ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 130–137

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.622.1

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ НЕРАСТЯГИВАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. И. П. Рязанцева

Введено понятие обобщённой неподвижной точки нерастягивающего оператора на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства. Для её нахождения построен регуляризирующий алгоритм в форме задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, установлены достаточные условия сильной сходимости получаемых приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке при приближённом задании нерастягивающего оператора и выпуклого замкнутого множества, на котором находится искомая обобщённая неподвижная точка оператора. Приведены примеры параметрических функций, обеспечивающих сходимость приближений по норме гильбертова пространства к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора на выпуклом замкнутом множестве этого пространства.

DOI: 10.31857/S0374064123010119, EDN: ODDNEO

1. Постановка задачи. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u,v) – скалярное произведение элементов u и v из H, Ω – выпуклое и замкнутое множество из H, $P_\Omega : H \to \Omega$ – оператор проектирования в H на Ω, $A : H \to H$ – нерастягивающий оператор на Ω, т.е.

$$\|Ax - Ay\| \leqslant \|x - y\| \quad \text{для любых} \quad x, y \in \Omega. \tag{1}$$

Построим операторы $B = E - P_\Omega$, $C = E - AP_\Omega$, где $E : H \to H$ – единичный оператор в H. Поскольку оператор P_Ω в H является нерастягивающим (см., например, [1, § 1.3]), то с учётом (1) и [1, § 1.3] заключаем, что операторы B и C монотонны на H и обладают свойствами ограниченности и непрерывности, поскольку удовлетворяют условию Липшица.

Отметим, что на множестве Ω оператор $C = E - A$, а B – нулевой оператор.

Определение (ср. с [1, п. 1.11]). Точку $\bar{x} \in \Omega$ назовём *обобщённой неподвижной точкой оператора* A на множестве $\Omega \subseteq H$, если

$$(C\bar{x}, \bar{x} - x) \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Поскольку $D(C) = H$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству (см. [1, лемма 1.11.4])

$$(Cx, \bar{x} - x) \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \tag{3}$$

Приведём некоторое пояснение понятия обобщённой неподвижной точки.

Известно (см., например, [1, лемма 1.5.17]), что при всех $x \in H$ элемент $z = P_\Omega x$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$(z - x, z - y) \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \Omega.$$

Пусть x – неподвижная точка оператора $P_\Omega A$, т.е. $x = P_\Omega Ax$, $x \in \Omega$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$(x - Ax, x - y) \leqslant 0 \quad \text{для любых} \quad x, y \in \Omega.$$

Таким образом, обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω в наших условиях совпадает с неподвижной точкой оператора $P_\Omega A$.

Свойство (1) оператора A не гарантирует существование у него неподвижной точки на Ω, а также не обеспечивает сильную сходимость итерационного процесса $x_{n+1} = Ax_n$ к неподвижной точке оператора A (см. [2, гл. 2, § 4]).

Пусть множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, тогда из (3) следуют выпуклость и замкнутость множества N. Ставится задача построения устойчивого метода нахождения некоторой точки из N.

2. Операторный метод регуляризации для задачи с точными данными. Пусть $0 \in \Omega$ и

$$(Cx, x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant r > 0, \quad x \in \Omega, \quad C = E - AP_\Omega. \tag{4}$$

Построим в пространстве H операторное уравнение

$$B\tilde{x}(t) + \beta(t)[C\tilde{x}(t) + \alpha(t)\tilde{x}(t)] = 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0. \tag{5}$$

Из свойств операторов B и C следует существование единственного решения уравнения (5) при всех $t \geqslant t_0$ [1, теорема 1.7.5; 3, § 18]. Исследуем поведение $\tilde{x}(t)$ при $t \to \infty$.

Выберем некоторый элемент $x \in N \subset \Omega$. Поскольку $Bx = 0$ при всех $x \in \Omega$, то из (5) получаем равенство

$$(B\tilde{x}(t) - Bx, \tilde{x}(t) - x) + \beta(t)[(C\tilde{x}(t) - Cx, \tilde{x}(t) - x) +$$
$$+ (Cx, \tilde{x}(t) - x) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x)] = 0, \quad x \in N. \tag{6}$$

Если $\tilde{x}(t) \in \Omega$, то условие (2) и монотонность отображений B и C приводят к неравенству

$$(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leqslant 0,$$

т.е.

$$\|\tilde{x}(t)\| \leqslant \|x\|, \quad \tilde{x}(t) \in \Omega, \quad x \in N. \tag{7}$$

Пусть теперь $\tilde{x}(t) \notin \Omega$. Умножив (5) скалярно на $\tilde{x}(t)$, имеем равенство

$$(B\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)) + \beta(t)(C\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)) + \alpha(t)\beta(t)\|\tilde{x}(t)\|^2 = 0. \tag{8}$$

Поскольку $0 \in \Omega$ и $B(0) = 0$, то первое слагаемое в (8) неотрицательно. Кроме того, $\tilde{x}(t) \neq 0$, так как $0 \in \Omega$, а $\tilde{x}(t) \notin \Omega$. Предполагая существование неограниченной величины $\tilde{x}(t)$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, состоящей из точек, не входящих в Ω, и учитывая (4), в (8) приходим к противоречию. Следовательно, принимая во внимание (7), делаем вывод об ограниченности $\tilde{x}(t)$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Значит, $\tilde{x}(t) \rightharpoonup \bar{x} \in H$ (для упрощения записей обозначения для подсемейства не меняем).

Пусть

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \beta(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = 0. \tag{9}$$

Теперь из (5) в силу ограниченности оператора C имеем сходимость $B\tilde{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Так как $B : H \to H$ – максимальный монотонный оператор (см. [1, теорема 1.4.6]), то из сходимостей $\tilde{x}(t) \rightharpoonup \bar{x}$, $B\tilde{x}(t) \to 0$ в силу демизамкнутости оператора B вытекает равенство $B\bar{x} = 0$ (см. [1, § 1.4]).

Пусть x – произвольный элемент из Ω, тогда из (6) с учётом монотонности отображений B и C получаем неравенство

$$(Cx, \tilde{x}(t) - x) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leqslant 0, \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

Отсюда, устремив t к бесконечности и приняв во внимание первое равенство в (9), а также ограниченность $\tilde{x}(t)$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, установим неравенство

$$(Cx, \bar{x} - x) \leqslant 0, \quad \bar{x} \in \Omega \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega,$$

т.е. $\bar{x} \in N$.

Пусть теперь в (10) x – произвольный элемент из $N \subset \Omega$, $\bar{y}(t) = P_\Omega \tilde{x}(t) \in \Omega$, $t \geqslant t_0$, тогда (10) запишем в следующей эквивалентной форме:

$$(Cx, \bar{y}(t) - x) + (Cx, \tilde{x}(t) - \bar{y}(t)) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leqslant 0.$$

В силу определения обобщённой неподвижной точки первое слагаемое в последнем выражении неотрицательно. Следовательно, имеет место неравенство

$$\alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leqslant \|Cx\| \|\tilde{x}(t) - \bar{y}(t)\|, \quad x \in N. \tag{11}$$

Используя определение оператора B, равенство (5), ограниченность $\tilde{x}(t)$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и ограниченность оператора C, приходим к соотношениям

$$\|\tilde{x}(t) - \bar{y}(t)\| = \|\tilde{x}(t) - P_\Omega \tilde{x}(t)\| = \|B\tilde{x}(t)\| \leqslant \beta(t)c_1.$$

Здесь и далее c_k, $k \in \mathbb{N}$, – положительные постоянные. Теперь из (11) имеем оценку

$$(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leqslant c_2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad x \in N, \tag{12}$$

или

$$\|\tilde{x}(t) - x\|^2 + (x, \tilde{x}(t) - x) \leqslant c_2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad x \in N.$$

Приняв в последнем неравенстве $x = \bar{x}$, с учётом последнего предельного равенства из (9) и слабой сходимости $\tilde{x}(t)$ к $\bar{x}$ при $t \to \infty$ установим сходимость $\|\tilde{x}(t) - \bar{x}\|$ к нулю при $t \to \infty$. Теперь, переходя к пределу при $t \to \infty$ в (12), получим неравенство $\|\bar{x}\| \leqslant \|x\|$ при всех $x \in N$. Значит, $\bar{x}$ – обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω с минимальной нормой. Далее эту точку обозначаем через x^*. Следовательно, x^* – единственный элемент из N, определяемый соотношением

$$\|x^*\| = \min\{\|x\| : x \in N\} \tag{13}$$

и называемый *нормальной обобщённой неподвижной точкой оператора* A на множестве Ω.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть $A : H \to H$ – нерастягивающий на Ω оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из H, $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеют место условия (4), (9).*

Тогда семейство решений $x(t)$ операторного уравнения (5) при $t \to \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке x^* оператора A на множестве Ω (см. (13)).

Обсудим связь сформулированного выше определения обобщённой неподвижной точки с понятием неподвижной точки как решения операторного уравнения $x = Ax$. Пусть $\bar{N}$ – непустое множество неподвижных точек оператора A, входящих в Ω. Если $z \in \operatorname{int}\Omega$ и $z \in N$, то из (3) нетрудно получить равенство $Cz = 0$ (см. [1, лемма 1.11.6]). Значит, $z \in \bar{N}$, если $z \in N \bigcap \operatorname{int}\Omega$. Включение $\bar{N} \subseteq N$ очевидно. Множество $\bar{N}$ может быть пустым, а при этом $N \neq \varnothing$. Докажем это утверждение примером. Пусть $A : R \to R$ – оператор сдвига, т.е. $Ax = x + a$, $a > 0$, тогда $\bar{N} = \varnothing$ на любом выпуклом замкнутом множестве Ω. Но если $\Omega = \{x : x \leqslant b\}$, то $N = \{b\}$.

3. Непрерывный метод нахождения обобщённой неподвижной точки оператора на выпуклом замкнутом множестве. Пусть выполнены условия теоремы 1, а данные задачи, поставленной в п. 1, возмущены. Предположим, что вместо множества Ω известно семейство выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_t\}$, $t \geqslant t_0$, $\Omega_t \subseteq H$, причём

$$r(\Omega, \Omega_t) \leqslant \sigma(t), \tag{14}$$

где $r(\Omega, \Omega_t)$ – хаусдорфово расстояние в H между множествами Ω и Ω_t из H, $\sigma(t)$ – неотрицательная неубывающая непрерывная функция при $t \geqslant t_0$, $\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Приближения оператора A задаются семейством отображений

$$\{A(t)\}, \quad A(t): H \to H, \quad \Omega_t \subseteq D(A_t) = D(A) = H, \quad t \geqslant t_0,$$

и справедливы неравенства

$$\|A(t)x - Ax\| \leqslant \delta(t) g(\|x\|) \quad \text{для любых} \quad x \in H \quad \text{и} \quad t \geqslant t_0, \tag{15}$$

$$\|A(t)x - A(t)y\| \leqslant [1 + h(t)]\|x - y\|, \tag{16}$$

здесь $\delta(t)$ и $h(t)$ – функции того же класса, что и $\sigma(t)$; $g(s)$ $(s \geqslant 0)$ – неотрицательная неубывающая функция.

Отметим, что в наших предположениях оператор $A(t): H \to H$ может и не иметь обобщённой неподвижной точки на Ω_t.

Пусть $x \in H$, тогда при условии (14) верно неравенство

$$\|P_\Omega x - P_{\Omega_t} x\| \leqslant c\sqrt{\sigma(t)}, \tag{17}$$

где c – абсолютная постоянная для всех x, принадлежащих ограниченному множеству в H (см. [4, § 3.4]).

Для решения поставленной некорректной задачи будем использовать непрерывный метод регуляризации, сводящийся к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Выбор этого метода обусловлен тем, что имеется большой набор эффективных численных методов решения дифференциальных уравнений, а в начальных условиях задачи Коши можно учесть некоторую априорную информацию о искомом решении, если таковая имеется. Автору неизвестны работы, в которых изучалась бы предложенным методом поставленная в данной статье задача.

Построим дифференциальное уравнение с приближёнными данными

$$\frac{dy(t)}{dt} + B(t)y(t) + \beta(t)[C(t)y(t) + \alpha(t)y(t)] = 0 \tag{18}$$

и с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 \in H. \tag{19}$$

Здесь $B(t) = E - P_{\Omega_t}$, $C(t) = E - A(t)P_{\Omega_t}$, y_0 – произвольный элемент из H, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – положительные дифференцируемые невозрастающие выпуклые вниз бесконечно малые при $t \to \infty$ функции, $t \geqslant t_0$. Следовательно, при $t \leqslant \tau$ справедливы неравенства (см. [5, § 10, гл. 2])

$$|\beta(t) - \beta(\tau)| \leqslant \beta'(t)(t - \tau), \quad |\alpha(t) - \alpha(\tau)| \leqslant \alpha'(t)(t - \tau).$$

Предполагаем, что оператор $A(t)$ непрерывен по t, а оператор $B(t)$ непрерывен по t в гильбертовом пространстве (см., например, [4, § 3.4]). Значит, в наших условиях непрерывность по t слагаемых из (18), не содержащих производную, имеет место. Справедливость условия Липшица для оператора $A(t)$ вытекает из (16), а для оператора $B(t)$ условие Липшица устанавливается на основе справедливости его для оператора проектирования в H на выпуклое замкнутое множество (см., например, [4, § 3.4]).

Теперь в наших предположениях делаем вывод об однозначной разрешимости задачи Коши (18), (19) при $t \geqslant t_0$ (см. [6, § 33.4]).

Умножив (18) скалярно на $y(t)$, имеем

$$(y'(t), y(t)) + (B(t)y(t), y(t)) + \beta(t)[(C(t)y(t), y(t)) + \alpha(t)\|y(t)\|^2] = 0. \tag{20}$$

Пусть верно неравенство

$$(B(t)y(t), y(t)) + \beta(t)[(C(t)y(t), y(t)) + \alpha(t)\|y(t)\|^2] \geqslant 0$$

при $\|y(t)\| \geqslant r_0 > 0$ и хотя бы достаточно больших t. Тогда из (20) при этих t получаем неравенство $(y'(t), y(t)) \leqslant 0$, т.е. $d(\|y(t)\|^2)/dt \leqslant 0$. Следовательно, $\|y(t)\|$ – ограниченная на множестве $[t_0, +\infty)$ функция, а значит, справедливо неравенство

$$\|y(t)\| \leqslant c_0 \quad \text{для любого} \quad t \geqslant t_0, \quad c_0 > 0. \tag{21}$$

Далее считаем, что условие (21) выполнено.

Построим вспомогательное операторное уравнение с точными данными

$$B\tilde{x}(\tau) + \beta(\tau)[C\tilde{x}(\tau) + \alpha(\tau)\tilde{x}(\tau)] = 0, \quad \tau \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{22}$$

и на основании теоремы 1 утверждаем сильную сходимость $\tilde{x}(\tau)$ при $\tau \to \infty$ к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на Ω.

Для проведения дальнейших исследований вычтем (22) из (18) и, умножив результат скалярно на $y(t) - \tilde{x}(\tau)$, придём к равенству

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}, y(t) - \tilde{x}(\tau)\right) + (B(t)y(t) - B\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) +$$

$$+ (\beta(t)C(t)y(t) - \beta(\tau)C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) + (\alpha(t)\beta(t)y(t) - \alpha(\tau)\beta(\tau)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = 0. \tag{23}$$

Определим скалярную функцию

$$\rho(t,\tau) = \frac{\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2}{2},$$

тогда

$$\rho'_t(t,\tau) = (y(t) - \tilde{x}(\tau), y'(t)).$$

Теперь, используя (23), найдём оценку сверху для $\rho(t,\tau)$ при $t \leqslant \tau$. Прежде всего отметим, что в наших условиях из доказательства теоремы 1 следует ограниченность в H семейства $\{\tilde{x}(t)\}$, $t \geqslant t_0$. Найдём оценки сверху для последних трёх слагаемых из (23). Учитывая монотонность операторов $B(t)$ при $t \geqslant t_0$, равенства $B(t) = E - P_{\Omega_t}$, $B = E - P_\Omega$, оценку (17), имеем соотношения

$$\Lambda_1(t,\tau) = (B(t)y(t) - B\tilde{x}(\tau)), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = (B(t)y(t) - B(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) -$$

$$- (B\tilde{x}(\tau) - B(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geqslant -\|B\tilde{x}(\tau) - B(t)\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| =$$

$$= -\|P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau) - P_\Omega\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| \geqslant -c\sqrt{\sigma(t)}\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|. \tag{24}$$

Далее рассмотрим величину

$$\Lambda_2(t,\tau) = (\beta(t)C(t)y(t) - \beta(\tau)C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) =$$

$$= \beta(t)(C(t)y(t) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) - \beta(t)(C\tilde{x}(\tau) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) -$$

$$- [\beta(\tau) - \beta(t)](C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)). \tag{25}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (25). Определение оператора $C(t)$, оценка (16) и нерастяжимость оператора P_{Ω_t} позволяют записать неравенства

$$(C(t)y(t) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) =$$

$$= \|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2 - (A(t)P_{\Omega_t}y(t) - A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geqslant$$

$$\geqslant \|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2 - [1 + h(t)]\|\|P_{\Omega_t}y(t) - P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| \geqslant -2h(t)\rho(y(t), \tilde{x}(\tau)). \tag{26}$$

Поскольку $0 \in \Omega$ по условию, то свойство нерастяжимости оператора P_Ω обеспечивает выполнение неравенства

$$\|P_\Omega x\| \leqslant \|x\| \quad \text{для любого} \quad x \in H.$$

Теперь, используя (15)–(17), запишем цепочку неравенств

$$\begin{gathered}\|C(t)\tilde{x}(\tau)-C\tilde{x}(\tau)\|=\|A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau)-AP_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|\leqslant\\ \leqslant\|A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau)-A(t)P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|+\|A(t)P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)-AP_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|\leqslant\\ \leqslant[1+h(t)]\|P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau)-P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|+\delta(t)g(\|P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|)\leqslant\\ \leqslant c_3([1+h(t)]\sqrt{\sigma(t)}+\delta(t))\leqslant c_4(\delta(t)+\sqrt{\sigma(t)}).\end{gathered}\tag{27}$$

В силу ограниченности оператора C, ограниченности семейств $\{y(t)\}$ (см. (21)) и $\{\tilde{x}(t)\}$ при $t\geqslant t_0$ делаем вывод о справедливости соотношений

$$[\beta(t)-\beta(\tau)](C\tilde{x}(\tau),y(t)-\tilde{x}(\tau))\geqslant -c_5|\beta(t)-\beta(\tau)|\geqslant -c_5\beta'(t)(t-\tau),\quad t\leqslant\tau.\tag{28}$$

Таким образом, в силу (25)–(28) установлена оценка

$$\Lambda_2(t,\tau)\geqslant -2h(t)\rho(y(t),\tilde{x}(\tau))-c_6[\delta(t)+\sqrt{\sigma(t)}+\beta'(t)(t-\tau)],\quad t\leqslant\tau.\tag{29}$$

Оценим последнее слагаемое в (23):

$$\begin{gathered}\Lambda_3(t,\tau)=(\alpha(t)\beta(t)y(t)-\alpha(\tau)\beta(\tau)\tilde{x}(\tau),y(t)-\tilde{x}(\tau))\geqslant\\ \geqslant\alpha(t)\beta(t)\|y(t)-\tilde{x}(\tau)\|^2-|\alpha(t)\beta(t)-\alpha(\tau)\beta(\tau)|\|\tilde{x}(\tau)\|\|y(t)-\tilde{x}(\tau)\|\geqslant\\ \geqslant 2\lambda(t)\rho(t,\tau)-c_7\lambda'(t)(t-\tau),\quad \lambda(t)=\alpha(t)\beta(t),\quad t\leqslant\tau.\end{gathered}\tag{30}$$

Теперь, используя (24), (29) и (30), от (23) придём к неравенству

$$\rho'_t(t,\tau)\leqslant -2\lambda(t)\rho(t,\tau)+c_8\{\delta(t)+h(t)+\sqrt{\sigma(t)}+[\beta'(t)+\lambda'(t)](t-\tau)\},\quad t\leqslant\tau.\tag{31}$$

Использовав лемму 1 из [5, гл. 2, § 10], из (31) имеем оценку

$$\rho(t,\tau)\leqslant c_9\bigg[\exp\bigg(-2\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds\bigg)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\{\delta(\theta)+h(\theta)+\sqrt{\sigma(\theta)}+[\beta'(\theta)+\lambda'(\theta)](\theta-\tau)\}\exp\bigg(-\int\limits_{\theta}^{t}\lambda(s)\,ds\bigg)\,d\theta\bigg],\quad t\geqslant t_0,\quad \theta\leqslant\tau.$$

Положив здесь $t=\tau$, $\rho(\tau,\tau)=\bar{\rho}(\tau)$, получим неравенство

$$\bar{\rho}(\tau)\leqslant c_9\bigg[\exp\bigg(-2\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda(s)\,ds\bigg)+\int\limits_{t_0}^{\tau}\{\delta(\theta)+h(\theta)+\sqrt{\sigma(\theta)}+[\beta'(\theta)+\lambda'(\theta)](\theta-\tau)\}\times$$

$$\times\exp\bigg(\int\limits_{t_0}^{\theta}\lambda(s)\,ds\bigg)\,d\theta\,\exp\bigg(-\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda(s)\,ds\bigg)\bigg],\quad \lambda(t)=\alpha(t)\beta(t),\quad t\geqslant t_0,\quad \theta\leqslant\tau.$$

Разобьём второе интегральное слагаемое в квадратных скобках правой части в нём на две части: в первой части подынтегральная функция содержит сумму $\delta(\theta)+h(\theta)+\sqrt{\sigma(\theta)}$, а во второй – $[\beta'(\theta)+\lambda'(\theta)](\theta-\tau)$. К первому полученному интегральному слагаемому применим правило Лопиталя один раз, а ко второму – дважды, тогда придём к оценке

$$\bar{\rho}(\tau)\leqslant c_{10}\bigg[\exp\bigg(-2\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda(s)\,ds\bigg)+\frac{\delta(\tau)+h(\tau)+\sqrt{\sigma(\tau)}}{\lambda(\tau)}-\frac{\beta'(\tau)+\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)+\lambda'(\tau)}\bigg].$$

Значит, при выполнении неравенства

$$\lambda^2(\tau) + \lambda'(\tau) > 0 \tag{32}$$

условия

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t)dt = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \sqrt{\sigma(t)}}{\lambda(t)} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\beta'(\tau) + \lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau) + \lambda'(\tau)} = 0 \tag{33}$$

обеспечивают сходимость $\bar\rho(\tau) = \|y(\tau) - \tilde{x}(\tau)\|^2/2 \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Теперь, приняв во внимание доказанную теорему 1 и неравенство

$$\|y(\tau) - x^*\| \leqslant \|y(\tau) - \tilde{x}(\tau)\| + \|\tilde{x}(\tau) - x^*\|,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того, предположим, что вместо множества Ω известно семейство выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_t\}$, $\Omega_t \subseteq H$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, приближения оператора $A : H \to H$ задаются семейством операторов $\{A(t)\}$, $A(t) : H \to H$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, причём $A(t)$ непрерывен по t при $t \geqslant t_0$, $\Omega_t \subseteq D(A(t)) = D(A) = H$, при этом справедливы неравенства (14)–(16). Построим непрерывный регуляризованный метод первого порядка для задачи нахождения обобщённой неподвижной точки оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω в форме задачи Коши (18), (19), где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – положительные дифференцируемые невозрастающие выпуклые вниз бесконечно малые при $t \to \infty$ функции, и выполнены условия (21), (32), (33).*

Тогда единственное решение задачи Коши (18), (19) при $t \to \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω.

Покажем, что множество параметрических функций, обеспечивающих сходимость $y(t)$ к x^* при $t \to \infty$, непусто.

Пусть

$$\sigma(t) = 1/t^{\sigma}, \quad h(t) = 1/t^{h}, \quad \delta(t) = 1/t^{\delta}, \quad \beta(t) = 1/t^{\beta}, \quad \alpha(t) = 1/t^{\alpha}, \tag{34}$$

где σ, h, δ, β, α – положительные постоянные. Тогда условия (9) выполняются при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta > \alpha$. Расходимость интеграла из (33) имеет место при $\alpha + \beta \leqslant 1$. Второе равенство в (33) будет выполнено, если $\alpha + \beta < \max\{\delta, h, \sigma/2\}$. Заметим, что в наших условиях найдётся число $t_0 > \alpha^{1/(1-\alpha)}$ такое, что при $t \geqslant t_0$ верно неравенство $\alpha^2(t) + \alpha'(t) > 0$. Для выбранных параметрических функций (34) имеем

$$\frac{\beta'(t) + \alpha'(t)}{\alpha^2(t) + \alpha'(t)} = -\frac{\beta t^{\alpha-\beta} + \alpha}{t^{1-\alpha} - \alpha},$$

т.е. и последнее предельное равенство из (33) имеет место. Таким образом, если

$$0 < \alpha < \max\{\beta, 1-\beta, \delta-\beta, h-\beta, \sigma/2-\beta\},$$

то функции (34) удовлетворяют условиям теоремы 2.

Для нахождения неподвижных точек нерастягивающих отображений можно использовать и итерационные процессы (см., например, [7–9]). Сходимость методов итеративной регуляризации для операторных уравнений вида $Ax = f$ с монотонными операторами изучалась, например, в монографиях [10, гл. 5; 1, гл. 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alber Ya., Ryazantseva I.* Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht, 2006.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
4. *Рязанцева И.П.* Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород, 2008.
5. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
7. *Browder F.E.* Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. V. 24. № 1. P. 82–90.
8. *Halperin B.* Fixed points of nonexpansive maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 957–961.
9. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, 1993.
10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М., 1989.

Нижегородский государственный технический
университет имени Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 26.09.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.