

УДК 519.837.2

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. Е. М. Мухсинов

В банаховом пространстве исследуется разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина для одной дифференциальной игры, динамика которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа.

DOI: 10.31857/S0374064123010132, EDN: ODQUSP

В банаховом пространстве  $X$  рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\frac{d}{dt} \left( x(t) - \sum_{i=1}^n B_i x(t - h_i) \right) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - h_i) + f(u(t), v(t), t) \quad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством  $M \subset X$ , где заканчивается игра.

В игре (1)  $t \geq 0$ ,  $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n = h$ ,  $x(t) \in X$ ,  $U([0, \infty), Y)$  – множество всех измеримых отображений, действующих из множества  $[0, \infty)$  в банахово пространство  $Y$ , причём на  $[0, \infty)$  рассматривается мера Лебега,  $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$  – управления преследования,  $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$  – управления убегания,  $Z$  – банахово пространство,  $A_i : X \rightarrow X$  – линейные ограниченные операторы, а  $A : D \rightarrow X$  – линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в  $X$  область определения  $D$ , порождающий сильно непрерывную полугруппу  $S(t)$  [1, с. 316]. В дальнейшем предполагаем, что линейные ограниченные операторы  $B_i : X \rightarrow X$  такие, что линейные операторы  $AB_i$  ограничены [2, с. 259]. Используя полугруппу  $S(t)$ , можно построить фундаментальное решение  $\Phi(t)$  [2, с. 267], для которого справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \left( \Phi(t) - \sum_{i=1}^n B_i \Phi(t - h_i) \right) = A\Phi(t) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi(t - h_i),$$

$\Phi(0) = I$  – единичный оператор, а  $\Phi(t) = 0$  при  $t < 0$ .

На основании работы [2], следуя А. Фридману [3, с. 95] и Ю.С. Осипову [4, с. 1314], дадим следующее

**Определение.** Если отображение  $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$  локально интегрируемо, то *решением задачи Коши* для уравнения (1) с начальным положением

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \quad (2)$$

и соответствующими управлениями  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  будем называть отображение

$$x(t) = \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $\varphi(\cdot)$  – абсолютно непрерывная функция и интеграл понимается в смысле Бохнера [1, с. 93].

В дальнейшем предполагаем, что отображение  $f : Y \times Z \times [0, \infty) \rightarrow X$  измеримо по  $t \in [0, \infty)$  и непрерывно по  $(u, v) \in Y \times Z$ , и существует локально суммируемая функция  $\xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  такая, что при любых  $u \in Y, v \in Z, t \in [0, \infty)$  имеет место неравенство  $\|f(u, v, t)\| \leq \xi(t)$ . Это предположение обеспечивает локальную интегрируемость отображения  $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$  по Бохнеру.

Для игры (1) исследуем разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина [5, с. 308; 6, с. 233; 7, с. 130].

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1** (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). Пусть отображения  $P : [0, \infty) \rightarrow 2^Y$  и  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow X$  измеримы, а отображение  $g : Y \times Z \times [0, \infty) \rightarrow X$  непрерывно по  $(u, v) \in Y \times Z$  и измеримо по  $t \in [0, \infty)$ . Если для любых  $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$  и почти всех  $t \in [0, \infty)$  имеет место включение  $\varphi(t) \in g(P(t), v(t), t)$ , то отображение  $t \rightarrow \{u \in P(t) : \varphi(t) = g(u, v(t), t)\}$  замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, т.е. существует измеримое отображение  $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Y$  такое, что  $u(t) \in P(t)$  и  $\varphi(t) = g(u(t), v(t), t)$  для почти всех  $t \in [0, \infty)$ .

**Доказательство** леммы 1 следует из работ [8, с. 56; 9, с. 86].

**Лемма 2.** Пусть  $E$  – отдельное линейное топологическое пространство, отображение  $\varphi : [a, b] \rightarrow E$  непрерывно, а отображение  $P : [a, b] \rightarrow 2^E$  секвенциально замкнуто. Тогда множество  $\{t \in [a, b] : \varphi(t) \in P(t)\}$  замкнуто.

**Доказательство.** Если  $t_n \in [a, b], t_n \rightarrow t, \varphi(t_n) \in P(t_n)$ , то в силу непрерывности  $\varphi$  имеем  $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t)$ . Из секвенциальной замкнутости отображения  $P$  следует, что  $\varphi(t) \in P(t)$ , а это означает, что множество  $\{t \in [a, b] : \varphi(t) \in P(t)\}$  замкнуто. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть отображение  $P : [a, b] \rightarrow 2^E$  секвенциально замкнуто, где  $E$  – отдельное линейное топологическое пространство, полученное в результате надления банахова пространства  $X$  ослабленной топологией  $\sigma(X, X^*)$  [10, с. 239]. Если  $M$  – компактное подмножество  $E$  относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$ , то отображение  $t \rightarrow M + P(t)$ , действующее из  $[a, b]$  в  $2^E$ , секвенциально замкнуто.

Лемма 3 доказана в статье [11, с. 81].

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть выполняются следующие условия:

- 1)  $X, Y$  – сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество  $M$  выпукло и компактно относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$ ;
- 2) начальное положение  $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$ , абсолютно непрерывно, и при некотором  $T \geq 0$  имеет место включение

$$\left[ \Phi(T) - \sum_{i=1}^n \Phi(T - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau \in M - W(T), \tag{4}$$

где  $W(t) = \int_0^t \bigcap_{w \in Z} \Phi(t - \tau) f(Y, v, \tau) d\tau$ ;

- 3) отображение  $t \rightarrow W(t), t \in [0, T]$ , замкнуто относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$  и при каждом  $t$  непусто и выпукло;
- 4) существует отображение  $w : Y \rightarrow Z$  такое, что при всех  $u \in Y, t \in [0, T], 0 \leq s \leq t$ , выполняется включение

$$\Phi(t - s) f(u, w(u), s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - s) f(Y, v, s),$$

и для каждого  $u(\cdot)$  суперпозиция  $w(u(\cdot))$  измерима.

Тогда из начального положения  $\varphi$  возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_0 = \min\{T \geq 0 : \text{для которых выполняется (4)}\}.$$

**Доказательство.** В силу условия 3) отображение  $t \rightarrow W(t)$  замкнуто относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$ . Следовательно, оно секвенциально замкнуто относительно этой топологии. С другой стороны, в силу условия 1) множество  $M$  компактно относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$ . Поэтому согласно лемме 3 отображение  $t \rightarrow M - W(t)$  секвенциально замкнуто относительно топологии  $\sigma(X, X^*)$ . Тогда в силу непрерывности отображения

$$t \rightarrow \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau,$$

которое следует из [2, с. 268], в силу условия 2) и доказанной леммы 2 множество  $\{T \geq 0 : \text{для которых выполняется (5)}\}$  замкнуто. А это влечёт за собой следующее включение:

$$\left[ \Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau \in M - W(T_0). \quad (5)$$

На основании (5) существуют некоторая точка  $m \in M$  и такой интегрируемый селектор  $p(\cdot)$  отображения

$$\tau \rightarrow \bigcap_{v \in Z} \Phi(T_0 - \tau) f(Y, v, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq T_0,$$

что имеет место равенство

$$\left[ \Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau = m - \int_0^{T_0} p(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Если выбрано произвольное управление убегания  $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$ , то в силу леммы 1 найдётся такое управление преследования  $u(\cdot) \in U([0, T_0], Y)$ , что будет иметь место равенство

$$p(\tau) = \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) \quad (7)$$

для почти всех  $\tau \in [0, T_0]$ .

Учитывая (6) и (7), для решения (3) задачи (1), (2) имеем

$$\begin{aligned} x(T_0) &= \left[ \Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = m - \int_0^{T_0} p(\tau) d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = \\ &= m - \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = m \in M. \end{aligned}$$

Отметим, что  $u(\tau)$  выбирается по формуле (7), исходя из информации о  $v(\tau)$ . Если при выборе  $u(\tau)$  использовать информацию о  $v(\tau)$  и  $x(s)$ ,  $0 \leq s \leq \tau$ , то время достижения

множества  $M$  будет не более числа  $T_0$ . Далее, в силу определения числа  $T_0$  заключаем, что при всех  $t \in [0, T_0)$  имеет место следующее соотношение:

$$\left( \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t) \right) \cap M = \emptyset. \quad (8)$$

Если  $\varepsilon \in (0, T_0)$ , то значения  $v(t)$  управления убегания  $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$  на отрезке  $[0, \varepsilon]$  выбираем произвольно, а при  $t \in (\varepsilon, T_0)$  – специальным образом:  $v(t) = w(u(t - \varepsilon))$ . Тогда в задаче (1), (2) для решения  $x(\cdot)$ , соответствующего выбранным управлениям  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  на  $[0, T_0)$ , имеем

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ & + \int_0^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \int_0^\varepsilon \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_\varepsilon^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), w(u(\tau - \varepsilon)), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу равенства (8), условий 1), 3) и теоремы о строгой отделимости (см. [10, с. 109]) множества  $M$  и

$$\left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t)$$

при всех  $t \in [0, T_0)$  строго отделимы, т.е. при всех  $t \in [0, T_0)$  можно найти такой непрерывный линейный функционал  $\psi \in X^*$  и такие константы  $c$  и  $\delta > 0$ , что справедливы оценки

$$\psi(x) \leq c - \delta < c \leq \psi(m) \quad (9)$$

при всех

$$x \in \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t)$$

и  $m \in M$ . Если  $\bar{p}(\cdot)$  – произвольный интегрируемый селектор отображения

$$\tau \rightarrow \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - \tau) f(Y, v, \tau), \quad \tau \in [0, \varepsilon],$$

то на основании условия 4) и неравенств (9) имеем

$$\psi(x(t)) = \psi \left( \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\varepsilon \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau + \int_\varepsilon^t \Phi(t-\tau)f(u(\tau), w(u(\tau-s)), \tau) d\tau \Big) = \\
& = \psi \left( \left[ \Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t-h_i)B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_\varepsilon^t \Phi(t-\tau)f(u(\tau), w(u(\tau-s)), \tau) d\tau \right) + \psi \left( \int_0^\varepsilon \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau - \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau) d\tau \right) \leq \\
& \leq c - \delta + \int_0^\varepsilon \psi \left( \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) - \bar{p}(\tau) \right) d\tau.
\end{aligned}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число  $\varepsilon = \theta > 0$  такое, что

$$\left| \int_0^\theta \psi(\Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) - \bar{p}(\tau)) d\tau \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно,  $\psi(x(t)) \leq c - \delta/2 < c$ . Поэтому число  $\varepsilon = \theta > 0$  и соответствующее ему управление  $v(\cdot)$  можно выбрать таким образом, что  $x(t) \notin M$  при всех  $t \in [0, T_0)$ , а это и доказывает оптимальность времени преследования  $T_0$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Полученный результат обобщает соответствующие результаты работ [11, с. 81; 12, с. 519; 13, с. 70].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
2. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space // J. of Differ. Equat. 1977. № 25. P. 258–274.
3. Friedman A. Differential games of pursuit in banach space // J. of Math. Analysis and Appl. 1969. V. 25. P. 93–113.
4. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределёнными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112 (154). № 3. С. 307–331.
6. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. 2016. № 1/1 (192). С. 233–236.
7. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
8. Rockafellar T.R. Convex Integral Functionals and Duality // Contribution to Nonlinear Functional Analysis. New York; London, 1971. P. 215–236.
9. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions // Lect. Not. Math. 1977. V. 580. P. 1–278.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
11. Мухсинов Е.М. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх // Управляемые системы. Вып. 22. Новосибирск, 1982. С. 80–87.
12. Гусятников П.Б., Никольский М.С. Об оптимальности времени преследования // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 3. С. 518–521.
13. Мухсинов Е.М. О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С. 66–82.

Таджикский государственный  
университет права, бизнеса и политики,  
г. Худжанд

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.  
После доработки 20.08.2022 г.  
Принята к публикации 21.10.2022 г.