

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЁННОГО
ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Д. М. Поляков

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора четвёртого порядка с вещественными периодическими коэффициентами и с краевыми условиями типа Неймана. Для этого оператора получена асимптотика собственных значений и формула регуляризованного следа.

DOI: 10.31857/S0374064123020036, EDN: PTUFRY

В гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$ рассматривается спектральная задача

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \quad (1)$$

для самосопряжённого оператора четвёртого порядка $H = H(p, q)$ с областью определения

$$D(H) = \{y \in L^2(0, 1) : y', y'', y''' + py' \in W_1^1(0, 1), \quad y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0, 1), \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\},$$

где коэффициенты p и q являются вещественными периодическими (периода единица) функциями из пространства $L^1(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – факторпространство.

Цель настоящей работы – получить асимптотику собственных значений и формулу следа для дифференциального оператора H .

С точки зрения законов механики оператор H описывает колебания балки с жёстко закреплёнными концами. Кроме того, уравнения четвёртого порядка появляются как модельные уравнения для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике или моделях висячих мостов (см. [1, 2] и используемую там литературу).

В последнее время спектральные свойства оператора H достаточно активно изучаются. В работе [3] получена асимптотика собственных значений, а также решена обратная спектральная задача для оператора H с гладкими коэффициентами. В статье [4] для оператора H были описаны изоспектральные потенциалы. Явная формула для характеристической функции была установлена в [5]. В работе [6] получена асимптотика собственных функций для оператора H , а в статье [7] – оценки отклонений спектральных проекторов и оценки равносходимости спектральных разложений для оператора H с функциями $p, q \in L^2(0, 1)$. Наконец, положительность оператора H с $p = 0$ и структура спектра исследовались в [8].

Перейдём к описанию свойств оператора H . Спектр $\sigma(H)$ оператора H является чисто дискретным (см. [9, гл. 1, § 2, 4]). Введём в рассмотрение фундаментальные решения φ_j , $j = \overline{1, 4}$, уравнения

$$y^{(4)} + (py')' + qy = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

При этом фундаментальные решения удовлетворяют условиям

$$\varphi_j^{(k-1)}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (\varphi_j''' + p\varphi_j')(0, \lambda) = \delta_{j4},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Спектр $\sigma(H)$ состоит из вещественных собственных значений, и справедливо соотношение $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : D(\lambda) = 0\}$, где D – целая функция вида

$$D(\lambda) = -\det \begin{pmatrix} \varphi_3(1, \lambda) & \varphi_4(1, \lambda) \\ \varphi_3'(1, \lambda) & \varphi_4'(1, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Спектр оператора H – вещественный, полуограниченный снизу и состоит из собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}$, которые будут занумерованы (с учётом кратности) следующим образом: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. В невозмущённом случае ($p = q = 0$) все собственные значения λ_n^0 допускают следующую асимптотику (см. [3, следствие 1]):

$$\lambda_n^0 = (\pi/2 + \pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что все собственные значения λ_n^0 являются простыми (см. [6, теорема 2.1]).

Перейдём к описанию основных результатов настоящей статьи. Первая теорема будет посвящена доказательству асимптотики собственных значений рассматриваемого оператора при высоких энергиях. Указанные асимптотики будут приведены в терминах коэффициентов Фурье функции p в случае, если $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Кроме того, асимптотика собственных значений будет записана с большей точностью (в предположении более гладких коэффициентов).

Введём коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$f_0 = \int_0^1 f(x) dx, \quad \hat{f}_n = \int_0^1 f(x) e^{-i\pi(2n+1)x} dx, \quad \hat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x) \sin(\pi(2n+1)x) dx.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$ и число $n \in \mathbb{N}$ выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения λ_n являются простыми и удовлетворяют асимптотике

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \hat{p}_{sn} + \varkappa_{1,n}) + \mathcal{O}(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где

$$\varkappa_{1,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} (p(s) + p(1-s)) (e^{-\pi(n+1/2)s} - 2 \sin \pi(n+1/2) - 2 \cos \pi(n+1/2)) ds.$$

В случае, если $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \hat{p}_{sn}) + 3 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 - \hat{q}_{sn} - \\ & - \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\varkappa_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_{2,n} = & \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} \left(\frac{1}{2} (p'''(s) - p'''(1-s)) \left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8} \right) + \right. \\ & \left. + (q'(1-s) - q'(s)) \left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4} \right) \right) ds. \end{aligned}$$

В статьях [3, следствие 1] и [6, теорема 3.1] была получена асимптотика собственных значений оператора H для коэффициентов $p \in C^3[0, 1]$ и $q \in C^1[0, 1]$. Однако указанная асимптотика содержала только главное слагаемое и остаток. В теореме 1 установлена точная асимптотика собственных значений в наиболее общем случае.

Используя теорему 1, получим формулу следа для оператора H . Рассмотрим оператор $H_t(p_t, q_t)$ вида (1) со сдвигом в коэффициентах, т.е. $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\lambda_n(t)$, $t \in \mathbb{T}$, обозначим собственные значения оператора H_t .

Теорема 2. Пусть $p''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует такое число $N = N(p, q) \in \mathbb{N}$, что каждая из функций $\sum_{n=1}^N \lambda_n(t)$ и $\lambda_n(t)$, $n > N$, принадлежит пространству $C^2(\mathbb{T})$. Кроме того, имеет место следующая формула следа:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n(t) - \lambda_n(0) - 3(p(t) - p(0)) \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) + \frac{p''(t) - p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{2(q(t) - q(0))}{\pi(2n+1)} \right) = \\ = \frac{p''(t) - p''(0)}{2} + q(0) - q(t) + \frac{p^2(t) - p^2(0)}{4}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\mathbb{T}$.

Асимптотика (4) показывает, что если $p''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$, то ряд (5) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$. Доказательство теоремы 2 основано на асимптотическом анализе разности резольвент возмущённого и невозмущённого операторов H и H_0 .

Теперь кратко опишем схему доказательства теоремы 1. Она будет основана на матричном варианте метода Биркгофа, развиваемого в работах [10, 11]. Пусть $z = \lambda^{1/4}$, $z \in \mathcal{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathcal{Z}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \pi/4)\}$. Введём в рассмотрение параметры $\omega_1 = -\omega_4 = i$, $\omega_2 = -\omega_3 = 1$. Тогда имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}(i\omega_1 z) \leq \operatorname{Re}(i\omega_2 z) \leq \operatorname{Re}(i\omega_3 z) \leq \operatorname{Re}(i\omega_4 z), \quad z \in \mathcal{Z}_+. \quad (6)$$

Определим фундаментальную матрицу $A(x, z)$, $x \in [0, 1]$, $z \in \mathcal{Z}_+$, уравнения (2) следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi'_1 & \phi'_2 & \phi'_3 & \phi'_4 \\ \phi''_1 & \phi''_2 & \phi''_3 & \phi''_4 \\ \phi'''_1 + p\phi'_1 & \phi'''_2 + p\phi'_2 & \phi'''_3 + p\phi'_3 & \phi'''_4 + p\phi'_4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где ϕ_j , $j = \overline{1, 4}$, – фундаментальные решения уравнения (2), удовлетворяющие асимптотике

$$\phi_j(x, z) = e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})), \quad \phi'_j(x, z) = iz\omega_j e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \quad (8)$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Существование таких решений установлено в [9, гл. 2]. Матрично-значная функция A удовлетворяет уравнению

$$A' = \mathcal{P}A, \quad \text{где} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 1 \\ \lambda - q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Следовательно, функция A – решение уравнения (9), для которого выполнена асимптотика

$$A(x, z) = \Omega(z)(\mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1}))e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0, 1], \quad (10)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, где $\mathbb{I}_4$ – единичная матрица размерности 4×4 и

$$\mathcal{T} = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \operatorname{diag}(i, 1, -1, -i), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & iz & -iz & z \\ z^2 & -z^2 & -z^2 & z^2 \\ -z^3 & -iz^3 & iz^3 & z^3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Основная идея исследования состоит в асимптотическом анализе фундаментальной матрицы A для достаточно больших $|z|$. Такой анализ является стандартным при изучении спектральных свойств оператора Шрёдингера. Однако в случае оператора четвёртого порядка появляются дополнительные сложности, связанные с тем, что фундаментальная матрица

содержит как экспоненциально растущие элементы, так и экспоненциально убывающие элементы при $|z| \rightarrow \infty$ в любом направлении.

Перейдём к изучению асимптотического поведения фундаментальной матрицы. Пусть $z \in \mathcal{Z}_+$ и A – матрично-значное решение уравнения (9) вида (7). Введём в рассмотрение матрично-значную функцию Y такую, что выполняется равенство

$$A(x, z) = \Omega(z)Y(x, z), \quad x \in [0, 1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \quad (12)$$

Подставив это выражение в (9) и используя тождество $\Omega^{-1}\mathcal{P}\Omega = iz\mathcal{T} + P/z$, получим, что Y удовлетворяет уравнению $Y' - iz\mathcal{T}Y = PY/z$, где P – некоторая матрица, явный вид которой легко записать. Несложно найти обратный оператор к оператору в левой части последнего уравнения (подробнее см. в [11]). Рассмотрим матрично-значную функцию X такую, что

$$Y(x, z) = X(x, z)e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0, 1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \quad (13)$$

Тогда X – решение дифференциального уравнения

$$X' + iz(X\mathcal{T} - \mathcal{T}X) = PX/z,$$

которое (как и эквивалентное ему уравнение (9)) имеет много решений. Выберем решение X , удовлетворяющее условиям

$$X_{jk}(0, z) = 0, \quad j < k, \quad X_{jk}(1, z) = \delta_{jk}, \quad j \geq k.$$

Выбор X приводит к необходимому решению A уравнения (9) вида (7).

Пусть $|z|$ – достаточно большое число. В работе [11] было показано, что X – единственное решение интегрального уравнения

$$X = \mathbb{I}_4 + \frac{KX}{z}, \quad (14)$$

где

$$(KX)_{lj}(x, z) = \int_0^1 K_{lj}(x, s, z)(PX)_{lj}(s, z) ds, \quad l, j = \overline{1, 4},$$

$$K_{lj}(x, s, z) = \begin{cases} e^{iz(x-s)(\omega_l - \omega_j)}\chi(x-s), & l < j, \\ -e^{iz(x-s)(\omega_l - \omega_j)}\chi(s-x), & l \geq j, \end{cases} \quad \chi(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Оценки (6) показывают, что для ядра интегрального оператора K выполнено неравенство $|K_{lj}(x, s, z)| \leq 1$ для всех $l, j = \overline{1, 4}$ и $(x, s, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{Z}_+$. Тогда, применив метод простых итераций к интегральному уравнению (14), получим асимптотику

$$X(x, z) = \mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1})$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, равномерно по $x \in [0, 1]$. Проведённые выше рассуждения показывают, что Y допускает представление (13), где X удовлетворяет полученной асимптотике. Подставив (13) в (12), имеем равенство (10).

Таким образом, установлена теорема о факторизации для матрично-значного решения уравнения (9). Эта теорема играет ключевую роль для доказательства асимптотики собственных значений оператора H .

Теорема 3. Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует матрично-значное решение A уравнения (9) такое, что каждая функция $A(x, \cdot)$, $x \in [0, 1]$, является аналитической в $\mathcal{Z}_+$ для достаточно большого $|z|$ и удовлетворяет равенству

$$A(x, z) = \Omega(z)X(x, z)e^{izx\mathcal{T}}, \quad (15)$$

где X – решение интегрального уравнения (14), $\mathcal{T}$ и Ω имеют вид (11).

Согласно формуле (15) фундаментальная матрица A представима в виде произведения матрицы Ω простой структуры, ограниченной матрицы и диагональной матрицы, причём диагональная матрица содержит все экспоненциально растущие слагаемые. Таким образом, становится удобно анализировать свойства фундаментальной матрицы A .

Основываясь на формуле (15) факторизации фундаментальной матрицы A , установим асимптотику характеристической функции D . Напомним, что её нули являются спектром оператора H . Пусть $(x, z) \in [0, 1] \times \mathcal{Z}_+$ и значение $|z|$ является достаточно большим. Несложно показать, что справедлива формула

$$D(\lambda) = \frac{\det \phi(z)}{\det A(0, z)}, \quad (16)$$

где

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(0, z) & \phi_2(0, z) & \phi_3(0, z) & \phi_4(0, z) \\ \phi'_1(0, z) & \phi'_2(0, z) & \phi'_3(0, z) & \phi'_4(0, z) \\ \phi_1(1, z) & \phi_2(1, z) & \phi_3(1, z) & \phi_4(1, z) \\ \phi'_1(1, z) & \phi'_2(1, z) & \phi'_3(1, z) & \phi'_4(1, z) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Из асимптотики (10) и формулы (11) непосредственно следует, что

$$\det A(0, z) = -16iz^6(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \quad (18)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$. Полученная асимптотика и равенство (16) показывают, что большие положительные нули функции D совпадают с нулями $\det \phi(z)$. Следовательно, возникает необходимость преобразовать определитель матрицы ϕ вида (17). Раскрыв определитель, получим следующую асимптотику:

$$\det \phi(z) = \xi_1(z)\xi_2(z) + \xi_3(z)\xi_4(z) + \mathcal{O}(z^4) \quad (19)$$

в секторе $\mathcal{Z}_+$, где

$$\begin{aligned} \xi_1(z) &= \det \begin{pmatrix} \phi_3(1, z) & \phi_4(1, z) \\ \phi'_3(1, z) & \phi'_4(1, z) \end{pmatrix}, & \xi_2(z) &= \det \begin{pmatrix} \phi_1(0, z) & \phi'_2(0, z) \\ \phi'_1(0, z) & \phi'_2(0, z) \end{pmatrix}, \\ \xi_3(z) &= \det \begin{pmatrix} \phi_2(1, z) & \phi_4(1, z) \\ \phi'_2(1, z) & \phi'_4(1, z) \end{pmatrix}, & \xi_4(z) &= \det \begin{pmatrix} \phi_3(0, z) & \phi_1(0, z) \\ \phi'_3(0, z) & \phi'_1(0, z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставив асимптотики (18) и (19) в (16), имеем

$$D(\lambda) = \frac{i}{16z^6}(\xi_1(z)\xi_2(z) + \xi_3(z)\xi_4(z) + \mathcal{O}(z^4)) \quad (20)$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Последнее соотношение показывает, что асимптотический анализ нулей определителя $\det \phi(z)$ размерности 4×4 сводится к анализу нулей суммы произведений определителей размерности 2×2 .

Отметим, что асимптотика (8) является достаточно грубой и не даёт точной асимптотики нулей функции D . Однако, применяя теорему Руше, можно вычислить количество нулей в круге большого радиуса, а также их локализацию. Взяв следующие слагаемые итерационного ряда в качестве приближения решения интегрального уравнения (14), мы улучшаем асимптотику фундаментальной матрицы A , а значит, и асимптотику ϕ_j , $j = \overline{1, 4}$. Подставляя эту более точную асимптотику ϕ_j в (20), получаем спектральные асимптотики (3) и (4) нулей функции D .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных – кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta C.P.* Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems // *Appl. Anal.* 1990. V. 36. P. 157–169.
2. *Peletier L.A., Rodrigues J.A.* Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation // *J. Differ. Equat.* 2004. V. 203. P. 185–215.
3. *McLaughlin J.R.* An inverse eigenvalue problem of order four – an infinite case // *SIAM J. Math. Anal.* 1978. V. 9. № 3. P. 395–413.
4. *Caudill Jr L.F., Perry P.A., Schueller A.W.* Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators // *SIAM J. Math. Anal.* 1998. V. 29. № 4. P. 935–966.
5. *Boumenir A.* Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator // *J. Math. Anal. Appl.* 2003. V. 278. P. 542–550.
6. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения.* 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
7. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ несамосопряжённого оператора четвёртого порядка с негладкими коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 2015. Т. 56. № 1. С. 165–184.
8. *Ma R., Wang H., Elsanosi M.* Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications // *Math. Nachr.* 2013. V. 286. P. 1805–1819.
9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
10. *Баданин А.В., Коротяев Е.Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвёртого порядка // *Алгебра и анализ.* 2010. Т. 22. № 5. С. 1–48.
11. *Badanin A., Korotyaev E.L.* Third-order operators with three-point conditions associated with Boussinesq's equation // *Appl. Anal.* 2021. V. 100. P. 527–560.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.