \\ &\times \frac{\omega_1(|x+\Delta x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) + \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) \right) dy \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{t-|\Delta x|^2}^t \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)} d\eta \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_1}(t). \end{aligned}$$

Аналогично для  $I_2$  получаем оценку

$$|I_2| \leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_1}(t).$$

Оценим  $I_3$ , пользуясь неравенством  $(a-b)^2 \geq a^2/2 - b^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \|\mu\|_H \int_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{2} \frac{(x-y)^2}{t-\eta}\right) \times \\ &\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) + \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) \right) dy \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)} d\eta \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_1}(t). \end{aligned}$$

Наконец, оценим  $I_4$ :

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C \|\mu\|_H \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{2} \frac{(x-y)^2}{t-\eta}\right) \times \\ &\times \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) e^{-\lambda(t-\eta)} dy \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} e^{-\lambda(\eta-\tau)} d\eta \leq \\ &\leq C \|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_1}(t). \end{aligned}$$

Из оценок для интегралов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  и из леммы 1, выбрав достаточно большое  $\lambda_2 > 0$ , получаем (24).

Полагая  $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , заключаем, что для оператора  $A^{(\lambda_0)} : H \rightarrow H$  выполняется неравенство  $\|A^{(\lambda_0)}\| \leq 1/2$ , и, следовательно, оператор  $A^{(\lambda_0)} : H \rightarrow H$  является сжимающим. Поэтому интегральное уравнение (22) для  $\lambda = \lambda_0$  имеет единственное решение  $\mu^* \in H$ . Возвращаясь к уравнению (20), приходим к выводу, что функция  $\mu(x, t; \xi, \tau) = \mu^*(x, t; \xi, \tau)e^{\lambda_0(t-\tau)}$  является единственным решением уравнения (20) из пространства  $H$  и справедливо неравенство (21). Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть коэффициенты уравнения  $L_1 u = 0$  удовлетворяют условиям (a) и (b). Тогда для уравнения  $L_1 u = 0$  существует фундаментальное решение  $\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ . Оно имеет вид

$$\Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau) + W_0(x, t; \xi, \tau), \quad (25)$$

где

$$W_0(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (26)$$

$\mu \in H$  – решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \mu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy = \\ = -L_{1x,t} Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau), (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \end{aligned} \quad (27)$$

и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l} \Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (28)$$

причём

$$\left| \frac{\partial^{k+l} W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{\tilde{\omega}_1((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (29)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ .

**Доказательство.** Ищем фундаментальное решение уравнения  $L_1 u = 0$  в виде

$$\Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x - y, t; x, \eta) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (30)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , где  $\mu \in H$  – функция, подлежащая определению.

Потребуем, чтобы функция  $\Gamma_1$  для любых фиксированных  $\xi \in \mathbb{R}$  и  $\tau \in [0, T)$  удовлетворяла уравнению  $L_1 u = 0$  по переменным  $x$  и  $t$ :

$$L_{1x,t} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = 0.$$

Тогда (см. (19)) для отыскания функции  $\mu \in H$  получаем интегральное уравнение (27). В силу свойств функции  $Z_1$  правая часть (27) принадлежит пространству  $H$  и, следовательно, в силу леммы 2 уравнение (27) имеет единственное решение  $\mu \in H$ . Подставляя это решение в (30), определяем функцию  $\Gamma_1$ .

Из (5) и (18) следует, что определённая таким образом функция  $\Gamma_1$  непрерывна в  $D^*$  вместе со своими производными  $\partial \Gamma_1 / \partial t$ ,  $\partial \Gamma_1 / \partial x$ ,  $\partial^2 \Gamma_1 / \partial x^2$  и справедливы оценки (28) и (29).

Кроме того, в силу (4) для любой непрерывной и ограниченной функции  $h(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , справедливо соотношение

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, \tau+0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) h(\xi) d\xi = h(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < T.$$

Таким образом, функция  $\Gamma_1$  из (25) является фундаментальным решением уравнения  $L_1 u = 0$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Из единственности решения задачи Коши следует равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T. \quad (31)$$

Уточним теперь оценку (29).

**Лемма 4.** Пусть выполнены условия леммы 3 и  $\Gamma_1$  – фундаментальное решение уравнения  $L_1 u = 0$ . Тогда для функции  $W_0$  из (26) справедливы представление

$$W_0(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; y, \eta) L_{1y,\eta} Z_1(y - \xi, \eta, \xi, \tau) dy$$

и оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l} W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (32)$$

$$(x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad 0 \leq 2l + k \leq 2.$$

**Доказательство.** Положим

$$\nu(x, t; \xi, \tau) = L_{1x,t} Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau) = (a(\xi, t) - a(x, t)) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}(x - \xi, t; \xi, \tau) + b(x, t) \frac{\partial Z_1}{\partial x}(x - \xi, t; \xi, \tau)$$

и

$$W_1(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; y, \eta) L_{1y,\eta} Z_1(y - \xi, \eta, \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Функция  $\nu \in H$ , поэтому потенциал  $W_1$  имеет непрерывные в  $D^*$  производные (см. (31))

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) &= - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) dy = \\ &= - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) [\nu(y, \eta; \xi, \tau) - \nu(x, \eta; \xi, \tau)] dy, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(x, t; \xi, \tau) = -\nu(x, t; \xi, \tau) - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) dy =$$

$$= -\nu(x, t; \xi, \tau) - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}(x, t; y, \eta) [\nu(y, \eta; \xi, \tau) - \nu(x, \eta; \xi, \tau)] dy. \quad (35)$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$L_{1x,t}W_1(x, t; \xi, \tau) = -\nu(x, t; \xi, \tau) - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} L_{1x,t}\Gamma_1(x, t; y, \eta)\nu(y, \eta; \xi, \tau) dy = -\nu(x, t; \xi, \tau). \quad (36)$$

Из (33)–(35) и того, что  $\nu \in H$ , получаем оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l}W_1}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (37)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ .

Из равенства (36) заключаем, что сумма  $Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau) + W_1(x, t; \xi, \tau)$  также является фундаментальным решением уравнения  $L_1u = 0$  и, следовательно, совпадает с  $\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)$ . Отсюда делаем вывод, что  $W_1 \equiv W_0$  в  $D^*$  и (см. (37)) справедливы оценки (32). Лемма доказана.

**4. Доказательство основной теоремы.** Пусть  $\Gamma_1$  – фундаментальное решение уравнения  $L_1u = 0$ , существование которого доказано в лемме 3. Для  $\Gamma_1$  имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l}\Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (38)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ .

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную  $c_1$  из неравенства (38).

Пусть  $H_1$  – множество непрерывных функций  $\nu : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых конечна величина

$$\|\nu\|_{H_1} = \sup_{D^*} \frac{t^{1/2}(t-\tau)}{\omega_0((t-\tau)^{1/2})} \exp\left(c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) |\nu(x, t; \xi, \tau)|.$$

Заметим, что  $H_1$  – банахово пространство с нормой  $\|\nu\|_{H_1}$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\Gamma_1$  – фундаментальное решение уравнения  $L_1u = 0$ . Тогда интегральное уравнение

$$\nu(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( c(x, t)\Gamma_1(x, t; y, \eta) \right) \nu(y, \eta; \xi, \tau) dy = F_1(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad (39)$$

где  $F_1(x, t; \xi, \tau) = -c(x, t)\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)$ , имеет единственное решение  $\nu \in H_1$ . Для этого решения справедлива оценка

$$|\Delta_x \nu(x, t; \xi, \tau)| \leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)} \left( \exp\left(-c \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right), \quad (40)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*$ .

**Доказательство.** Заметим, что в силу условия (b) и оценок (38) функция  $F_1 \in H_1$ . Умножим обе части уравнения (39) на  $e^{-\lambda(t-\tau)}$ , где  $\lambda > 0$  будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (39) интегральное уравнение

$$\nu^*(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} (c(x, t)\Gamma_1(x, t; y, \eta)) \nu^*(y, \eta; \xi, \tau) dy = F_1^*(x, t; \xi, \tau), \quad (41)$$

где  $\nu^*(x, t; \xi, \tau) = \nu(x, t; \xi, \tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$ ,  $F_1^*(x, t; \xi, \tau) = F_1(x, t; \xi, \tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$ .

Через  $B^{(\lambda)}$  обозначим линейный оператор, действующий на функции  $\nu \in H_1$  по формуле

$$B^{(\lambda)}\nu(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} (c(x, t)\Gamma_1(x, t; y, \eta))\nu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Докажем, что существует число  $\lambda_1 > 0$  такое, что оператор  $B^{(\lambda_1)} : H_1 \rightarrow H_1$  – сжимающий. В самом деле, имеем (см. условие (b) для коэффициента  $c$ )

$$\begin{aligned} |B^{(\lambda)}\nu| &\leq C\|\nu\|_{H_1} \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta^{1/2}(\eta-\tau)^{1/2}} d\eta \leq \\ &\leq C\|\nu\|_{H_1} \frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} d\eta \leq \\ &\leq C\|\nu\|_{H_1} \frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda, \omega_0}(t). \end{aligned}$$

В силу свойств интеграла  $J_{\lambda, \omega_0}(t)$  (см. лемму 1) выбираем  $\lambda_1 > 0$  таким, что  $CJ_{\lambda, \omega_0}(t) < 1/2$  при любых  $\lambda \geq \lambda_1$ . Тогда для любой функции  $\nu \in H_1$  получаем оценку

$$|B^{(\lambda)}\nu| \leq \frac{1}{2}\|\nu\|_{H_1} \frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

если  $\lambda \geq \lambda_1$ . Таким образом, имеем

$$\|B^{(\lambda_1)}\nu\|_{H_1} \leq \frac{1}{2}\|\nu\|_{H_1}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (41) при  $\lambda = \lambda_1$  имеет единственное решение  $\nu^* \in H_1$ . Отсюда, полагая  $\nu = \nu^*e^{\lambda_1(t-\tau)}$ , делаем вывод, что  $\nu \in H_1$  – единственное решение уравнения (39).

Докажем неравенство (40). В случае  $t - \tau \leq |\Delta x|^2$  оценка (40) сразу следует из того, что  $\nu \in H_1$ .

Пусть  $t - \tau > |\Delta x|^2$ . Положим

$$B\nu(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} c(x, t)\Gamma_1(x, t; y, \eta)\nu(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

и рассмотрим  $\Delta_x B\nu$ . Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_x B\nu(x, t; \xi, \tau)| &\leq \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_1(x, t; y, \eta)\Delta_x c(x, t)\nu(y, \eta; \xi, \tau)| dy + \\ &+ \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |c(x + \Delta x, t)\Delta_x \Gamma_1(x, t; y, \eta)\nu(y, \eta; \xi, \tau)| dy \leq \\ &\leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} d\eta + C \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t} \frac{|\Delta x|}{(t-\tau)^{1/2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right) + \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right) \right) \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\eta)^{1/2}} \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} d\eta \leq \\ & \leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)} \left( \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right) + \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right) \right), \end{aligned} \quad (42)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*$ .

Оценим  $|\Delta_x F_1(x, t; \xi, \tau)|$  в случае  $t - \tau \leq |\Delta x|^2$ :

$$\begin{aligned} |\Delta_x F_1(x, t; \xi, \tau)| & \leq |\Delta_x c(x, t) \Gamma_1(x, t; \xi, \tau)| + |c(x + \Delta x, t) \Delta_x \Gamma_1(x, t; \xi, \tau)| \leq \\ & \leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \\ & + C \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t} \frac{|\Delta x|}{t-\tau} \left( \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right) \leq \\ & \leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)} \left( \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (42), получаем окончательно оценку (40). Лемма доказана.

Пусть  $\nu \in H_1$  – решение интегрального уравнения (39). Тогда справедливы неравенства

$$|\nu(x, t; \xi, \tau)| \leq C \frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)$$

и

$$|\Delta_x \nu(x, t; \xi, \tau)| \leq C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \left( \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \right),$$

$(x, t; \xi, \tau), (x + \Delta x, t; \xi, \tau) \in D^*$ .

Из этих оценок, равенства (31) и оценок (38) следует, что для функции

$$W_2(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) dy \quad (43)$$

справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{k+l} W_2}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2}) (t-\tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (44)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 \leq 2l + k \leq 2$ .

**Доказательство теоремы.** Пусть  $\nu \in H_1$  – решение интегрального уравнения (39), существование которого доказано в лемме 5, и функция  $W_2$  задана формулой (43). Тогда из свойств функции  $\Gamma_1$  и оценок (44) получаем, что функция

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) + W_2(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

является фундаментальным решением уравнения  $Lu = 0$  и выполнены оценки (2).

Кроме того, из представления (25) следует равенство

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z_1(x - \xi, t; \xi, \tau) + W_0(x, t; \xi, \tau) + W_2(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

из которого, учитывая оценки (32) и (44), получаем неравенства (3). Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для  $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
3. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
4. *Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.* The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients // J. of Math. Sci. 2022. V. 264. № 5. P. 581–602.
5. *Ильин А.М.* О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 768–771.
6. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
7. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
8. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 22.09.2022 г.  
После доработки 22.09.2022 г.  
Принята к публикации 20.01.2023 г.