ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 115–129

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСФОРМАНТЫ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

© 2023 г. **А. А. Бобылев**

Рассмотрен оператор Пуанкаре–Стеклова для изотропной стратифицированной упругой полосы, отображающий на части границы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Для построения трансформанты ядра интегрального представления этого оператора предложен новый подход. Получена вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения задачи. Построен итерационный метод решения вариационных уравнений и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений проводилась методом конечных элементов. В результате на каждом шаге итерационного метода требуется решить две независимые системы линейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод прогонки. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Проведена верификация разработанного вычислительного алгоритма и даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

DOI: 10.31857/S0374064123010107, EDN: OCYQEZ

Введение. Операторы Пуанкаре–Стеклова, отображающие на части границы рассматриваемой области граничные условия одного типа в граничные условия другого типа, используются для решения различных классов краевых задач математической физики, в частности, в методах разделения областей [1, гл. III] и композиции [2, § 17]. Применение операторов Пуанкаре–Стеклова к решению контактных задач теории упругости с односторонними связями позволяет получить вариационные формулировки этих задач в виде граничных вариационных неравенств и задач минимизации граничных функционалов, при численном решении которых требуется дискретизировать лишь часть границы области – зону возможного контакта, что существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты [3, 4]. В настоящей работе рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова для изотропной стратифицированной упругой полосы, отображающий на части Γ_q границы полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения.

Одним из основных подходов к решению плоских задач теории упругости для бесконечной полосы является применение интегрального преобразования Фурье [5, гл. 1]. В результате для оператора Пуанкаре–Стеклова $Q : q_n \mapsto u_n$, отображающего на Γ_q нормальные напряжения q_n в нормальные перемещения u_n, можно получить следующее интегральное представление:

$$u_n(x_1) = \int\limits_{\Gamma_q} g(x_1 - \xi_1) q_n(\xi_1)\, d\xi_1, \tag{1}$$

ядро которого имеет вид

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty G(\alpha) \cos(\alpha s)\, d\alpha. \tag{2}$$

Далее, следуя [6], косинус-трансформанту Фурье $G(\alpha)$ ядра $g(s)$ интегрального представления (1) будем называть *передаточной функцией.*

В случае однородной полосы выражение для функции $G(\alpha)$ может быть получено аналитически [7, § 11]. Для стратифицированной полосы эту функцию удаётся построить с помощью численно-аналитической методики при специальной зависимости её упругих свойств по толщине, в частности, степенной или экспоненциальной зависимости [8, § 14.5]. В случае произвольного закона изменения упругих свойств по толщине используются приближённые подходы, основанные как на замене непрерывно-неоднородной полосы многослойной с кусочно-постоянной зависимостью упругих модулей от координаты [9], так и на прямом численном интегрировании краевых задач для систем дифференциальных уравнений по поперечной координате [6; 10, гл. 2, § 2]. Основные трудности реализации таких подходов обусловлены наличием экспоненциальных составляющих у фундаментальных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений, приводящих к неустойчивости численных процедур решения задач Коши и их дискретных аналогов и к плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих при удовлетворении граничных условий. Анализ публикаций (см., например, [11, 12]) показал, что основным способом преодоления указанных трудностей является использование метода модулирующих функций, предложенного в [13]. Суть этого метода состоит в выделении в явном виде экспоненциальных составляющих при построении матрицы Грина, в результате чего проблема сводится к отысканию некоторых модулирующих функций ограниченной вариации.

В настоящей работе для построения трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова (передаточной функции $G(\alpha)$) предложен новый подход, основанный на использовании вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Постановка краевой задачи теории упругости, с помощью решения которой определяется оператор Пуанкаре–Стеклова, дана в п. 1. Краевая задача для трансформант перемещений, полученная в результате применения преобразования Фурье, приведена в п. 2. В п. 3 получена её вариационная формулировка, дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения. Для решения полученных вариационных уравнений в п. 4 построен итерационный метод и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений проводилась в п. 5 методом конечных элементов. В п. 6 рассмотрен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Результаты верификации разработанного вычислительного алгоритма и рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток приведены в п. 7. В заключении указаны некоторые возможные обобщения предложенного подхода.

1. Постановка краевой задачи. Сформулируем краевую задачу, с помощью которой вводится исследуемый оператор Пуанкаре–Стеклова. Пусть изотропная стратифицированная упругая полоса толщины h занимает область $\Omega = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$. Границу полосы $x_2 \equiv 0$ обозначим Γ_0, а границу $x_2 \equiv h$ – через Γ_1. Под $u_k(\boldsymbol{x})$, $\sigma_{kl}(\boldsymbol{x})$, $k, l = 1, 2$, будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Предполагается, что упругая полоса находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Параметры Ламе материала полосы являются произвольными ограниченными функциями координаты x_2: $\lambda = \lambda(x_2)$ и $\mu = \mu(x_2)$. Требования к гладкости этих функций будут сформулированы ниже. Из физических соображений следует, что существуют постоянные $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\lambda(x_2) \geqslant \lambda_0, \quad \mu(x_2) \geqslant \mu_0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant h. \tag{3}$$

Напряженно-деформированное состояние полосы Ω описывается системой уравнений

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0,$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \sigma_{22} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2}. \tag{4}$$

По границе Γ_0 полоса соединена с недеформируемым основанием. В случае полного сцепления граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{5}$$

На части границы $\Gamma_q \subset \Gamma_1$ приложена нормальная нагрузка

$$\sigma_{22} = q, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_q. \tag{6}$$

Остальная часть границы Γ_1 свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \setminus \Gamma_q. \tag{7}$$

Предполагается, что участок границы Γ_q является конечным, а главный вектор внешних усилий имеет ограниченную величину:

$$\operatorname{diam}\Gamma_q < \infty, \qquad \left|\int\limits_{\Gamma_q} q\, d\Gamma_q\right| < \infty. \tag{8}$$

Для завершения постановки краевой задачи необходимо задать условия на бесконечности. Обычно в качестве таковых используются условия, характеризующие определённый порядок изменения перемещений и напряжений на бесконечности. Как правило, эти условия носят чисто математический характер. Более естественным является условие конечности потенциальной энергии деформации полосы

$$\int\limits_{\Omega} [\lambda(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})^2]\, d\Omega < \infty, \tag{9}$$

которое вполне замыкает постановку задачи и определяет поведение решения на бесконечности [7, § 1].

2. Применение преобразования Фурье. Введём преобразования Фурье от компонент перемещений и напряжений обычными формулами

$$\tilde{u}_k(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_k(x_1, x_2)\exp(-i\alpha x_1)\, dx_1, \quad \tilde{\sigma}_{kl}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_{kl}(x_1, x_2)\exp(-i\alpha x_1)\, dx_1. \tag{10}$$

Далее будем полагать, что все преобразования Фурье (10) существуют.

Умножим уравнения (4) на $\exp(-i\alpha x_1)$ и проинтегрируем по x_1 от $-\infty$ до ∞. В результате получим систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему соотношений относительно трансформант $\tilde{u}_k$, $\tilde{\sigma}_{kl}$ и их производных, рассматриваемых как функции переменной x_2:

$$i\alpha\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}'_{12} = 0, \quad i\alpha\tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\sigma}'_{22} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{11} = i\alpha(\lambda + 2\mu)\tilde{u}_1 + \lambda\tilde{u}'_2, \quad \tilde{\sigma}_{12} = \mu(\tilde{u}'_1 + i\alpha\tilde{u}_2), \quad \tilde{\sigma}_{22} = i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2. \tag{11}$$

Исключив из полученной системы трансформанты напряжений $\tilde{\sigma}_{kl}$, сделав замену

$$\tilde{u}_1(\alpha, x_2) = v_1(\alpha, x_2), \quad \tilde{u}_2(\alpha, x_2) = iv_2(\alpha, x_2) \tag{12}$$

и положив, что

$$\lambda(x_2) \in C^1[0, h], \quad \mu(x_2) \in C^1[0, h], \tag{13}$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-(\mu v'_1)' + \alpha(\mu v_2)' + \alpha\lambda v'_2 + \alpha^2(\lambda + 2\mu)v_1 = 0,$$

$$-((\lambda + 2\mu)v'_2)' - \alpha(\lambda v_1)' - \alpha\mu v'_1 + \alpha^2\mu v_2 = 0. \tag{14}$$

Применим далее преобразование Фурье к граничным условиям (5)–(7), предполагая существование преобразования Фурье заданной на Γ_q функции $q(x_1)$:

$$\tilde{q}(\alpha) = \int\limits_{\Gamma_q} q(x_1)\exp(-i\alpha x_1)\,dx_1. \tag{15}$$

В результате, с учётом (11)–(13), получим краевые условия для системы уравнений (14):

$$v_1(\alpha,0)=0, \quad v_2(\alpha,0)=0,$$

$$-(\lambda(h)+2\mu(h))v_2'(\alpha,h)-\alpha\lambda(h)v_1(\alpha,h)=p(\alpha), \quad \mu(h)v_1'(\alpha,h)-\alpha\mu(h)v_2(\alpha,h)=0, \tag{16}$$

где

$$p(\alpha)=i\tilde{\sigma}_{22}(\alpha)=i\tilde{q}(\alpha). \tag{17}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Если существуют преобразования Фурье (10) и (15), а также выполняются условия (13), то трансформанты компонент перемещений решения краевой задачи (3)–(9) с учётом (12) удовлетворяют краевой задаче (14), (16).*

Определение 1. Решение краевой задачи (14), (16), принадлежащее классу функций $[C^2(0,h)]^2\bigcap[C^1[0,h]]^2$, называют *классическим решением.*

Замечание 1. Из формул (1), (2), (12), (15)–(17) вытекает соотношение для определения передаточной функции $G(\alpha)$ с помощью решения краевой задачи (14), (16):

$$G(\alpha)=-v_2(\alpha,h)/p(\alpha). \tag{18}$$

Замечание 2. Если $\alpha=0$, то рассматриваемая краевая задача (14), (16) распадается на две независимые краевые задачи относительно функций $v_1(x_2)$ и $v_2(x_2)$:

$$(\mu v_1')'=0, \quad v_1(0)=0, \quad v_1'(h)=0, \tag{19}$$

$$((\lambda+2\mu)v_2')'=0, \quad v_2(0)=0, \quad v_2'(h)=-p(0)/(\lambda(h)+2\mu(h)). \tag{20}$$

Очевидно, что краевая задача (19) имеет тривиальное решение $v_1\equiv 0$. Вычислительные алгоритмы решения краевых задач типа (20) подробно рассмотрены в литературе по численным методам (см., например, [14, гл. 9]). Поэтому далее будем считать, что $\alpha\neq 0$.

3. Вариационная формулировка. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет ослабить требования (13) к гладкости исходных данных $\{\lambda(x_2),\mu(x_2)\}$ и определить обобщённое решение задачи. Введём необходимое для этого пространство вектор-функций

$$\boldsymbol{Z}=Z\times Z, \quad Z=\{z\in W_2^1(0,h): z(0)=0\}, \tag{21}$$

где $W_2^1(0,h)$ – пространство Соболева. Пространство $\boldsymbol{Z}$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})_{\boldsymbol{Z}}=(s_1,z_1)_{W_2^1(0,h)}+(s_2,z_2)_{W_2^1(0,h)}, \quad \boldsymbol{s}=(s_1,s_2), \quad \boldsymbol{z}=(z_1,z_2)\in\boldsymbol{Z}. \tag{22}$$

Введём в рассмотрение вариационную задачу: для фиксированного $\alpha\in\mathbb{R}$ найти вектор-функцию $(v_1,v_2)\in\boldsymbol{Z}$, удовлетворяющую системе вариационных уравнений

$$[\mu v_1',w_1']-\alpha[\mu v_2,w_1']+\alpha[\lambda v_2',w_1]+\alpha^2[(\lambda+2\mu)v_1,w_1]=0 \quad \text{для любой} \quad w_1\in Z,$$

$$[(\lambda+2\mu)v_2',w_2']+\alpha[\lambda v_1,w_2']-\alpha[\mu v_1',w_2]+\alpha^2[\mu v_2,w_2]+p(\alpha)w_2(h)=0 \quad \text{для любой} \quad w_2\in Z, \tag{23}$$

где $[\cdot\,,\cdot]$ – стандартное скалярное произведение в $L_2(0,h)$;

$$\lambda(x_2)\in L_\infty(0,h), \quad \mu(x_2)\in L_\infty(0,h). \tag{24}$$

Теорема 2. *Классическое решение* (v_1, v_2) *краевой задачи (14), (16) является решением вариационной задачи (23).*

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 – две произвольные функции из Z. Умножим уравнения (14) соответственно на w_1 и w_2, а результаты проинтегрируем по отрезку $[0, h]$:

$$-\int_0^h (\mu v_1')' w_1\,dx_2 + \alpha\int_0^h (\mu v_2)' w_1\,dx_2 + \alpha\int_0^h \lambda v_2' w_1\,dx_2 + \alpha^2\int_0^h (\lambda+2\mu) v_1 w_1\,dx_2 = 0,$$

$$-\int_0^h ((\lambda+2\mu) v_2')' w_2\,dx_2 - \alpha\int_0^h (\lambda v_1)' w_2\,dx_2 - \alpha\int_0^h \mu v_1' w_2\,dx_2 + \alpha^2\int_0^h \mu v_2 w_2\,dx_2 = 0.$$

Первые два интеграла в каждом из полученных уравнений вычислим методом интегрирования по частям:

$$\int_0^h \mu v_1' w_1'\,dx_2 - \alpha\int_0^h \mu v_2 w_1'\,dx_2 + \alpha\int_0^h \lambda v_2' w_1\,dx_2 + \alpha^2\int_0^h (\lambda+2\mu) v_1 w_1\,dx_2 +$$

$$+ [(-\mu v_1' + \alpha\mu v_2) w_1]|_0^h = 0,$$

$$\int_0^h (\lambda+2\mu) v_2' w_2'\,dx_2 + \alpha\int_0^h \lambda v_1 w_2'\,dx_2 - \alpha\int_0^h \mu v_1' w_2\,dx_2 + \alpha^2\int_0^h \mu v_2 w_2\,dx_2 -$$

$$- [((\lambda+2\mu) v_2' + \alpha\lambda v_1) w_2]|_0^h = 0.$$

Учитывая далее краевые условия (16) и принадлежность функций w_1 и w_2 множеству Z, получаем вариационные уравнения (23). Теорема доказана.

Определение 2. Решение вариационной задачи (23) называют *обобщённым решением* краевой задачи (14), (16).

Используя известные приёмы [15, § 2.14], можно показать, что справедлива

Теорема 3. *Решение вариационной задачи (23), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщёнными), удовлетворяет (почти всюду) уравнениям (14) и краевым условиям (16).*

Введём на Z билинейные и линейную формы

$$a_1(v, w) = [\mu v', w'] + \alpha^2[(\lambda+2\mu)v, w], \quad a_2(v, w) = [(\lambda+2\mu)v', w'] + \alpha^2[\mu v, w],$$

$$b_1(v, w) = \alpha[\mu v, w'] - \alpha[\lambda v', w], \quad b_2(v, w) = \alpha[\mu v', w] - \alpha[\lambda v, w'], \quad l_2(w) = -p(\alpha)w(h). \qquad (25)$$

Лемма 1. *Для любого фиксированного* $\alpha \in \mathbb{R}$ *при выполнении условий (3) и (24) билинейные формы* $a_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *и* $a_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *являются непрерывными и положительно определёнными на* Z.

Доказательство. Симметричность билинейных форм очевидна, непрерывность несложно показать, используя условие (24), а коэрцитивность – с учётом неравенств (3).

Лемма 2. *Для любого фиксированного* $\alpha \in \mathbb{R}$ *при выполнении условий (24) билинейные формы* $b_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *и* $b_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *являются непрерывными на* Z.

Доказательство. Непрерывность билинейных форм несложно показать, используя условие (24), неравенство Коши–Буняковского и неравенство $rs \leqslant (r^2+s^2)/2$ для любых $r, s \in \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Если существует преобразование Фурье (15), то линейная форма* $l_2(\cdot)$ *непрерывна на* Z.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы вложения С. Л. Соболева ($W_2^1(0,h) \hookrightarrow C[0,h]$) [16, § 9].

С учётом (25) система вариационных уравнений (23) примет вид

$$a_1(v_1,w_1)-b_1(v_2,w_1)=0 \quad \text{для любой} \quad w_1\in Z,$$
$$a_2(v_2,w_2)-b_2(v_1,w_2)-l_2(w_2)=0 \quad \text{для любой} \quad w_2\in Z. \tag{26}$$

Образуем далее на $\boldsymbol{Z}$ билинейные и линейную формы

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=a_1(v_1,w_1)+a_2(v_2,w_2), \quad b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=b_1(v_2,w_1)+b_2(v_1,w_2), \quad l(\boldsymbol{w})=l_2(w_2).$$

Используя леммы 1–3, несложно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. *Для любого фиксированного $\alpha\in\mathbb{R}$ при выполнении условий (3) и (24) билинейная форма $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной и положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$.*

Лемма 5. *Для любого фиксированного $\alpha\in\mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейная форма $b(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной на $\boldsymbol{Z}$.*

Лемма 6. *Если существует преобразование Фурье (15), то линейная форма $l(\cdot)$ непрерывна на $\boldsymbol{Z}$.*

Введём на $\boldsymbol{Z}$ билинейную форму

$$k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \tag{27}$$

и рассмотрим вариационную задачу: для фиксированного $\alpha\in\mathbb{R}$ найти вектор-функцию $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{Z}$, удовлетворяющую вариационному уравнению

$$k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-l(\boldsymbol{w})=0 \quad \text{для любой функции} \quad \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Z}. \tag{28}$$

Лемма 7. *Вариационное уравнение (28) эквивалентно системе уравнений (26).*

Доказательство. Путь $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ – решение системы уравнений (26). Сложив эти уравнения, получим с учётом (27) вариационное уравнение (28). Обратно, выбрав в (28) $\boldsymbol{w}=(w_1,0)$, получим первое уравнение (26), а выбрав $\boldsymbol{w}=(0,w_2)$ – второе уравнение (26). Лемма доказана.

Разрешимость вариационной задачи (28) зависит от свойств билинейной формы $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Покажем, что эта билинейная форма является положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$.

Из лемм 4 и 5 следует

Лемма 8. *Для любого фиксированного $\alpha\in\mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной на $\boldsymbol{Z}$.*

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 9. *Билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является симметричной на $\boldsymbol{Z}$.*

Для доказательства коэрцитивности билинейной формы $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на $\boldsymbol{Z}$ введём гильбертово пространство вектор-функций $\boldsymbol{Y}=[L_2(0,h)]^4$, оснащённое скалярным произведением

$$(\hat{\boldsymbol{y}},\check{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{Y}}=[\hat{y}_1,\check{y}_1]+[\hat{y}_2,\check{y}_2]+[\hat{y}_3,\check{y}_3]+[\hat{y}_4,\check{y}_4], \quad \hat{\boldsymbol{y}}=(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\hat{y}_3,\hat{y}_4), \quad \check{\boldsymbol{y}}=(\check{y}_1,\check{y}_2,\check{y}_3,\check{y}_4)\in\boldsymbol{Y}, \tag{29}$$

и определим оператор $j:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Y}$ такой, что $j\boldsymbol{z}=(z_1,z_1',z_2,z_2')$ для любого $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2)\in\boldsymbol{Z}$.

Лемма 10. *Оператор $j:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Y}$ является линейным инъективным изометрическим оператором.*

Доказательство. Линейность и инъективность оператора j проверяется непосредственно, а из определений скалярных произведений (22) и (29) следует, что

$$(j\boldsymbol{z},j\boldsymbol{z})_{\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})_{\boldsymbol{Z}}.$$

Лемма 11. *Множество значений $R(j)$ оператора j является собственным замкнутым линейным подпространством в $\boldsymbol{Y}$.*

Доказательство. Линейность множества $R(j)$ очевидным образом следует из линейности оператора j, а замкнутость – из полноты пространства $\boldsymbol{Z}$ и изометричности оператора j. Постоянная вектор-функция $(0,1,0,1)\in\boldsymbol{Y}$ не принадлежит $R(j)$, следовательно, $R(j)$ является собственным подмножеством $\boldsymbol{Y}$. Лемма доказана.

Зададим на $\boldsymbol{Y}$ билинейную форму

$$d(\hat{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{y}}, \check{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{Y}}, \tag{30}$$

где

$$\boldsymbol{D}(x_2,\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha^2(\lambda(x_2)+2\mu(x_2)) & 0 & 0 & -\alpha\lambda(x_2) \\ 0 & \mu(x_2) & \alpha\mu(x_2) & 0 \\ 0 & \alpha\mu(x_2) & \alpha^2\mu(x_2) & 0 \\ -\alpha\lambda(x_2) & 0 & 0 & \lambda(x_2)+2\mu(x_2) \end{bmatrix}$$

– квадратная симметричная матрица-функция четвёртого порядка.

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 12. *Для любых* $\hat{\boldsymbol{z}}, \check{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{Z}$ *выполняется равенство*

$$k(\hat{\boldsymbol{z}}, \check{\boldsymbol{z}}) = d(j\hat{\boldsymbol{z}}, j\check{\boldsymbol{z}}). \tag{31}$$

Матрицу-функцию $\boldsymbol{D}(x_2,\alpha)$ при фиксированных значениях x_2 и α можно рассматривать как квадратную симметричную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Современные системы компьютерной алгебры позволяют аналитически вычислить её собственные значения и соответствующие им собственные векторы. В данной работе с помощью системы SageMath установлено, что справедлива

Лемма 13. *При выполнении условий (3) и (24) матрица* $\boldsymbol{D}(x_2,\alpha)$ *для любого* $\alpha \neq 0$ *почти всюду на отрезке* $[0,h]$ *имеет четыре вещественных собственных значения:*

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = [(1+\alpha^2)(\lambda+2\mu)-\kappa]/2, \quad \omega_3 = \mu(1+\alpha^2), \quad \omega_4 = [(1+\alpha^2)(\lambda+2\mu)+\kappa]/2,$$

которым соответствуют ортонормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (0,1,1/\alpha,0)/\gamma_1, \quad \boldsymbol{f}_2 = (1,0,0,\theta-\vartheta)/\gamma_2,$$

$$\boldsymbol{f}_3 = (0,1,-\alpha,0)/\gamma_3, \quad \boldsymbol{f}_4 = (1,0,0,\theta+\vartheta)/\gamma_4,$$

где

$$\kappa = [(1-\alpha^2)^2(\lambda+2\mu)^2 + 4\alpha^2\lambda^2]^{1/2}, \quad \theta = (\lambda+2\mu)(1-\alpha^2)/(2\alpha\lambda), \quad \vartheta = \kappa/(2\alpha\lambda),$$

$$\gamma_1 = (1+\alpha^2)^{1/2}/\alpha, \quad \gamma_2 = (1+(\theta-\vartheta)^2)^{1/2}, \quad \gamma_3 = (1+\alpha^2)^{1/2}, \quad \gamma_4 = (1+(\theta+\vartheta)^2)^{1/2}.$$

Следствие 1. *Для любого* $\alpha \neq 0$ *матрица* $\boldsymbol{D}(x_2,\alpha)$ *является неотрицательно определённой, а её собственные значения ограничены почти всюду на* $[0,h]$ *и удовлетворяют условиям*

$$\omega_4 > \omega_3 \geqslant \omega_2 > \omega_1 = 0. \tag{32}$$

Следствие 2. *Билинейная форма* $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *является неотрицательной на* $\boldsymbol{Y}$.

Из равенства (31) и следствия 2 вытекает, что билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ также является неотрицательной на $\boldsymbol{Z}$. Однако поскольку множество $R(j)$ является собственным подпространством в $\boldsymbol{Y}$ (лемма 11), можно доказать более сильное утверждение – билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является коэрцитивной на $\boldsymbol{Z}$.

Введём квадратную матрицу-функцию $\boldsymbol{F}(x_2,\alpha)$ четвёртого порядка, столбцами которой являются векторы-функции $\boldsymbol{f}_n(x_2,\alpha)$, $n=\overline{1,4}$. При фиксированных значениях x_2 и α матрицу-функцию $\boldsymbol{F}(x_2,\alpha)$ можно рассматривать как квадратную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Из известных результатов линейной алгебры [17, гл. 7] следует, что справедлива

Лемма 14. *Матрица* $\boldsymbol{F}(x_2,\alpha)$ *для любого* $\alpha \neq 0$ *почти всюду на отрезке* $[0,h]$ *является ортогональной, т.е.*

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{F}^T \quad \text{и} \quad \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}\|_{\mathbb{E}^4} = \|\boldsymbol{r}\|_{\mathbb{E}^4} \quad \text{для любого} \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{E}^4,$$

где $\mathbb{E}^4$ *– евклидово пространство, и имеет место равенство*

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

Следствие 3. *Для любого* $\boldsymbol{r} \in \mathbb{E}^4$ *и* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{r}$ *выполняются равенства*

$$(\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})_{\mathbb{E}^4} = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})_{\mathbb{E}^4} = \omega_2 p_2^2 + \omega_3 p_3^2 + \omega_4 p_4^2. \tag{33}$$

Теорема 4. *Билинейная форма* $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *является коэрцитивной на* $\boldsymbol{Z}$, *т.е. существует постоянная* $\varrho_z > 0$ *такая, что*

$$k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \geqslant \varrho_z \|\boldsymbol{z}\|^2_{\boldsymbol{Z}} \quad \text{для любой} \quad \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{Z}_1 = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z} : \|\boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{Z}} = 1\}$, тогда можно положить

$$\varrho_z = \inf_{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}_1} k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}).$$

Из соотношений (30), (31) и (33) следует, что для любого $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}_1$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^T j\boldsymbol{z}$ имеем

$$k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = [\omega_2 q_2, q_2] + [\omega_3 q_3, q_3] + [\omega_4 q_4, q_4].$$

Из этого равенства и (32) следует, что $\varrho_z \geqslant 0$. Покажем, что $\varrho_z > 0$. Доказательство проведём методом от противного. Пусть $\varrho_z = 0$. Тогда, поскольку ω_2, ω_3, ω_4 ограничены почти всюду на $[0, h]$ (следствие 1), для любого $\varepsilon > 0$ существует $\hat{\boldsymbol{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \boldsymbol{Z}_1$ такой, что для $\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}^T j\hat{\boldsymbol{z}}$ выполняются неравенства

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_n] < \varepsilon, \quad n = 2, 3, 4, \tag{34}$$

где

$$\hat{q}_2 = (\hat{z}_1 + (\theta - \vartheta)\hat{z}_2')/\gamma_2, \tag{35}$$

$$\hat{q}_3 = (\hat{z}_1' - \alpha\hat{z}_2)/\gamma_3, \tag{36}$$

$$\hat{q}_4 = (\hat{z}_1 + (\theta + \vartheta)\hat{z}_2')/\gamma_4. \tag{37}$$

Из равенств (35) и (37) следует, что

$$\hat{z}_1 = (\theta(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4) + \vartheta(\gamma_2\hat{q}_2 + \gamma_4\hat{q}_4))/(2\vartheta),$$

$$\hat{z}_2' = -(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4)/(2\vartheta).$$

Возведём обе части каждого из этих равенств в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенства Коши–Буняковского и (34) несложно получить оценки

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_1] < \hat{c}_1\varepsilon, \quad [\hat{z}_2', \hat{z}_2'] < \hat{c}_4\varepsilon, \tag{38}$$

где $\hat{c}_1 > 0$ и $\hat{c}_4 > 0$ – константы, не зависящие от ε, $\hat{\boldsymbol{q}}$ и, следовательно, от $\hat{\boldsymbol{z}}$.

Из тождества

$$\hat{z}_2(x_2) = \hat{z}_2(0) + \int\limits_0^{x_2} \hat{z}_2'(\xi_2)\, d\xi_2,$$

учитывая, что $\hat{z}_2(0) = 0$, для $x_2 \in [0, h]$ с помощью неравенства Коши–Буняковского имеем неравенство

$$|\hat{z}_2(x_2)| \leqslant \int\limits_0^h |\hat{z}_2'(\xi_2)|\, d\xi_2 \leqslant h^{1/2}[\hat{z}_2', \hat{z}_2']^{1/2},$$

из которого с учётом (38) следует оценка

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] < \hat{c}_3\varepsilon, \quad \hat{c}_3 = h^2\hat{c}_4. \tag{39}$$

Далее из соотношения (36) имеем

$$\hat{z}_1' = \gamma_3\hat{q}_3 + \alpha\hat{z}_2.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенств (34) и (39) получим оценку

$$[\hat{z}_1', \hat{z}_1'] < \hat{c}_2\varepsilon, \tag{40}$$

где $\hat{c}_2 > 0$ – константа, не зависящая от ε, $\hat{\boldsymbol{q}}$ и, следовательно, от $\hat{\boldsymbol{z}}$.

В результате из (38)–(40) следует, что

$$\|\hat{\boldsymbol{z}}\|^2_{\boldsymbol{Z}} < \hat{c}\varepsilon, \tag{41}$$

где $\hat{c} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 + \hat{c}_4 > 0$ – константа, не зависящая от ε и $\hat{\boldsymbol{z}}$. Выбирая в (41) $\varepsilon < 1/\hat{c}$, получим неравенство $\|\hat{\boldsymbol{z}}\|_{\boldsymbol{Z}} < 1$, что противоречит условию $\hat{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{Z}_1$. Теорема доказана.

Поскольку билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной и положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$, а линейная форма $l(\cdot)$ – непрерывной на $\boldsymbol{Z}$, то из известных результатов (см. [2, гл. 2]) следуют

Теорема 5. *Решение вариационной задачи (28) существует и единственно.*

Теорема 6. *Вариационная задача (28) эквивалентна задаче минимизации функционала энергии: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ найти вектор-функцию $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{Z}$ такую, что*

$$J(\boldsymbol{v}) = \inf_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Z}}\{J(\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) - 2l(\boldsymbol{w})\}. \tag{42}$$

4. Метод последовательных приближений. Для построения вычислительного алгоритма решения рассматриваемой задачи можно использовать метод Бубнова–Галёркина, применяя его непосредственно к решению вариационного уравнения (28), или метод Ритца для решения задачи минимизации функционала энергии (42). В данной работе используется альтернативный подход – метод последовательных приближений на основе принципа сжатых отображений.

Лемма 15. *Для фиксированного числа $\tau > 0$ существует оператор $S : \boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{s}$, отображающий $\boldsymbol{Z}$ в себя, такой, что*

$$a(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) - \tau(k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) - l(\boldsymbol{w})) \quad \text{для любого} \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{Z}. \tag{43}$$

Доказательство. Если зафиксировать $\boldsymbol{z}$, то из лемм 4, 6 и 8 следует, что правая часть (43) является линейным непрерывным функционалом на $\boldsymbol{Z}$. Утверждение леммы следует из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма (см. [2, гл. 2, § 14]).

Теорема 7. *Вариационная задача (28) эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки $\boldsymbol{v}$ оператора S:*

$$\boldsymbol{v} = S\boldsymbol{v}.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v}$ – решение вариационной задачи (28). Положив в (43) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, получим, что $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}$. Обратно, пусть $\boldsymbol{v}$ – неподвижная точка $\boldsymbol{v}$ оператора S. Положив в (43) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, получим, что $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет (28). Теорема доказана.

Следствие 4. *Неподвижная точка оператора S не зависит от параметра $\tau > 0$.*

Получим условия, которым должен удовлетворять параметр τ, чтобы оператор S был оператором сжатия, т.е. для любых $\hat{\boldsymbol{z}}, \check{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{Z}$ имело бы место неравенство

$$\|S\hat{\boldsymbol{z}} - S\check{\boldsymbol{z}}\| \leqslant \delta\|\hat{\boldsymbol{z}} - \check{\boldsymbol{z}}\|, \quad 0 < \delta < 1. \tag{44}$$

Пусть $\hat{\boldsymbol{s}} = S\hat{\boldsymbol{z}}$ и $\check{\boldsymbol{s}} = S\check{\boldsymbol{z}}$. Положив в (43) $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}$ и $\boldsymbol{w} = \check{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{s}}$, а затем $\boldsymbol{z} = \check{\boldsymbol{z}}$ и $\boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}}$, получим

$$a(\hat{\boldsymbol{s}}, \check{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{s}}) = a(\hat{\boldsymbol{z}}, \check{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{s}}) - \tau(k(\hat{\boldsymbol{z}}, \check{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{s}}) - l(\check{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{s}})),$$

$$a(\check{\boldsymbol{s}}, \hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}}) = a(\check{\boldsymbol{z}}, \hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}}) - \tau(k(\check{\boldsymbol{z}}, \hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}}) - l(\hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}})).$$

Сложив эти два равенства, имеем

$$a(\bar{\boldsymbol{s}}, \bar{\boldsymbol{s}}) = a(\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{s}}) - \tau k(\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{s}}), \tag{45}$$

где $\bar{\boldsymbol{s}} = \hat{\boldsymbol{s}} - \check{\boldsymbol{s}}$, $\bar{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} - \check{\boldsymbol{z}}$.

Билинейная форма $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной и положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$ (лемма 4), поэтому её можно использовать в качестве скалярного произведения $(\,\cdot\,,\cdot\,)_a$ на $\boldsymbol{Z}$. Пространство с новым скалярным произведением обозначим $\boldsymbol{Z}_a$. Норма в этом пространстве будет определяться равенством $\|\boldsymbol{z}\|_a = a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})^{1/2}$.

Поскольку билинейная форма $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной и положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$ (леммы 8, 9 и теорема 4), несложно доказать, что справедлива

Лемма 16. *Билинейная форма* $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *является непрерывной и положительно определённой на* $\boldsymbol{Z}_a$, *т.е. существуют такие постоянные* $\varrho_a > 0$ *и* $\rho_a > 0$, *что*

$$k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \geqslant \varrho_a \|\boldsymbol{z}\|_a^2, \quad k(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{z}) \leqslant \rho_a \|\boldsymbol{s}\|_a \|\boldsymbol{z}\|_a \quad \text{для любых} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}_a. \tag{46}$$

Из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма следует, что существует определённый единственным образом линейный непрерывный оператор K такой, что

$$k(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{z}) = (K\boldsymbol{s}, \boldsymbol{z})_a, \quad \|K\|_a = \sup_{\|\boldsymbol{z}\|_a = 1} \|K\boldsymbol{z}\|_a \leqslant \rho_a. \tag{47}$$

Тогда из (45) вытекает, что

$$\|\bar{\boldsymbol{s}}\|_a^2 = (\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{s}})_a - \tau(K\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{s}})_a = ((I_a - \tau K)\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{s}})_a, \tag{48}$$

где I_a – единичный (тождественный) оператор в $\boldsymbol{Z}_a$.

С помощью неравенства Коши–Буняковского из (48) имеем

$$\|\bar{\boldsymbol{s}}\|_a^2 \leqslant \|(I_a - \tau K)\bar{\boldsymbol{z}}\|_a \|\bar{\boldsymbol{s}}\|_a. \tag{49}$$

Используя далее (46) и (47), получим оценку

$$\|(I_a - \tau K)\bar{\boldsymbol{z}}\|_a^2 = \|\bar{\boldsymbol{z}}\|_a^2 - 2\tau(K\bar{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{z}})_a + \tau^2\|K\bar{\boldsymbol{z}}\|_a^2 \leqslant (1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2)\|\bar{\boldsymbol{z}}\|_a^2. \tag{50}$$

В результате из неравенств (49) и (50) следует, что

$$\|S\hat{\boldsymbol{z}} - S\check{\boldsymbol{z}}\| \leqslant (1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2)^{1/2}\|\hat{\boldsymbol{z}} - \check{\boldsymbol{z}}\|. \tag{51}$$

Очевидно, что если $\tau \in (0, 2\varrho_a/\rho_a^2)$, то $(1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2)^{1/2} < 1$ и, следовательно, выполняется условие (44). Таким образом, доказана

Теорема 8. *Оператор* S, *определённый формулой (43), является сжимающим для* τ *из интервала* $(0, 2\varrho_a/\rho_a^2)$.

Для нахождения неподвижной точки $\boldsymbol{v}$ оператора S используется принцип сжатых отображений – неподвижная точка отыскивается как предел функциональной последовательности $\{\boldsymbol{v}^n\}$, $n = 0, 1, \ldots,$ возникающей при решении последовательности вариационных задач

$$a(\boldsymbol{v}^{n+1}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{w}) - \tau_{n+1}(k(\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{w}) - l(\boldsymbol{w})) \quad \text{для любого} \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{Z}, \tag{52}$$

где $\tau_{n+1} > 0$ – итерационный параметр, который может изменяться от шага к шагу. Начальное приближение $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{Z}$ выбирается произвольно.

Теорема 9. *Если выполняются условия*

$$\check{\tau} = \inf_{n>0} \tau_n > 0, \quad \hat{\tau} = \sup_{n>0} \tau_n < 2\varrho_a/\rho_a^2, \tag{53}$$

то итерационный метод (52) сходится при любом начальном приближении $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{Z}$ *к решению вариационной задачи (28).*

Доказательство. Поскольку билинейная форма $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ является непрерывной и положительно определённой на $\boldsymbol{Z}$ (лемма 4), а из лемм 4, 6 и 8 вытекает, что правая часть (52) при фиксированном $\boldsymbol{v}^n$ является непрерывной линейной формой, то из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма следует, что решение $\boldsymbol{v}^{n+1}$ вариационной задачи (52) существует и единственно. Обозначим через S_n оператор, определённый формулой (43) при $\tau = \tau_n$. Тогда $\boldsymbol{v}^{n+1} = S_{n+1}\boldsymbol{v}^n$ и из (51) следуют неравенства

$$\|\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^n\| \leqslant \delta \|\boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{v}^{n-1}\| \quad \text{для} \quad n > 0, \tag{54}$$

где

$$\delta = \max\{(1 - 2\check{\tau}\varrho_a + \check{\tau}^2\rho_a^2)^{1/2}, (1 - 2\hat{\tau}\varrho_a + \hat{\tau}^2\rho_a^2)^{1/2}\} < 1.$$

Существование и единственность предела последовательности $\{\boldsymbol{v}^n\}$ устанавливается с помощью (54) путём рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве принципа сжатых отображений (см. [2, гл. 1, § 4]). Переходя далее в (52) к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание непрерывность билинейных форм $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$, а также условия (53), получаем утверждение теоремы.

Лемма 17. *Вариационное уравнение (52) эквивалентно системе уравнений*

$$a_1(v_1^{n+1}, w_1) = (1 - \tau_{n+1})a_1(v_1^n, w_1) + \tau_{n+1}b_1(v_2^n, w_1) \quad \text{для любого} \quad w_1 \in Z,$$

$$a_2(v_2^{n+1}, w_2) = (1 - \tau_{n+1})a_2(v_2^n, w_2) + \tau_{n+1}b_2(v_1^n, w_2) + \tau_{n+1}l_2(w_2) \quad \text{для любого} \quad w_2 \in Z. \tag{55}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Система уравнений (55) распадается на два независимых вариационных уравнения, каждое из которых однозначно разрешимо вследствие непрерывности и положительной определённости билинейных форм $a_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $a_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на Z. Поэтому несложно показать, что справедлива

Лемма 18. *Итерационный метод (52) эквивалентен итерационному методу*

$$a_1(v_1^{n+1/2}, w_1) = b_1(v_2^n, w_1), \quad a_2(v_2^{n+1/2}, w_2) = b_2(v_1^n, w_2) + l_2(w_2) \quad \text{для любых} \quad w_1, w_2 \in Z, \tag{56}$$

$$v_1^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})v_1^n + \tau_{n+1}v_1^{n+1/2}, \quad v_2^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})v_2^n + \tau_{n+1}v_2^{n+1/2}. \tag{57}$$

5. Аппроксимация вариационных задач. Для аппроксимации рассмотренных выше вариационных задач применим метод конечных элементов. Учитывая определение (21) пространства Z, для его аппроксимации используем конечномерное подпространство $Z^* \subset Z$ кусочно-линейных функций. Разобъём отрезок $[0, h]$ на $M - 1$ двухузловых конечных элемента первого порядка и применим стандартную процедуру метода Бубнова–Галёркина [14, гл. 9, § 10] к каждому из вариационных уравнений (56). В результате получим конечномерную аппроксимацию итерационного метода (56), (57):

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{V}_1^{n+1/2} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{V}_2^n, \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{V}_2^{n+1/2} = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{V}_1^n + \boldsymbol{L}_2, \tag{58}$$

$$\boldsymbol{V}_1^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})\boldsymbol{V}_1^n + \tau_{n+1}\boldsymbol{V}_1^{n+1/2}, \quad \boldsymbol{V}_2^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})\boldsymbol{V}_2^n + \tau_{n+1}\boldsymbol{V}_2^{n+1/2}, \tag{59}$$

где $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ – квадратные матрицы порядка M, полученные в результате аппроксимации билинейных форм $a_1(\,\cdot\,,\cdot)$, $a_2(\,\cdot\,,\cdot)$, $b_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $b_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$ соответственно; $\boldsymbol{L}_2 \in \mathbb{R}^M$ – вектор, полученный в результате аппроксимации линейной формы $l_2(\cdot)$; $\boldsymbol{V}_1^m, \boldsymbol{V}_2^m \in \mathbb{R}^M$, $m = n, (n+1)$, – векторы узловых значений искомых функций на соответствующем шаге итерационного метода; $\boldsymbol{V}_1^{n+1/2}, \boldsymbol{V}_2^{n+1/2} \in \mathbb{R}^M$ – вспомогательные векторы. Несложно показать, что $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2^T$.

Для вычисления элементов матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ применяются квадратурные формулы. Тип используемых формул определяется конкретным законом изменения упругих свойств (функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$) по толщине полосы.

На каждом шаге итерационного метода (58), (59) требуется решить две независимые СЛАУ (58). Поскольку при использовании двухузловых конечных элементов первого порядка матрицы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ являются трёхдиагональными [14, гл. 9, § 10], то для численного решения СЛАУ (58) применяется метод прогонки. Несложно показать, что в случае $\alpha \neq 0$ обе матрицы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ имеют диагональное преобладание, а если $\alpha = 0$ – частичное диагональное преобладание. Следовательно, алгоритм метода прогонки является корректным и устойчивым [18, гл. II].

Применив далее метод Бубнова–Галёркина к вариационному уравнению (28), получим СЛАУ

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}, \tag{60}$$

где

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}_2 \end{bmatrix}.$$

Лемма 19. *Матрицы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{K}$ являются положительно определёнными.*

Доказательство. Поскольку $Z^* \subset Z$, то положительная определённость матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{K}$ следует из положительной определённости билинейных форм $a_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$, $a_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$, $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $k(\,\cdot\,,\cdot\,)$ соответственно.

Установим условия, при которых итерационный метод (58), (59) сходится к решению СЛАУ (60). Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 20. *Итерационный метод (58), (59) эквавалентен итерационному методу*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^n - \tau_{n+1}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{L}). \tag{61}$$

Замечание 3. Итерационный метод (61) представляет собой линейный одношаговый итерационный метод решения СЛАУ (60) с предобуславливателем – матрицей $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Теорема 10 [19, § 34]. *Линейный одношаговый итерационный метод (61) сходится к решению СЛАУ (60), если выполняется условие*

$$\sup_{n>0} \|\boldsymbol{T}_n\|_2 < 1, \tag{62}$$

где $\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{I} - \tau_n \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K}$ – матрица перехода n-го шага; $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица порядка M; $\|\cdot\|_2$ – спектральная норма матрицы.

Для определения диапазона значений параметра τ_n, для которых выполняется условие (62), используем обобщённое отношение Релея для пучка матриц $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{A})$:

$$\Phi(\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})/(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}).$$

Пусть

$$\varrho = \min_{\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}} \Phi(\boldsymbol{V}), \quad \rho = \max_{\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}} \Phi(\boldsymbol{V}), \tag{63}$$

где $\boldsymbol{Q} = Q \times Q$, $Q \subset \mathbb{E}^M$ – множество узловых значений функций из Z^*.

Поскольку матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{K}$ являются положительно определёнными, то справедливы следующие утверждения [20, гл. 15].

Лемма 21. *Минимальное значение ϱ обобщённого отношения Релея положительно.*

Лемма 22. *Спектр матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K}$ принадлежит отрезку $[\varrho, \rho]$.*

Из теоремы 10 с учётом лемм 21 и 22 следуют известные результаты [19, § 34].

Теорема 11. *Линейный одношаговый итерационный метод (61) сходится к решению СЛАУ (60), если выполняется условие*

$$\sup_{n>0} \tau_n < 2/\rho = \tau_{\rm cr}.$$

Теорема 12. *Для линейного стационарного одношагового итерационного метода (61) (метода простой итерации) асимптотически оптимальным будет значение параметра*

$$\tau_{\mathrm{opt}} = 2/(\varrho + \rho). \tag{64}$$

6. Алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$. Для вычисления асимптотически оптимального значения τ_{opt} в соответствии с формулой (64) требуется найти минимальное ϱ и максимальное ρ значения обобщённого отношения Релея. Для решения задач (63) можно использовать степенной метод со сдвигами [20, гл. 15]. Учитывая лемму 21, при вычислении значения ρ сдвиг полагается равным нулю, а при вычислении ϱ – равным найденному значению ρ. Однако вычислительные затраты, оцениваемые по количеству операций умножения матрицы на вектор, для определения этих двух собственных значений соизмеримы с трудоемкостью самого итерационного метода (58), (59). Поэтому в данной работе разработан эвристический алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$, обеспечивающий сходимость итерационного метода (58), (59).

При вычислении передаточной функции $G(\alpha)$ с помощью формулы (18) на некоторой дискретной сетке значений параметра α в качестве начального приближения для итерационного метода (58), (59), как правило, используется либо нулевой вектор, либо решение для соседнего значения α. Проведённые вычислительные эксперименты по исследованию сходимости стационарного ($\tau_n = \tau = \mathrm{const}$) варианта метода показали, что при таком выборе начального приближения последовательность разностей $v_2^{n+1}(h) - v_2^n(h)$ является знакопостоянной при $\tau < \tau_{\mathrm{opt}} - \varepsilon_\tau$ и знакопеременной, если $\tau_{\mathrm{opt}} + \varepsilon_\tau < \tau < \tau_{\mathrm{cr}}$, где $\varepsilon_\tau > 0$ – некоторая малая величина. При $\tau \geqslant \tau_{\mathrm{cr}}$ указанная последовательность также является знакопеременной, однако возрастающей по абсолютной величине, т.е. итерационный процесс расходится. С учётом этого предлагается следующий алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$.

Пусть определены приближение (v_1^n, v_2^n) и значение параметра τ_n. Используя схему (58), (59), вычислим два последующих приближения (v_1^{n+1}, v_2^{n+1}) и (v_1^{n+2}, v_2^{n+2}), полагая $\tau_{n+2} = \tau_{n+1} = \tau_n$. Далее обозначим

$$\delta_{n+1} = v_2^{n+1}(h) - v_2^n(h), \quad \delta_{n+2} = v_2^{n+2}(h) - v_2^{n+1}(h).$$

Если выполняется условие

$$\delta_{n+1}\delta_{n+2} \geqslant -\omega\delta_{n+1}^2, \tag{65}$$

где $0 < \omega < 1$ – коэффициент сжатия итерационного метода, то два очередных шага считаются удачными, и итерационный процесс продолжается дальше. Если при этом левая часть неравенства (65) положительна, то значение параметра τ можно увеличить, положив

$$\tau_{n+4} = \tau_{n+3} = \theta\tau_n,$$

где $\theta > 1$ – коэффициент увеличения параметра τ.

Если условие (65) не выполняется, то необходимо повторить вычисление $(n+1)$-го и $(n+2)$-го приближений, положив

$$\tau_{n+2} = \tau_{n+1} = \vartheta\tau_n,$$

где $0 < \vartheta < 1$ – коэффициент уменьшения параметра τ.

7. Верификация вычислительного алгоритма. Разработанный вычислительный алгоритм построения передаточной функции реализован на языке FORTRAN 2008 в виде пакета модулей. Для верификации вычислительного алгоритма и программного обеспечения в качестве тестовых выбирались краевые задачи для следующих типов изотропных упругих полос:

– однородные полосы;

– непрерывно-неоднородные полосы, параметры Ламе материала которых являлись экспоненциальными функциями $\lambda(x_2) = \lambda_c \exp(\kappa x_2)$ и $\mu(x_2) = \mu_c \exp(\kappa x_2)$, где λ_c, μ_c и κ – константы;

– кусочно-однородные полосы с полностью сцепленными слоями.

Для упругих полос первого типа известно аналитическое выражение для передаточной функции [7, § 11], а для остальных строились численно-аналитические решения соответствующих краевых задач [8, § 14]. Анализ этих решений показал, что для рассматриваемого класса задач характерно следующее поведение решения: с ростом параметра α вблизи точки $x_2 = h$ возникает зона резкого изменения решения, ширина которой уменьшается по мере дальнейшего увеличения α. При решении таких задач методом конечных элементов целесообразно использовать адаптивные сетки.

В данной работе применялся следующий алгоритм построения сетки. Задавались общее количество конечных элементов и размер $l(\alpha)$ наименьшего конечного элемента, одним из узлов которого является точка $x_2 = h$. Размеры остальных вычислялись таким образом, чтобы образовывать геометрическую прогрессию по мере удаления элементов от точки $x_2 = h$. Эмпирически подобрана зависимость $l(\alpha) = 10^{-3}s$, где $s = 2\pi/\alpha$ – "длина волны", соответствующая "волновому числу" α.

При наличии разрывов первого рода у функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$, а именно такие разрывы могут быть у модулей упругости реальных слоистых тел, сетка конечных элементов адаптировалась так, чтобы точки разрывов совпадали с узлами конечных элементов. Такой подход позволяет применять при вычислении элементов матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ квадратурные формулы для непрерывных функций.

При использовании адаптивных сеток, состоящих из 200 конечных элементов, среднеквадратичные относительные расхождения численных решений, полученных с помощью разработанного алгоритма, с указанными выше решениями тестовых задач не превышали 10^{-5} при проведении вычислений с двойной точностью.

Для рассмотренного выше алгоритма выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$ на основе проведённых вычислительных экспериментов могут быть рекомендованы для использования следующие диапазоны значений параметров: $\omega = 0.4-0.6$, $\theta = 1.3-1.5$ и $\vartheta = 0.4-0.6$. В качестве примера для случая $\omega = 0.5$, $\theta = 1.4$, $\vartheta = 0.5$ в таблице приведена характерная зависимость общего количества итераций N с учётом повторения итераций при уменьшении параметра τ от начального значения параметра τ_0. Здесь же указаны конечные значения параметра τ_N и количество итераций N_0 для стационарного итерационного метода $(\tau = \tau_0)$. В качестве начального приближения решения использовался нулевой вектор. Для данного расчётного случая также были вычислены $\tau_{\text{opt}} = 1.0$ и $\tau_{\text{cr}} = 1.279$. Нетрудно видеть, что независимо от выбора τ_0 в процессе итераций параметр τ_n стремится к τ_{opt}. При отклонении начального значения τ_0 от τ_{opt} скорость сходимости нестационарного итерационного метода снижается, однако не так сильно, как в случае стационарного варианта. При отклонении τ_0 от τ_{opt} на пять порядков число итераций увеличилось менее чем в четыре раза.

Таблица. Результаты вычислительных экспериментов

τ_0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
τ_N	0.89	1.21	0.80	1.06	0.72	1.00	0.82	0.72	0.94	1.60	1.43
N	84	68	56	42	30	26	36	44	48	54	62
N_0	$>10^5$	$>10^5$	28115	2808	277	26	–	–	–	–	–

В результате вычислительных экспериментов установлено, что при использовании одного из указанных выше вариантов начального приближения решения и предложенного алгоритма выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$ итерационный метод (58), (59) сходится для любого начального значения параметра τ_0, изменяется лишь число итераций.

Отметим ещё одно экспериментально установленное свойство итерационного метода (58), (59). В таблице приведены данные расчётов для 200 конечных элементов. При изменении числа конечных элементов в диапазоне от 50 до 10^5 количество итераций как для нестационарного, так и стационарного вариантов итерационного метода оставалось неизменным. Этот факт можно объяснить удачным выбором предобуславливателя – матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$, операция умножения которой на вектор выполняется путём решения соответствующей СЛАУ методом прогонки. Кроме того, не изменялись значения τ_{opt} и τ_{cr}.

Заключение. Использование вариационной формулировки краевой задачи для трасформант перемещений позволило разработать эффективный алгоритм вычисления трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы изотропной стратифицированной упругой полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Разработанный вычислительный алгоритм может быть применён и в более общем случае – при наличии на границе полосы касательных напряжений. Изменится лишь вид линейной формы $l(\boldsymbol{w})$.

Отметим также, что предложенный подход к вычислению передаточной функции может быть обобщен на случай слоистой полосы при неполном сцеплении слоёв и на случай, когда упругая стратифицированная полоса сцеплена с упругой однородной полуплоскостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М., 1983.
2. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М., 2000.
3. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряжённых градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 154–172.
4. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // Прикл. математика и механика. 2022. Т. 86. № 3. С. 404–423.
5. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., 1967.
6. *Ватульян А.О., Плотников Д.К.* К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // Прикл. математика и механика. 2021. Т. 85. № 3. С. 283–293.
7. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974.
8. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham, 2016.
9. *Никишин В.С.* Статические контактные задачи для многослойных упругих тел // Механика контактных взаимодействий. М., 2001. С. 212–233.
10. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М., 2006.
11. *Aizikovich S.M., Galybin A.N., Krenev L.I.* Semi-analytical solution for mode I penny-shaped crack in a soft inhomogeneous layer // Int. J. Sol. Struct. 2015. V. 53. P. 129–137.
12. *Trubchik I., Evich L., Ladosha E.* Computational model of the deformation of thin gradient coating lying on nondeformable foundation // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1922. Art. 120011.
13. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
14. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М., 2011.
15. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М., 1983.
16. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 2002.
17. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск, 1997.
18. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
19. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М., 1984.
20. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М., 1983.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 18.09.2022 г.
После доработки 18.09.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.