

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА
С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© 2023 г. Ю. П. Апаков, С. М. Мамажонов

Рассмотрена первая краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с младшими членами. Доказана единственность решения поставленной задачи. Решение получено в явном виде с помощью построенной функции Грина.

DOI: 10.31857/S037406412302005X, EDN: PULUDA

Введение. Решение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвёртого порядка (см. [1–4]). Их классификации и решению краевых задач для этих уравнений посвящена книга [5]. В статьях [6–11] изучен ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.

В работе [12] рассмотрена задача с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом. Начально-граничная задача для уравнения колебания балки решена в статье [13]. В [14] изучена краевая задача для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина. Задача для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками, имеющего сингулярный коэффициент, исследована в работе [15].

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$U_{xxxx}(x, y) - U_{yy}(x, y) + A_1(x)U_{xxx}(x, y) + A_2(x)U_{xx}(x, y) + \\ + A_3(x)U_x(x, y) + A_4(x)U(x, y) + A_5(x)U_y(x, y) = F(x, y),$$

где $A_i(x)$, $i = \overline{1, 5}$, и $F(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

С помощью замены

$$U(x, y) = u(x, y) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_5(x)}{2} y\right)$$

это уравнение приводится к уравнению

$$L[u] \equiv u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$a_1(x) = A_2(x) - \frac{3A_1'(x)}{2} - \frac{3(A_1(x))^2}{8}, \quad a_2(x) = \frac{(A_1(x))^3}{8} - \frac{A_1(x)A_2(x)}{2} - A_1''(x) + A_3(x), \\ a_3(x) = \frac{3(A_1(x))^2 A_1'(x)}{16} - \frac{A_1'''(x)}{4} + \frac{3(A_1'(x))^2}{16} - \frac{3(A_1'(x))^3}{32} - \frac{3(A_1(x))^4}{256} - \\ - \frac{A_1'(x)A_2(x)}{4} + \frac{(A_1(x))^2 A_2(x)}{16} - \frac{A_1(x)A_3(x)}{4} + \frac{(A_5(x))^2}{4} + A_4(x),$$

$$f(x, y) = F(x, y) \exp \left(\frac{1}{4} \int_0^x A_1(\xi) d\xi - \frac{A_5(x)}{2} y \right).$$

Задача (1)–(4). Требуется найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_4(y), \quad 0 \leq y \leq q, \quad (3)$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0, q]$, $i = \overline{1, 4}$, $f(x, y) \in C_{x,y}^{0,1}(\bar{\Omega})$ – заданные функции, причём

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad f(x, 0) = f(x, q) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (1) рассмотрено в работе [12] при $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -c(x, t)$, а в статьях [13–15] при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. В этих работах рассмотрен случай, когда $\psi_i(x) = 0$ и начальные условия отличны от нуля.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Если задача (1)–(4) имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \leq 0$, $2a_3(x) + a_1''(x) - a_2'(x) \geq 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения: $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в Ω .

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] \equiv 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1(x) u u_x - \frac{1}{2} a_1'(x) u^2 + \frac{1}{2} a_2(x) u^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) + \\ + u_{xx}^2 - a_1(x) u_x^2 + \left(a_3(x) + \frac{1}{2} a_1''(x) - \frac{1}{2} a_2'(x) \right) u^2 + u_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Проинтегрировав равенство (5) по области Ω , с учётом однородных краевых условий получим

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2 dx dy - \int_0^p \int_0^q a_1(x) u_x^2 dx dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2 dx dy + \int_0^p \int_0^q \left(a_3(x) + \frac{1}{2} a_1''(x) - \frac{1}{2} a_2'(x) \right) u^2 dx dy = 0,$$

откуда следует, что $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если выполняется неравенство

$$C < \frac{\mu_1^3 (1 - e^{-2\mu_1 p})^2}{p(2\mu_1^2 + 3\mu_1(1 + e^{-4\mu_1 p}) + 3)},$$

в котором $\mu_1 = \sqrt{\pi/(2q)}$, $C = \max_{\xi \in [0, p]} \{|a_i(\xi)|, |a_i'(\xi)|, |a_i''(\xi)|\}$, $i = 1, 2, 3$, то решение задачи (1)–(4) существует.

Доказательство. Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

где функция $v(x, y)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} L[v] &\equiv v_{xxxx} + a_1(x)v_{xx} + a_2(x)v_x + a_3(x)v - v_{yy} = 0, \\ v(x, 0) &= v(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ v(0, y) &= \psi_1(y), \quad v(p, y) = \psi_2(y), \\ v_{xx}(0, y) &= \psi_3(y), \quad v_{xx}(p, y) = \psi_4(y), \quad 0 \leq y \leq q, \end{aligned} \quad (6)$$

а функция $w(x, y)$ – решением задачи

$$\begin{aligned} L[w] &\equiv w_{xxxx} + a_1(x)w_{xx} + a_2(x)w_x + a_3(x)w - w_{yy} = f(x, y), \\ w(x, 0) &= w(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ w(0, y) &= w(p, y) = w_{xx}(0, y) = w_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение задачи (6) ищем в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (8)$$

После подстановки (8) в (6) и разделения переменных получим относительно функции $Y(y)$ следующую спектральную задачу:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(q) = 0. \quad (9)$$

Известно [16, с. 200], что нетривиальное решение задачи (9) существует при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

которым соответствуют собственные функции

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставив (8) в (6), получим относительно функции $X(x)$ задачу

$$\begin{aligned} X^{(4)} + a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X + \lambda_n X &= 0, \\ X(0) &= \psi_{1n}, \quad X(p) = \psi_{2n}, \quad X''(0) = \psi_{3n}, \quad X''(p) = \psi_{4n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\psi_{in} = (2/q) \int_0^q \psi_i(\eta) \sin(\pi n \eta / q) d\eta$, $i = \overline{1, 4}$.

Введём обозначение

$$V(x) = X(x) - \rho(x), \quad (11)$$

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + \left(\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} - \frac{2\psi_{3n} + \psi_{4n}}{6}p\right)x + \frac{\psi_{3n}}{2}x^2 + \frac{\psi_{4n} - \psi_{3n}}{6p}x^3, \quad (12)$$

с помощью которого задача (10) принимает вид

$$\begin{aligned} V_n^{(4)} + \lambda_n V_n &= \lambda_n g_n(x) - a_1(x)V_n'' - a_2(x)V_n' - a_3(x)V_n, \\ V_n(0) &= V_n(p) = V_n''(0) = V_n''(p) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь

$$g_n(x) = \left(\frac{x-p}{p} + \frac{a_2(x) - pa_3(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{1n} - \left(\frac{x}{p} + \frac{a_2(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{2n} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2xp^2 - 3px^2 + x^3}{6p} - \frac{3px^2a_3(x) + x^3a_3}{6\lambda_np} \right) \psi_{3n} + \\
& + \frac{6xa_1(x) + 2p^2a_2(x) - 6pxa_2(x) - 6pa_1(x) + 3x^2a_2(x) + 2p^2xa_3(x)}{6\lambda_np} \psi_{3n} + \\
& + \left(\frac{xp^2 - x^3}{6p} + \frac{p^2a_2(x) - 6xa_1(x) - 3x^2a_2(x) + xp^2a_3(x) - x^3a_3(x)}{6\lambda_np} \right) \psi_{4n}.
\end{aligned}$$

Согласно теореме Гильберта [17, с. 224] решение задачи (13) определяется по формуле

$$V_n(x) = \lambda_n \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x, \xi) (a_1(\xi) V_n''(\xi) + a_2(\xi) V_n'(\xi) + a_3(\xi) V_n(\xi)) d\xi, \quad (14)$$

где функция Грина

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_n^1(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_n^2(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
G_n^1(x, \xi) &= \frac{1}{2\mu_n^3\Delta} \{ [\cos(\mu_np) \operatorname{sh}(\mu_np)(\cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p))) + \\
& + \sin(\mu_np) \operatorname{ch}(\mu_np)(\cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)) + \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)))] \cos(\mu_nx) \operatorname{sh}(\mu_nx) + \\
& + [\sin(\mu_np) \operatorname{ch}(\mu_np)(\cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p))) - \\
& - \cos(\mu_np) \operatorname{sh}(\mu_np)(\cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)))] \sin(\mu_nx) \operatorname{ch}(\mu_nx) \}, \\
G_n^2(x, \xi) &= \frac{1}{2\mu_n^3\Delta} \{ [\cos(\mu_np) \operatorname{sh}(\mu_np)(\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) - \sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi)) + \\
& + \sin(\mu_np) \operatorname{ch}(\mu_np)(\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) + \sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi))] \cos(\mu_n(x-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(x-p)) + \\
& + [\sin(\mu_np) \operatorname{ch}(\mu_np)(\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) - \sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi)) - \\
& - \cos(\mu_np) \operatorname{sh}(\mu_np)(\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) + \sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi))] \sin(\mu_n(x-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(x-p)) \}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\pi n}{2q}}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), & a_{12} &= \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)), & a_{13} &= -\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi), \\
a_{14} &= -\sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi), & a_{21} &= \cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), \\
a_{22} &= \cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)) + \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), \\
a_{23} &= \sin(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) - \cos(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi), & a_{24} &= -\cos(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi) - \sin(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi), \\
a_{31} &= -\sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)), & a_{32} &= \cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), & a_{33} &= \sin(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi), \\
a_{34} &= -\cos(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi), & a_{41} &= -\cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), \\
a_{42} &= \cos(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi-p)) - \sin(\mu_n(\xi-p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi-p)), \\
a_{43} &= \cos(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi) + \sin(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi), & a_{44} &= \sin(\mu_n\xi) \operatorname{sh}(\mu_n\xi) - \cos(\mu_n\xi) \operatorname{ch}(\mu_n\xi).
\end{aligned}$$

Вычислив определитель Δ , имеем

$$\Delta = -e^{2\mu_np} \bar{\Delta},$$

где $\bar{\Delta}$ определяется по формуле

$$\bar{\Delta} = \frac{1 + e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p)e^{-2\mu_n p}$$

и для него справедлива оценка снизу

$$|\bar{\Delta}| \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_1 p})^2 = \delta > 0.$$

Проинтегрировав по частям равенство (14), получим

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \lambda_n \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^p (-G_{n\xi\xi} a_1(\xi) + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi))G_n) V_n d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём обозначения

$$V_{0n}(x) = \lambda_n \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x, \xi) = -a_1(\xi)G_{n\xi\xi} + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi))G_n,$$

в результате чего равенство (15) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi \quad (16)$$

– интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Запишем решение (16) с помощью резольвенты

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi, \quad (17)$$

где

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_{1n}(x, \xi) + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x, \xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_{1n}(x, s) \bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 2, 3, \dots, \quad \bar{G}_{1n}(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi).$$

Оценим функции $G_n(x, \xi)$, $G_{n\xi}(x, \xi)$ и $G_{n\xi\xi}(x, \xi)$:

$$|G_n(x, \xi)| \leq \frac{K}{\mu_n^3}, \quad |G_{n\xi}(x, \xi)| \leq \frac{K}{\mu_n^2}(1 + e^{-4\mu_n p}), \quad |G_{n\xi\xi}(x, \xi)| \leq \frac{2K}{\mu_n},$$

здесь $K = 1/(2\delta) = (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2}$. Тогда для функции $\bar{G}_n(x, \xi)$ справедлива оценка

$$|\bar{G}_n(x, \xi)| \leq CK \left(\frac{2}{\mu_n} + \frac{3}{\mu_n^2}(1 + e^{-4\mu_n p}) + \frac{3}{\mu_n^3} \right).$$

Оценим теперь решение (17). Имеем неравенство

$$|R_n(x, \xi)| \leq |\bar{G}_{1n}(x, \xi)| + |\bar{G}_{2n}(x, \xi)| + \dots + |\bar{G}_{mn}(x, \xi)| + \dots,$$

для правой части которого составим мажорирующий ряд. Введём обозначение

$$J = CK \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2} (1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3} \right)$$

и найдём

$$|\bar{G}_{1n}(x, \xi)| \leq |\bar{G}_n(x, \xi)| \leq J,$$

$$|\bar{G}_{mn}(x, \xi)| \leq \int_0^p |\bar{G}_{1n}(x, s)| |\bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi)| ds \leq J^m p^{m-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m. \quad (18)$$

Условие теоремы 2 можно записать в виде

$$CKp \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2} (1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3} \right) < 1,$$

откуда следует неравенство $Jp < 1$, ввиду которого ряд (18) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится и её оценка имеет вид

$$|R_n(x, \xi)| \leq \frac{J}{1 - Jp}. \quad (19)$$

В каждом из интервалов $0 \leq \xi < x$ и $x < \xi \leq p$ функция $G_n(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от переменной ξ , является решением уравнения

$$G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi) + \lambda_n G_n(x, \xi) = 0.$$

Подставив $G_n(x, \xi) = -G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi)/\lambda_n$ в $V_{0n}(x)$, имеем

$$V_{0n}(x) = - \int_0^x G_{n\xi\xi\xi}^2(x, \xi) g_n(\xi) d\xi - \int_x^p G_{n\xi\xi\xi}^1(x, \xi) g_n(\xi) d\xi.$$

Учитывая равенство $G_{n\xi\xi\xi}^1(x, x) - G_{n\xi\xi\xi}^2(x, x) = 1$, интегрируем по частям $V_{0n}(x)$ один раз и находим

$$V_{0n}(x) = g_n(x) + g_n(0) G_{n\xi\xi\xi}^2(x, 0) - g_n(p) G_{n\xi\xi\xi}^1(x, p) + \int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi) g'_n(\xi) d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям ψ_{in} три раза:

$$\psi_{in} = -\frac{q^3}{\pi^3 n^3} \frac{2}{q} \int_0^q \psi_i'''(\eta) \cos\left(\frac{\pi n}{q} \eta\right) d\eta = -\left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{\Psi_{in}}{n^3}, \quad i = \overline{1, 4},$$

где $\Psi_{in} = (2/q) \int_0^q \psi_i'''(\eta) \cos(\pi n \eta / q) d\eta$, $i = \overline{1, 4}$. Отсюда получим следующие неравенства:

$$|\psi_{in}| \leq \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

В результате имеем оценку

$$|V_{0n}(x)| \leq \frac{M_1}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|), \quad (20)$$

здесь $M_1 > 0$ – известное число.

Согласно (19), (20) запишем

$$|V_n(x)| \leq \frac{1}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) \frac{M_1}{1 - Jp}. \quad (21)$$

В силу формул (8), (11) и (12) решение задачи (6) имеет вид

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) \sin\left(\frac{\pi n}{q} y\right).$$

Исследуем полученный ряд на сходимость. С учётом (21) и неравенства

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{M_2}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|),$$

где $M_2 > 0$ – известное число, получим оценку

$$|v(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) \left(\frac{M_1}{1 - Jp} + M_2 \right) < \infty.$$

Теперь покажем равномерную сходимость $v_{xxxx}(x, y)$. После некоторых вычислений найдём оценку

$$|v_{xxxx}(x, y)| \leq M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|),$$

где $M_3 > 0$ – известное число.

Для того чтобы показать сходимость правой части этого неравенства, используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$\begin{aligned} |v_{xxxx}(x, y)| &\leq M_3 \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{4n}|^2} \right) \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \\ &\leq M_3 (\|\psi_1'''(y)\| + \|\psi_2'''(y)\| + \|\psi_3'''(y)\| + \|\psi_4'''(y)\|) \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty, \end{aligned}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \|\psi_i'''(y)\|_{L_2(0, q)}^2, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая неравенство

$$|v_{yy}(x, y)| \leq |v_{xxxx}(x, y)| + |a_1(x)| |v_{xx}(x, y)| + |a_2(x)| |v_x(x, y)| + |a_3(x)| |v(x, y)|,$$

заключаем, что и v_{yy} тоже сходится.

Теперь решение задачи (7) ищем в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) \sin\left(\frac{\pi n}{q} y\right).$$

Разложим функцию $f(x, y)$ в ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin\left(\frac{\pi n}{q} y\right),$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$f_n(x) = \frac{2}{q} \int_0^q f(x, \eta) \sin\left(\frac{\pi n}{q} \eta\right) d\eta.$$

В результате получим задачу

$$\begin{aligned} \chi_n^4(x) + \lambda_n \chi_n(x) &= f_n(x) - a_1(x) \chi_n''(x) - a_2(x) \chi_n'(x) - a_3(x) \chi_n(x), \\ \chi_n(0) &= \chi_n(p) = \chi_n''(0) = \chi_n''(p) = 0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\chi_n(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x, \xi) (a_1(\xi) \chi_n''(\xi) + a_2(\xi) \chi_n'(\xi) + a_3(\xi) \chi_n(\xi)) d\xi.$$

Проинтегрировав по частям второй интеграл, находим

$$\begin{aligned} \chi_n(x) &= \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^p (-G_{n\xi\xi} a_1(\xi) + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi)) G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi)) G_n) \chi_n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \chi_{0n}(x) &= \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi, \\ \bar{G}_n(x, \xi) &= -a_1(\xi) G_{n\xi\xi} + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi)) G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi)) G_n, \end{aligned}$$

в результате получим

$$\chi_n(x) = \chi_{0n}(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x, \xi) \chi_n(\xi) d\xi$$

– интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого определяется по формуле

$$\chi_n(x) = \chi_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \chi_{0n}(\xi) d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{q}{\pi n} \Phi_n(x),$$

где $\Phi_n(x) = (2/q) \int_0^q f_\eta(x, \eta) \cos(\pi n \eta / q) d\eta$.

Учитывая

$$G_n(x, \xi) = -\frac{G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi)}{\lambda_n},$$

находим выражение

$$\chi_{0n}(x) = -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi) f_n(\xi) d\xi,$$

проинтегрировав которое по частям один раз, с учётом $G_{n\xi\xi\xi}^1(x, x) - G_{n\xi\xi\xi}^2(x, x) = 1$ получим

$$\chi_{0n}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \left(f_n(x) + f_n(0) G_{n\xi\xi\xi}^2(x, 0) - f_n(p) G_{n\xi\xi\xi}^1(x, p) + \int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi) f_n'(\xi) d\xi \right).$$

В результате имеем неравенство

$$|\chi_{0n}(x)| \leq \frac{M_4}{n^3} (|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|), \quad (22)$$

где $M_4 > 0$ – известное число. В силу (19) и (22) находим оценку

$$|\chi_n(x)| \leq \frac{1}{n^3} (|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|) \frac{M_4}{1 - Jp}.$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$|w(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|) \frac{M_4}{1 - Jp} < \infty,$$

откуда следует, что решение задачи (7) сходится.

Покажем равномерную сходимость $w_{xxxx}(x, y)$. После некоторых вычислений находим

$$|w_{xxxx}(x, y)| \leq M_5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|),$$

где $M_5 > 0$ – известное число.

Для правой части этого неравенства используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$\begin{aligned} |w_{xxxx}(x, y)| &\leq M_5 \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(x)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n'(x)|^2} \right) \times \\ &\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq M_5 (\|f_y(x, y)\| + \|f_y(0, y)\| + \|f_y(p, y)\| + \|f_{xy}(x, y)\|) \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty, \end{aligned}$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(x)|^2 \leq \|f_y(x, y)\|_{L_2(0, q)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 \leq \|f_y(0, y)\|_{L_2(0, q)}^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(p)|^2 \leq \|f_y(p, y)\|_{L_2(0, q)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi'_n(x)|^2 \leq \|f_{xy}(x, y)\|_{L_2(0, q)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая оценку

$$|w_{yy}(x, y)| \leq |w_{xxx}(x, y)| + |a_1(x)||w_{xx}(x, y)| + |a_2(x)||w_x(x, y)| + |a_3(x)||w(x, y)| + |f(x, y)|,$$

заключаем, что и w_{yy} тоже сходится. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел–Балкли // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179.
4. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. V. 43. P. 309–313.
5. Джурсаев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент, 2000.
6. Джурсаев Т.Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 1. С. 40–51.
7. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlin. Anal.: Modeling and Control. 2011. V. 16. № 3. P. 255–269.
8. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64. № 1. Р. 3–13.
9. Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю. Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66. № 10. Р. 1318–1331.
10. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 9. Р. 1274–1281.
11. Apakov Yu.P. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 9. Р. 1754–1761.
12. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2013. Вып. 1. С. 3–10.
13. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюлл. Ин-та математики. 2019. № 6. С. 23–29.
15. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary value problems for a fourth order partial equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 3. P. 632–640.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.
17. Hilbert D. Nachrichten von der Konigl Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Gottingen, 1904.

Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 07.09.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.