

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Х. Г. Умаров

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, обобщающего уравнение колебаний кручения цилиндрического стержня при учёте внутреннего и внешнего затухания и моделирующего распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина, получены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

DOI: 10.31857/S0374064123010065, EDN: OBYMHZ

Введение. В статье рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - \beta u_{tx} + \gamma u_t = \sigma'(u_x) u_{xx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (2)$$

где $\mathbb{R}_+^1 = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u / \partial x$, коэффициенты α , β , γ – известные положительные числовые параметры, нелинейность $\sigma(\cdot)$ – заданная функция, не равная тождественно нулю.

Задача Коши исследуется в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \rightarrow \pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение*) $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{\mathbb{R}_+^1} \times \mathbb{R}^1$, $\overline{\mathbb{R}_+^1} = [0, +\infty)$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}^1]$.

Будем обозначать $C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}$, $k \in \mathbb{N}$, подмножества в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой $\|g\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)|$.

Нелинейность уравнения (1): $\sigma(r)$, $r \in \mathbb{R}^1$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geq 0$ является непрерывной неубывающей функцией и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы оценки

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\sigma^{(i)}(g(x))| \leq \left| \sigma^{(i)} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)| \right) \right|, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Если в уравнении (1) коэффициент $\beta = 0$, а функция $\sigma(r) = \eta r$, где $\eta = \text{const}$, то приходим [2, гл. 13] к уравнению колебаний кручения цилиндрического стержня (вала) при учёте внутреннего и внешнего затухания (коэффициенты α и γ характеризуют соответственно внутреннее и внешнее затухания вала), при этом $u = u(t, x)$ – угол скручивания в сечении вала.

Если коэффициенты $\beta = \gamma = 0$, то приходим к уравнению, которое описывает распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина [3, §§ 4.3, 6.4], где

*) Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

x – координата, характеризующая положение поперечного сечения стержня, $u = u(t, x)$ – продольное перемещение за время t , α – коэффициент вязкости, $\sigma(\cdot)$ – напряжение (внутренняя сила, возникающая в процессе деформации стержня).

Изучению различных аспектов уравнения (1) и его многомерных аналогов и обобщений посвящено большое количество работ (см. работы [2–8] и библиографию в них). В работах [4–8] исследуются вопросы существования и поведения решений различных начально-краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка, подобных уравнению (1) (в [4, 5] производная функции $\sigma(r)$ удовлетворяет условию $\sigma'(r) > 0$; в [7, 8] производная $\sigma'(r)$ переменного знака: $|\sigma'(r)| \leq c = \text{const}$ в [7] и $-\sigma'(r) \leq c = \text{const}$ в [8]; в [6] предполагается существование $h > 0$ такого, что $(\sigma(r_1) - \sigma(r_2))(r_1 - r_2) > 0$, как только $|r_1 - r_2| \geq h$).

Наряду с уравнением (1), будем рассматривать уравнение

$$v_{tt} - \alpha v_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma v_t = \partial_x^2 \sigma(v), \quad (4)$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$. Для этого уравнения начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi'(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi'(x). \quad (5)$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующему плану. Вначале, для того чтобы убедиться, что постановка задачи Коши (4), (5) корректна и локальное по времени решение существует, выведем соответствующее задаче (4), (5) нелинейное интегральное уравнение. Используя его, найдём временной отрезок существования и единственности классического решения задачи Коши (4), (5) и оценку нормы в $C[\mathbb{R}^1]$ этого локального по времени решения. Затем, установив связь между существованием локальных решений уравнений (4) и (1), найдём условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном временном отрезке для задачи Коши (1), (2).

1. Существование и единственность локального решения задачи Коши (4), (5).

Теорема 1. Пусть параметры α, β удовлетворяют условию $\alpha \geq \beta^2$, начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^{(3)}[\mathbb{R}^1]$, $\psi(x) \in C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$, а нелинейность $\sigma(\cdot)$ подчиняется требованиям (3). Тогда на отрезке $t \in [0, t_0]$ существует единственное классическое решение $v = v(t, x)$ задачи Коши (4), (5) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка $\|v(t, x)\|_C \leq H(t)$, $t \in [0, t_0]$, в которой как мажоранта нормы решения, так и длина отрезка t_0 определяются параметрами α, β, γ уравнения (1), начальными функциями $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейностью $\sigma(\cdot)$.

Доказательство. Полагая, что на некотором временном отрезке $[0, T]$ решение задачи Коши (4), (5) существует, а начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ достаточно гладкие, проинтегрируем обе части уравнения (4) по временной переменной t :

$$v_t - \alpha v_{xx} - \beta v_x + \gamma v = v_0(x) + \int_0^t \partial_x^2 \sigma(v) ds, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где $v_0(x) = \psi'(x) - \alpha \varphi'''(x) - \beta \varphi''(x) + \gamma \varphi'(x)$. Начальное условие для полученного интегродифференциального уравнения первого порядка (6):

$$v|_{t=0} = \varphi'(x). \quad (7)$$

Задачу Коши (6), (7) будем исследовать в банаховом пространстве $C_T = C([0, T], C[\mathbb{R}^1])$ непрерывных абстрактных функций $V = V(t) : [0, T] \ni t \rightarrow v = v(t, x) \in C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой

$$\|V\|_{C_T} = \max_{t \in [0, T]} \|V(t)\|_C = \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in \mathbb{R}^1}} |v(t, x)|.$$

Прежде чем приступить к записи уравнения (6) в абстрактной форме, напомним, что в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1; 9, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x (с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$) и ∂_x^2 ($D(\partial_x^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$) являются производящими операторами сильно непрерывных сжимающих соответственно группы

$$U(t; \partial_x)g(x) = g(x + t), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

и полугруппы

$$U(t; \partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x + \xi) d\xi, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1,$$

класса C_0 .

Для функции $g = g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ справедливо неравенство $\|g'\|_C^2 \leq 4\|g''\|_C\|g\|_C$ (см. [9, § 7.1]), используя которое заключаем, что оператор $\beta\partial_x$ подчинен оператору $\alpha\partial_x^2$ с границей, не превышающей β^2/α . Но тогда при выполнении условия $\beta^2 \leq \alpha$ возмущенный оператор

$$A_0 = \alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x, \quad D(A_0) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

является [9, § 8.1] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы класса C_0 : $\|U(t; A_0)\| \leq 1$, причём полуось $\mathbb{R}_+^1$ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 .

Введём в рассмотрение оператор

$$A = A_0 - \gamma I, \quad D(A) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

где I – тождественный оператор. На произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление полугруппы порождаемой оператором A :

$$U(t; A)g(x) = e^{-\gamma t} U(\beta t; \partial_x) U(\alpha t; \partial_x^2) g(x) = \frac{e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\pi \alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi - x - \beta t)^2 / (4\alpha t)} g(\xi) d\xi$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A)\| \leq e^{-\gamma t} \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Из оценки (8) следует, что числовая полуось $\lambda > -\gamma$ принадлежит резольвентному множеству оператора A , и значит, оператор A имеет ограниченный обратный: $D(A^{-1}) = C[\mathbb{R}^1]$, и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление

$$A^{-1}g(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-\gamma s} U(s; A_0)g(x) ds = -\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi,$$

где*) обозначено $\delta = \gamma + \beta^2/(4\alpha)$, и оценка нормы

$$\|A^{-1}\| \leq 1/\gamma. \quad (9)$$

Используя неравенство

$$\|\partial_x U(t; A_0)g(x)\|_C \leq \|g(x)\|_C / \sqrt{\pi \alpha t}, \quad t > 0, \quad g(x) \in C[\mathbb{R}^1], \quad (10)$$

для линейного ограниченного оператора

$$A_1 = \partial_x A^{-1}, \quad D(A_1) = C[\mathbb{R}^1],$$

*) Заметим, что $\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi| = 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|K(\xi) < 0$, где $K(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)\beta/(2\sqrt{\alpha\delta}) - 1$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

получим представление

$$A_1 g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi$$

и оценку нормы

$$\|A_1\| \leq 1/\sqrt{\alpha\gamma}. \quad (11)$$

Учитывая полученные формулы для операторов A^{-1} и A_1 , выводим представление для линейного ограниченного оператора

$$A_2 = \partial_x^2 A^{-1} = \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1), \quad D(A_2) = C[\mathbb{R}^1],$$

на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$:

$$A_2 g(x) = \alpha^{-1} \left(g(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} + \beta K(\xi) \right) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi \right), \quad (12)$$

и оценку нормы

$$\|A_2\| \leq \mu = \alpha^{-1}(2 + \beta/\sqrt{\alpha\gamma}). \quad (13)$$

Теперь уравнение (6) в пространстве C_T можно записать в абстрактном виде:

$$V'(t) - AV(t) = V_0 + A \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

где обозначено $V'(t) = dV(t)/dt$ и $V_0 = V'(0) - AV(0)$.

Применив к обеим частям уравнения (14) полугруппу $U(t - \tau; A)$, предварительно заменив в (14) переменную t на τ , получим

$$(U(t - \tau; A)V)'_{\tau} = U(t - \tau; A) \left(V_0 + A \int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right),$$

откуда, интегрируя обе части по переменной τ в пределах от 0 до t , выводим формулу

$$V(t) = U(t; A)V(0) + \int_0^t U(t - \tau; A)V_0 d\tau + \int_0^t U(t - \tau; A)A \left(\int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right) d\tau. \quad (15)$$

Первый интеграл в правой части (15) равен

$$J_1 = V(0) - U(t; A)V(0) + \int_0^t U(\tau; A)V'(0) d\tau,$$

откуда, используя обратимость оператора A , имеем $J_1 = [U(t; A) - I][A^{-1}V'(0) - V(0)]$.

Интегрируя по частям, вычисляем второй интеграл в (15):

$$J_2 = - \int_0^t (U(t - \tau; A))'_{\tau} \left(\int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right) d\tau =$$

$$= - \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau.$$

Подставив в равенство (15) найденные значения J_1 и J_2 , получим абстрактное нелинейное интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши (6), (7):

$$V(t) = W(t) + \int_0^t [U(t - \tau; A) - I] A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

где $W(t) = V(0) + [U(t; A) - I] A^{-1} V'(0)$ и $\|W(t)\|_C \leq p = \|\varphi'\|_C + 2\gamma^{-1} \|\psi'\|_C$.

Непрерывное решение интегрального уравнения (16) называется *обобщённым решением задачи Коши* (6), (7).

Пусть $V_i = V_i(t)$, $i = 1, 2$, – произвольные функции, принадлежащие замкнутому шару $C_{T,P}$ пространства C_T : $\|V_i(t)\|_{C_T} \leq P = \text{const}$. Из непрерывной дифференцируемости по Фреше оператора суперпозиции в пространстве непрерывных функций, а значит, оценки

$$\|\sigma(V_2) - \sigma(V_1)\|_{C_T} \leq l_{T,P} \|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

в которой $l_{T,P} = \sup_{V \in C_{T,P}} \|\sigma'(V)\|_{C_T}$, и ограниченности линейных операторов A_2 и $U(t; A)$ следует, что нелинейный оператор

$$(\Phi V)(t) = W(t) + \int_0^t [U(t - \tau; A) - I] A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

непрерывно отображает пространство C_T в себя и, более того, удовлетворяет локальному условию Липшица в шаре $C_{T,P}$:

$$\|(\Phi V_2)(t) - (\Phi V_1)(t)\|_{C_T} \leq t L_{T,P} \|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

где величина $t L_{T,P} = 2\|A_2\| l_{T,P} t < 1$, если $t < \alpha \sqrt{\alpha \gamma} / (2l_{T,P}(\beta + \sqrt{\alpha \gamma}))$. При этом если выполняется условие $p < (1 - L_{T,P})P$, то шар $C_{T,P}$ оператором Φ отображается в себя и Φ есть оператор сжатия в пространстве C_T . Следовательно, существует временной отрезок $[0, T_1]$, где $T_1 < \min\{1/L_{T,P}; (P - p)/L_{T,P}\}$, на котором задача Коши (6), (7) имеет единственное обобщённое решение $V = V(t)$, $t \in [0, T_1]$, т.е. единственное непрерывное решение интегрального уравнения (16) в шаре $C_{T,P}$.

Из интегрального уравнения (16), используя оценки (13), (8) и (3), выводим интегральное неравенство

$$\|v(t, x)\|_C \leq p + 2\mu \int_0^t |\sigma(\|v(s, x)\|_C)| ds, \quad t \in [0, T_1],$$

из которого в силу леммы Бихари [10, § 1.4] следует оценка нормы решения интегрального уравнения (16) на отрезке $[0, t_0] \subseteq [0, T_1]$:

$$\|v(t, x)\|_C \leq H(t) = G^{-1}(G(p) + 2\mu t), \quad (17)$$

где $G(\lambda) = \int_\xi^\lambda |\sigma(s)|^{-1} ds$ ($\xi > 0$, $\lambda > 0$), $G^{-1}(\cdot)$ – обратная к $G(\cdot)$ функция, а отрезок $[0, t_0]$ определяется условием принадлежности значений $G(p) + 2\mu t$ при $t \in [0, t_0]$ области определения функции $G^{-1}(\cdot)$.

Таким образом, на временном отрезке $[0, t_0]$ существует обобщённое решение $V(t)$ задачи Коши (6), (7), для нормы которого справедлива оценка (17) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$.

Теперь выясним, когда обобщённое решение $V(t)$, $t \in [0, t_0]$, задачи Коши (6), (7), будет классическим решением уравнения (4). Прежде всего отметим, что функция

$$V(t) = W(t) + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau - \int_0^t A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, t_0],$$

определяемая правой частью интегрального уравнения (16), является решением уравнения

$$V'(t) = AQ(t) + V_0, \quad (18)$$

где

$$Q(t) = V(t) + \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds = W(t) + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad (19)$$

если функция $Q(t)$ принимает значения из области определения оператора A , и при этом функция $AQ(t)$ непрерывна на отрезке $[0, t_0]$. Чтобы убедиться в этом, представим функцию $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = W(t) + \frac{1}{\alpha}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1)J(t), \quad (20)$$

где

$$J(t) = \int_0^t U(t - \tau; A) \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Требуемые от функции $Q(t)$ свойства будут выполнены, если таковыми обладают функции $W(t)$ и $J(t) : t \rightarrow j(t, x)$.

Чтобы проверить принадлежность $J(t) \in D(A)$ и непрерывность $AJ(t)$ на отрезке $[0, t_0]$, перейдём к образу $j(t, x)$ функции $J(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$j(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma(v(t - \tau, \xi)) d\xi, \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1,$$

где $\xi_{\alpha\beta}(x, \tau) = (\xi - x - \beta\tau)^2 / (4\alpha\tau)$, для нормы которого справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|j(t, x)\|_C &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} |\sigma(\|v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma(H(\tau))| \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \leq \frac{h}{\gamma}, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь $\eta_{\alpha\beta}(x, \tau) = x + \beta\tau + 2\eta\sqrt{\alpha\tau}$ и $h = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma(H(\tau))|$.

Покажем, что функция $j(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$.

Для производной функции $j(t, x)$ по переменной x справедлива формула

$$j_x(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) d\eta,$$

а для нормы – неравенства

$$\|j_x(t, x)\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma(H(t-\tau))| d\eta \leq \frac{2h}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Отсюда следует оценка

$$\|j_x(t, x)\|_C \leq \frac{h}{\sqrt{\alpha\gamma}} \quad (22)$$

и, значит, равномерная сходимость при $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$ интеграла, определяющего $j_x(t, x)$.

Из соотношений (20)–(22), (11), (13) и (9) следует, что на отрезке $[0, t_0]$ норма абстрактной функции $\partial_x Q(t)$ ограничена константой:

$$\|\partial_x Q(t)\|_C \leq \|\varphi''\|_C + \frac{2}{\sqrt{\alpha\gamma}} \|\psi'\|_C + \frac{h}{\alpha\sqrt{\alpha\gamma}} \left(2 + \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} \right) = q_1, \quad t \in [0, t_0].$$

Вернёмся к равенствам (19) и запишем в подробной форме первое из них (не применяя, чтобы не усложнять запись, представление (12) линейного ограниченного оператора A_2):

$$v(t, x) = q(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma(v(s, x)) ds \right), \quad (23)$$

где $q(t, x)$ – образ вектор-функции $Q(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$. Формально вычислим*) частную производную по переменной x от обеих частей равенства (23):

$$v_x(t, x) = q_x(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_x(s, x) ds \right).$$

При этом оператор A_2 вычисляется по формуле (12) от функции, определяемой интегралом $\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_x(s, x) ds \in C[\mathbb{R}^1]$, а из полученного интегрального уравнения следует интегральное неравенство

$$\|v_x(t, x)\|_C \leq q_1 + \mu h_1 \int_0^t \|v_x(s, x)\|_C ds,$$

где $h_1 = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma'(H(\tau))|$, из которого в силу леммы Гронуолла [10, § 1.1] выводится оценка нормы частной производной

$$\|v_x(t, x)\|_C \leq h_2, \quad t \in [0, t_0], \quad (24)$$

здесь $h_2 = q_1 e^{\mu h_1 t_0}$.

Для производной второго порядка функции $j(t, x)$ по переменной x справедливы формула

$$j_{xx}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_x(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) d\eta$$

и при $t \in [0, t_0]$ оценка

$$\|j_{xx}(t, x)\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma'(\|v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C)| \times$$

*) Для элементов банахова пространства $C[\mathbb{R}^1]$ справедлива оценка $\|\varphi \cdot \psi\|_C \leq \|\varphi\|_C \|\psi\|_C$, в силу чего с ним можно работать как с алгеброй [11, § 6.1].

$$\times \|v_x(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C d\eta \leq \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}. \quad (25)$$

Таким образом, функция $j(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$, что означает принадлежность значений функции $J(t)$, а значит, в силу (20) и функции $Q(t)$, области определения оператора A при $t \in [0, t_0]$, причём функции $AJ(t)$, $AQ(t)$ непрерывны на отрезке $[0, t_0]$, но тогда из равенства (18) следует непрерывность производной $V'(t)$ обобщённого решения на отрезке $[0, t_0]$.

Рассмотрим образ равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$v_t(t, x) = Aq(t, x) + v_0(x) = A[w(t, x) + \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A A_1)j(t, x)] + v_0(x) = U(t; A)\psi'(x) + j_{xx}(t, x),$$

из которого следует оценка

$$\|v_t(t, x)\|_C \leq h_3, \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1, \quad (26)$$

где $h_3 = \|\psi'\|_C + h_1 h_2 / \sqrt{\alpha\gamma}$.

Заметим, что из первого равенства в (19) следует соотношение $Q'(t) = V'(t) + A_2\sigma(V(t))$, устанавливающее непрерывность производной $Q'(t)$ на отрезке $[0, t_0]$.

Продифференцировав обе части равенства (18), имеем $V''(t) = AQ'(t)$. Поэтому, чтобы доказать, что обобщённое решение $V(t)$, $t \in [0, t_0]$, задачи Коши (6), (7) будет классическим решением уравнения (4), осталось показать принадлежность значений функции $Q'(t) \in D(A)$ и непрерывность функции $AQ'(t)$ при $t > 0$.

Из равенства (20) следует

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta A A_1)J(t), \quad (27)$$

где $AA_1 = (\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x - \gamma I)\partial_x A^{-1} = \alpha A_3 + \beta A_2 - \gamma A_1$, здесь $A_3 = \partial_x^3 A^{-1} = \alpha^{-1}(\partial_x - \beta A_2 + \gamma A_1)$, поэтому $AA_1 = \partial_x$, и тогда равенство (27) примет вид

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta\partial_x)J(t)$$

или, учитывая определение оператора A и соотношения $AW(t) = AV(0) + [U(t; A) - I]V'(0) = U(t; A)V'(0) - V_0$, имеем

$$AQ(t) = U(t; A)V'(0) + \partial_x^2 J(t) - V_0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (28)$$

Из соотношений (20)–(22), (28), (25), (11) и (13) следует, что на отрезке $[0, t_0]$ норма функции $\partial_x^2 Q(t)$ ограничена константой:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2 Q(t)\|_C &= \|q_{xx}(t, x)\|_C \leq \|\varphi'''\|_C + \frac{2}{\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right) \|\psi'\|_C + \\ &+ \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha\gamma}} \left[h_1 h_2 + \frac{h}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right) \right) \right] = q_2, \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (29)$$

Формально вычислив производную по переменной x от обеих частей равенства (23), получим

$$v_{xx}(t, x) = \tilde{q}(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_{xx}(s, x) ds \right), \quad (30)$$

где обозначено

$$\tilde{q}(t, x) = q_{xx}(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma''(v(s, x)) v_x^2(s, x) ds \right),$$

причём согласно соотношениям (29), (13), (17) и (24) имеем $\|\tilde{q}(t, x)\|_C \leq h_5$, где $h_5 = q_2 + \mu t_0 h_2^2 h_4$ и $h_4 = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma''(H(\tau))|$.

Из интегрального уравнения (30) следует интегральное неравенство

$$\|v_{xx}(t, x)\|_C \leq h_5 + \mu h_1 \int_0^t \|v_{xx}(s, x)\|_C ds,$$

из которого в силу леммы Гронуолла вытекает оценка нормы частной производной

$$\|v_{xx}(t, x)\|_C \leq h_6, \quad t \in [0, t_0], \quad (31)$$

где $h_6 = h_5 e^{\mu h_1 t_0}$.

Теперь вернёмся к образу равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ и вычислим производную по переменной x от обеих частей этого равенства: $v_{tx}(t, x) = \partial_x A Q(t) + v'_0(x)$, или согласно соотношению (27)

$$v_{tx}(t, x) = \partial_x U(t; A) \psi'(x) + j_{xxx}(t, x), \quad t \in [0, t_0]. \quad (32)$$

Используя неравенство (10), оценим норму первого слагаемого в правой части (32):

$$\|\partial_x U(t; A) \psi'(x)\|_C \leq e^{-\gamma t} \|\psi'\|_C / \sqrt{\pi \alpha t}, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (33)$$

Для второго слагаемого из (32) имеем представление

$$\begin{aligned} j_{xxx}(t, x) = & \frac{1}{\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} [\sigma''(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_x^2(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) + \\ & + \sigma'(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_{xx}(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))] d\eta \end{aligned}$$

и с учётом неравенств (3), (17), (24) и (31) оценку

$$\begin{aligned} \|j_{xxx}(t, x)\|_C \leq & \frac{1}{\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} [|\sigma''(H(t - \tau))| h_2^2 + \\ & + |\sigma'(H(t - \tau))| h_6] d\eta \leq \frac{h_2^2 h_4 + h_1 h_6}{\sqrt{\alpha \gamma}} = h_7, \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, применив неравенства (33) и (34), имеем оценку

$$\|v_{tx}(t, x)\|_C \leq e^{-\gamma t} \frac{\|\psi'\|_C}{\sqrt{\pi \alpha t}} + h_7 \leq \frac{h_8}{\sqrt{t}} + h_7, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (35)$$

где $h_8 = \|\psi'\|_C / \sqrt{\alpha \pi}$.

Для того чтобы получить оценку производной $v_{txx}(t, x) = \partial_x^2 V'(t)$, в силу соотношения (23) надо знать оценку нормы производной $q(t, x) = Q(t)$, и так как согласно (20)

$$Q'(t) = U(t; A) V'(0) + \frac{1}{\alpha} (I + \gamma A^{-1} - \beta A_1) J'(t),$$

то надо знать оценки производных функции $j(t, x) = J(t)$.

Для образа в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ функции $J'(t)$:

$$j_t(t, x) = U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma'(v(t - \tau, \xi)) v_t(t - \tau, \xi) d\xi,$$

используя неравенства (26), выводим оценку

$$\begin{aligned} & \|J'(t)\|_C = \|j_t(t, x)\|_C \leqslant \\ & \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|V(0)\|_C)| + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} |\sigma'(\|v(t-\tau, \xi)\|_C)| \|v_t(t-\tau, \xi)\|_C d\xi \leqslant \\ & \leqslant |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + \frac{h_1 h_3}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + h_1 h_3 = h_9. \end{aligned}$$

Образ $\partial_x J'(t)$ есть смешанная производная

$$\begin{aligned} & j_{tx}(t, x) = \partial_x U(t; A) \sigma(V(0)) + \\ & + \frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x - \beta\tau) e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma'(v(t-\tau, \xi)) v_t(t-\tau, \xi) d\xi = \\ & = \partial_x U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) d\eta, \end{aligned}$$

для которой, применяя неравенство (10), найдём оценку нормы

$$\begin{aligned} & \|\partial_x J'(t)\|_C = \|j_{tx}(t, x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / \sqrt{\pi\alpha t} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma'(H(t-\tau))| \|v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C d\eta \leqslant \frac{h_{10}}{\sqrt{t}} + h_{11}, \end{aligned}$$

где $h_{10} = |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / \sqrt{\alpha\pi}$ и $h_{11} = h_1 h_3 / \sqrt{\alpha\gamma}$.

Образ $\partial_x^2 J'(t)$ есть производная третьего порядка:

$$\begin{aligned} & j_{txx}(t, x) = \partial_x^2 U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} [\sigma''(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) v_x(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) + \\ & + \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_{tx}(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))] d\eta. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя неравенства (17), (24), (26), (35) и $\|\partial_x^2 U(t; A) \sigma(V(0))\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / (\alpha t)$, $0 < t \leqslant t_0$, получим оценку функции (36):

$$\begin{aligned} & \|\partial_x^2 J'(t)\|_C = \|j_{txx}(t, x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / (\alpha t) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} \left[|\sigma''(H(t-\tau))| h_2 h_3 + |\sigma'(H(t-\tau))| \left(\frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}} + h_7 \right) \right] d\eta \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} \left(h_2 h_3 h_4 + \left(h_7 + \frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}} \right) h_1 \right) ds = \\ &= \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{h_2 h_3 h_4 + h_1 h_7}{\sqrt{\gamma}} + h_1 h_8 \sqrt{\pi} \right) = \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + h_{12}, \quad 0 < t \leq t_0, \end{aligned} \quad (37)$$

где обозначено $h_{12} = \alpha^{-1/2}(\gamma^{-1/2}(h_2 h_3 h_4 + h_1 h_7) + h_1 h_8 \sqrt{\pi})$.

Теперь вернёмся к рассмотрению уравнения (30). Производная по переменной t от обеих частей этого уравнения приводит к соотношению

$$v_{txx}(t, x) = q_{txx}(t, x) - A_2(\sigma'(v(t, x))v_{xx}(t, x) + \sigma''(v(t, x))v_x^2(t, x)), \quad (38)$$

в котором, согласно равенству (20), $q_{txx}(t, x)$ есть образ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ абстрактной функции

$$\partial_x^2 Q'(t) = \partial_x^2 U(t; A)V'(0) + \frac{1}{\alpha} \partial_x^2 J'(t) - \frac{\beta}{\alpha} \partial_x J'(t) + \frac{1}{\alpha} \left[\left(\gamma + \frac{\beta^2}{\alpha} \right) A_2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha} A_1 \right] J'(t).$$

Из представления (38), используя неравенства (37), (13), (24) и (31), выводим оценку

$$\begin{aligned} \|v_{txx}(t, x)\|_C &\leq \|q_{txx}(t, x)\|_C + \|A_2\|(\|\sigma'(\|v(t, x)\|_C)\|v_{xx}(t, x)\|_C + \\ &+ \|\sigma''(\|v(t, x)\|_C)\|v_x^2(t, x)\|_C) \leq h_{10}\sqrt{\pi}/(t\sqrt{\alpha}) + h_{13}, \quad 0 < t \leq t_0, \end{aligned}$$

где $h_{13} = h_{12} + \mu(h_1 h_6 + h_4 h_2^2)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось оценить производную второго порядка $v_{tt}(t, x)$. Используя равенство (27), имеем

$$V''(t) = (\alpha \partial_x^2 + \beta \partial_x - \gamma I)U(t; A)V'(0) + \partial_x^2 J'(t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|v_{tt}(t, x)\|_C &\leq \alpha \|\partial_x^2 U(t; A)V'(0)\|_C + \beta \|\partial_x U(t; A)V'(0)\|_C + \gamma \|U(t; A)V'(0)\|_C + \|\partial_x^2 J'(t)\|_C \leq \\ &\leq e^{-\gamma t}(\|\psi'\|_C/t + \beta \|\psi'\|_C/\sqrt{\alpha\pi t} + \gamma \|\psi'\|_C) + \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \quad 0 < t \leq t_0. \end{aligned}$$

2. Связь между решениями уравнений (1) и (4). В дальнейших рассуждениях $L_2(\mathbb{R}^1)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом, а $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ – пространство Соболева. Напомним определения скалярного произведения $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x) dx$ и нормы $\|\varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx)^{1/2}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и оценку

$$\|g\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)| \leq \|g\|_{W_2^1} = (\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)^{1/2}, \quad (39)$$

справедливую для функций $g(x) \in C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, причём если $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равен нулю (см. [12]).

Лемма. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $\sigma'(0) = 0$ в дополнение к условиям (3), а классические решения $u(t, x)$ и $v(t, x)$ уравнений (1) и (4) и их частные производные $u_t(t, x)$ и $v_t(t, x)$ для всех значений $t \in [0, t_0]$ по переменной x принадлежат пересечению пространств $C[\mathbb{R}^1]$ и $W_2^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда из существования локального классического решения $v = v(t, x)$, $t \in [0, t_0]$, уравнения (4) следует существование соответствующего классического решения $u = u(t, x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0, t_0]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_x(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_t(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_{tx}(t, x) = 0,$$

поэтому $\int_{-\infty}^x v_{t\xi}(t, \xi) d\xi = v_t(t, x)$ и $\int_{-\infty}^x v_{t\xi\xi}(t, \xi) d\xi = v_{tx}(t, x)$. Далее, учитывая непрерывность функции $\sigma'(\cdot)$ и равенство $\sigma'(0) = 0$, получим $\int_{-\infty}^x (\sigma(v(t, \xi)))_{\xi\xi} d\xi = (\sigma(v(t, x)))_x$. Используя полученные представления, убеждаемся, что функция $u(t, x) = \int_{-\infty}^x v(t, \xi) d\xi$ является решением уравнения (1).

3. Условия существования глобального решения задачи Коши (1), (2). Полагая $t \in [0, t_0]$, введём в рассмотрение два функционала, связанных с уравнениями (1) и (4):

$$F_1(t) = (u, u) + (u_x, u_x) + (u_{xx}, u_{xx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2) dx$$

и

$$F_2(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) + (u_{ttx}, u_{ttx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2 + u_{ttx}^2) dx. \quad (40)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры уравнения (1) удовлетворяют условиям $\alpha, \gamma \geq 2$ и $\beta \leq 1$, а начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условию $\gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2\|\psi\|_2^2 \geq 2(\varphi + \varphi'', \psi)$. Тогда существует единственное глобальное классическое решение $u = u(t, x) \in C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, задачи Коши (1), (2), для которого в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ справедлива оценка

$$\|u(t, x)\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u(t, x)| \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad c_{1,2} = \text{const} \geq 0,$$

причём частные производные решения $u_x(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ для $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$ также принадлежат пересечению $C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на $u = u(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x . Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(t, x) = 0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2) = (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) - \beta (u_x, u_t) - (u, u_{tt}), \quad (41)$$

следовательно, интегрируя далее по переменной t , имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi\|_2^2 + \\ &+ 2 \int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau - 2 \int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения (1) на u_{xx} , выводим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_{xx}\|_2^2 + \gamma \|u_x\|_2^2) = (u_{xx}, u_{tt}) - \beta (u_{xx}, u_{tx}) - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)), \quad (43)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \alpha \|u_{xx}\|_2^2 + \gamma \|u_x\|_2^2 &= \alpha \|\varphi''\|_2^2 + \gamma \|\varphi'\|_2^2 + \\ &+ 2 \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

Складывая равенства (42) и (44), получаем

$$\begin{aligned} & \gamma \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + \alpha \|u_{xx}\|_2^2 = \\ & = \gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2 \int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau - 2 \int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau + \\ & + 2 \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau. \end{aligned} \quad (45)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, интегрируя по частям и используя условие (3), последовательно рассмотрим интегралы в правой части равенства (45):

1) $\int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|u\|_2^2 + \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \right),$
так как

$$\int_0^t \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq \int_0^t \left(\left| \sigma' \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u_x| \right) \right| \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \right) d\tau \leq h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau;$$

2) $\int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \right);$

3) $\int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau = \int_0^t [(u, u_\tau)_\tau - (u_\tau, u_\tau)] d\tau = (u, u_\tau)|_0^t - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \leq (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2)/2 - (\varphi, \psi);$

4) $\int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau = \int_0^t [(u_{xx}, u_\tau)_\tau - (u_{\tau xx}, u_\tau)] d\tau = (u_{xx}, u_t) - (\varphi'', \psi) + \int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau x}) d\tau \leq$
 $\leq (\|u_t\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2)/2 - (\varphi'', \psi) + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau;$

5) $\int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau \right);$

6) $\int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 \sigma'(u_x) dx \leq \int_0^t \left| \sigma' \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u_x| \right) \right| \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq h_1 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau.$

С учётом найденных оценок интегралов и обозначения

$$h_{14} = \gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 - 2(\varphi + \varphi'', \psi)$$

из (45) получим

$$(\gamma - 1) \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + (\alpha - 1) \|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{14} + 2 \|u_t\|_2^2 + \beta \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + (\beta + 2) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau +$$

$$+ \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (h_1^2 + 2h_1 + \beta) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (46)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_t и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x . Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_t(t, x) = 0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + \alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 = (u_t, \sigma'(u_x) u_{xx}), \quad (47)$$

из которого с учётом неравенства Коши–Буняковского и условия (3) следует неравенство

$$\|u_t\|_2^2 + (2\gamma - 1) \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau \leq \|\psi\|_2^2 + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (48)$$

Пусть оба коэффициента α и γ уравнения (1) не меньше, чем величина $(\beta/2 + 1)/2$, тогда, применив к неравенству (44) оценку (48), получим

$$\begin{aligned} & (\gamma - 1) \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + (\alpha - 1) \|u_{xx}\|_2^2 \leq \\ & \leq h_{14} + 2\|\psi\|_2^2 + \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (2h_1^2 + 2h_1 + \beta) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая, что параметры $\alpha \geq 2$ и $\gamma \geq 2$, и обозначая $h_{15} = h_{14} + 2\|\psi\|_2^2$ и $h_{16} = 2h_1^2 + 2h_1 + \beta + 1$, выводим интегральное неравенство

$$F_1(t) \leq h_{15} + h_{16} \int_0^t F_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_0]. \quad (49)$$

Потребуем, чтобы начальные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ удовлетворяли соотношению $\gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2\|\psi\|_2^2 - 2(\varphi + \varphi'', \psi) \geq 0$, тогда к неравенству (49) применима лемма Гронуолла и, значит, на всей временной полуоси $t \geq 0$ справедлива оценка

$$F_1(t) = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{15} e^{h_{16}t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1. \quad (50)$$

Применив полученную оценку (50) к неравенству (48), приходим к интегральному неравенству

$$\|u_t\|_2^2 \leq \|\psi\|_2^2 + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau,$$

и, следовательно, по лемме Гронуолла имеет место оценка

$$\|u_t\|_2^2 \leq S_1(t) = \|\psi\|_2^2 + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}} e^{h_{16}t} + \left(\|\psi\|_2^2 t + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}^2} e^{h_{16}t} \right) e^t, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1. \quad (51)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{tt} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x . Тогда, интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{tx}(t, x) = 0$, получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2) + \|u_{tt}\|_2^2 = \beta (u_{tx}, u_{tt}) + (\sigma'(u_x) u_{xx}, u_{tt}), \quad (52)$$

из которого, используя условие (3) и обозначая $h_{17} = \|\psi\|_{W_2^1}^2 \max\{\alpha, \gamma\}$, следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 + 2 \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau &\leq h_{17} + 2\beta \int_0^t (u_{tx}, u_{\tau\tau}) d\tau + 2 \int_0^t (\sigma'(u_x)u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau \leq \\ &\leq h_{17} + \beta \left(\int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau \right) + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (50) выводим

$$\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 + (1 - \beta) \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau \leq h_{17} + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \beta \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau$$

и, положив $\beta \leq 1$, приходим к интегральному неравенству

$$\|u_{tx}\|_2^2 \leq h_{17} + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \beta \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau.$$

Тогда в силу леммы Гронвулла получаем оценку

$$\|u_{tx}\|_2^2 \leq S_2(t) = h_{17} + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}} e^{h_{16}t} + \beta \left(h_{17}t + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}^2} e^{h_{16}t} \right) e^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+^1. \quad (53)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{txx} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x . Интегрируя по частям и учитывая, что $(u_{tx}, u_{txx}) = 0$, получаем равенство

$$\alpha \|u_{txx}\|_2^2 + \gamma \|u_{tx}\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 = -(\sigma'(u_x)u_{xx}, u_{txx}),$$

из которого, уменьшая левую часть, используя неравенство Коши–Буняковского и оценку (50), следует цепочка неравенств

$$\alpha \|u_{txx}\|_2^2 \leq \|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2 \|u_{txx}\|_2 + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| \leq \frac{1}{2} (h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} + \|u_{txx}\|_2^2) + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right|,$$

и так как $\alpha \geq 2$, то

$$\|u_{txx}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right|. \quad (54)$$

Вернёмся к равенству (47): уменьшив его левую часть и одновременно применив неравенство Коши–Буняковского к правой части с последующим применением оценок (50) и (51), получим цепочку неравенств

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq 2|(u_t, \sigma'(u_x)u_{xx})| \leq \|u_t\|_2^2 + h_1^2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq S_1(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq S_1(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}.$$

Теперь вернёмся к равенству (52): применим неравенство Коши–Буняковского к правой части (52) с последующим применением оценок (50) и (53) и получим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2) + 2\|u_{tt}\|_2^2 &\leq \beta \|u_{tx}\|_2^2 + \beta \|u_{tt}\|_2^2 + h_1^2 \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq \\ &\leq (\beta + 1)\|u_{tt}\|_2^2 + S_2(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}, \end{aligned}$$

откуда (так как $\alpha \geq 2$, а $\beta \leq 1$) имеем

$$\alpha \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| - \gamma \left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq \alpha \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + (1 - \beta) \|u_{tt}\|_2^2 \leq S_2(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| \leq \gamma S_1(t) + S_2(t) + (1 + \gamma) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (55)$$

Далее из неравенств (54) и (55) выводим оценку

$$\|u_{txx}\|_2^2 \leq \gamma S_1(t) + S_2(t) + \left(\frac{3}{2} + \gamma \right) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (56)$$

Таким образом, из неравенств (51), (53) и (56) вытекает оценка на всей временной полуоси $t \geq 0$ функционала (40):

$$F_2(t) = \|u_t\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 \leq (1 + \gamma) S_1(t) + 2S_2(t) + \left(\frac{3}{2} + \gamma \right) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (57)$$

Из априорных оценок (50) и (57) следует, что классические решения $u = u(t, x)$ и $v = v(t, x)$ уравнений (1) и (4) соответственно принадлежат пространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ для всех $t \geq 0$, причём в силу неравенств (39) из (50) выводим оценку нормы решения $u = u(t, x)$ уравнения (1) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$\|u(t, x)\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u(t, x)| \leq \sqrt{h_{15}} e^{h_{16}t/2}, \quad t \geq 0,$$

обеспечивающую*) существование глобального решения задачи Коши (1), (2).

4. Условия разрушения решения задачи Коши (1), (2) на конечном временном отрезке. Введём в рассмотрение функционалы, связанные с уравнением (1):

$$f_1(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx, \quad t \in [0, t_0], \quad (58)$$

и

$$f_2(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx, \quad t \in [0, t_0]. \quad (59)$$

*) Здесь, учитывая априорные оценки (50) и (57), используется следующий алгоритм [12]: принимаем $v(t_0, x)$ за новую начальную функцию и отмечаем, что функция $v(t_0, x)$ обладает тем же набором свойств, которые, будучи допущенными для функции $v(0, x)$, позволили доказать существование как классического решения $v(t, x)$ уравнения (4) на отрезке $0 \leq t \leq t_0$, так и соответствующего ему решения $u(t, x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0, t_0]$, классическое решение $v(t, x)$ с отрезка $[0, t_0]$ продолжается до классического решения $v(t, x)$, $t \in [0, t_0 + t_1]$, где величина t_1 зависит от параметров α , β , γ , начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $\sigma(\cdot)$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим неограниченное расширение временного интервала, в течение которого гарантируется решение, т.е. получим классическое решение задачи Коши для уравнения (1) на произвольном временном интервале.

Исследуем вопрос о разрушении решения уравнения (1) на некотором конечном временном отрезке $[0, t_{01}] \subseteq [0, t_0]$, т.е. получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $f_1(t)$. Отрезок $[0, t_{01}]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось требование $f_1(t) > 0$, которое следует из начального условия $f_1(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры α , β , γ , нелинейность $\sigma(\cdot)$ и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют требованиям:

$$\alpha > 1 + 2 \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma'(H(\tau))|, \quad \gamma > 1, \quad \beta < 1,$$

$$f_1''(0) + h_{25}f_1(0) + h_{34} \geq 0, \quad f_1'(0) > \left(4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)}\right)f_1(0) > 0,$$

в которых постоянные величины $h_i = h_i(\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi; \sigma)$ определяются в ходе доказательства теоремы. Тогда решение разрушается за конечное время T_0 , и для времени существования решения справедлива оценка сверху

$$t_0 < T_0 = \frac{(f_1(0))^{1-h_{33}/4}}{h_{41}},$$

притом для функционала (58) имеет место оценка снизу

$$f_1(t) \geq \frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t]^{4/(h_{33}-4)}}.$$

Доказательство. Применим к квадрату производной $f_1'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{tx})$ неравенство Коши–Буняковского и получим вспомогательную оценку

$$(f_1'(t))^2 \leq 4f_1(t)f_2(t). \quad (60)$$

Вычисляя производную второго порядка функционала (58), выводим равенство, связывающее функционалы (58) и (59):

$$f_2(t) = \frac{1}{2}f_1''(t) + (u_{xx} - u, u_{tt}). \quad (61)$$

Из равенства (41) имеем

$$(u, u_{tt}) = (u, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \beta(u_x, u_t) - \alpha(u_x, u_{tx}) - \gamma(u, u_t), \quad (62)$$

следовательно, применив неравенство Коши–Буняковского, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |(u, u_{tt})| &\leq \frac{1+\gamma}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{\beta+\gamma}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_{tx}\|_2^2 + \frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2 \leq \\ &\leq h_{18}f_1(t) + h_{19}f_2(t) + \frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2, \end{aligned}$$

где обозначено $h_{18} = \max\{(\alpha + \beta)/2, (1 + \gamma)/2\}$ и $h_{19} = \max\{\alpha/2, (\beta + \gamma)/2\}$.

Аналогично из равенства (43) имеем

$$(u_{xx}, u_{tt}) = (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + \beta(u_{xx}, u_{tx}) + \alpha(u_x, u_{tx}) + \gamma(u, u_t) \quad (63)$$

и, значит,

$$|(u_{xx}, u_{tt})| \leq \frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\|u_{tx}\|_2^2 + \left(\frac{\beta}{2} + h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2 \leq$$

$$\leq h_{19}f_1(t) + h_{20}f_2(t) + \left(\frac{\beta}{2} + h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2,$$

где обозначено $h_{20} = \max\{\alpha/2, \gamma/2\}$ и $h_{21} = \max\{(\alpha + \beta)/2, \gamma/2\}$.

Одновременно рассмотрев соотношения (61)–(63), выводим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_1''(t) &= f_2(t) + (u, u_{tt}) - (u_{xx}, u_{tt}) = f_2(t) + (u, \sigma'(u_x)u_{xx}) - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) - \\ &\quad - 2\gamma(u, u_t) - \beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] - 2\alpha(u_x, u_{tx}), \end{aligned} \quad (64)$$

используемое для вычисления значения производной $f_1''(t)$ в нуле.

Учитывая уравнение (1) и равенства $(u_t, u_{tx}) = 0$ и $(u_{txx}, u_{tx}) = 0$, найдём производную функционала (59):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_2'(t) &= (u_t, u_{tt}) - (u_{txx}, u_{tt}) = \\ &= (u_t, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \alpha\|u_{tx}\|_2^2 - \gamma\|u_t\|_2^2 - (u_{txx}, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \alpha\|u_{txx}\|_2^2 - \gamma\|u_{tx}\|_2^2, \end{aligned}$$

затем, группируя слагаемые и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} f_2(t) + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2\gamma \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau = \\ = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + 2 \int_0^t (u_{\tau}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{\tau xx}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau. \end{aligned}$$

Далее, вычисляя второй интеграл в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^t \sigma'(u_x)(u_{xx}^2)_{\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sigma'(u_x)u_{xx}^2|_0^t - \int_0^t u_{xx}^2 \sigma''(u_x)u_{\tau x} d\tau \right] dx = \\ &= (\sigma'(u_x), u_{xx}^2) - (\sigma'(\varphi'), (\varphi''(x))^2) - \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau \end{aligned}$$

и обозначая $h_{22} = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + (\sigma'(\varphi'), (\varphi''(x))^2)$, получаем

$$\begin{aligned} f_2(t) + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2\gamma \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau = \\ = h_{22} - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + 2 \int_0^t (u_{\tau}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau + \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau. \end{aligned} \quad (65)$$

Умножим обе части равенства (65) на пока неопределённое положительное число $k \geq 2$ и сложим равенства (64) и (65), предварительно записав (64) в виде

$$2f_2(t) = f_1''(t) - 2(u, \sigma'(u_x)u_{xx}) + 2(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + 4\alpha(u_x, u_{tx}) + 2\beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] + 4\gamma(u, u_t).$$

Тогда, используя оценку (24) и обозначая

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^1 \\ t \in [0, t_0]}} (\sigma''(u_x))^2 u_{xx}^2 \leq h_2^2 \max_{t \in [0, t_0]} (\sigma''(H(t)))^2 = h_{23},$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 & (2+k)f_2(t) + 2k\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2k(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2k\gamma \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau = \\
 & = kh_{22} + 2k \int_0^t (u_\tau, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau + k \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau - (k-2)(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) - \\
 & \quad - 2(u, \sigma'(u_x)u_{xx}) + f_1''(t) + 4\alpha(u_x, u_{tx}) + 2\beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] + 4\gamma(u, u_t) \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (1+2\gamma)\|u\|_2^2 + (2\alpha + \beta)\|u_x\|_2^2 + (\beta + 2\gamma)\|u_t\|_2^2 + (2\alpha + \beta)\|u_{tx}\|_2^2 + \\
 & \quad + k \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \frac{k}{2} \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + kh_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \frac{k}{2} \int_0^t \|\sigma''(u_x)u_{xx}^2\|_2^2 d\tau + \\
 & \quad + (\beta + h_1^2)\|u_{xx}\|_2^2 + |k-2|(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha + \beta + 2\gamma + 1)f_1(t) + 2(\alpha + \beta + \gamma)f_2(t) + k \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \\
 & \quad + \frac{k}{2} \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k\left(h_1^2 + \frac{h_{23}}{2}\right) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau,
 \end{aligned}$$

откуда выводим неравенство

$$\begin{aligned}
 & (k+2-2(\alpha + \beta + \gamma))f_2(t) + k\left(2\alpha + 2\gamma - \frac{1}{2}\right) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + k(2\gamma - 1) \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha + \beta + 2\gamma + 1)f_1(t) + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k(h_1^2 + h_{23}/2) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau.
 \end{aligned}$$

Пусть $\gamma \geq 1/2$. Уменьшив левую часть последнего неравенства и обозначив $h_{24} = k + 2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)$, $h_{25} = 2\alpha + \beta + 2\gamma + 1$, $h_{26} = \beta + h_1^2 + |k-2|h_1$, $h_{27} = k(h_1^2 + h_{23}/2)$, $E_1(t) = kh_{22} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t)$, имеем

$$h_{24}f_2(t) \leq E_1(t) + h_{26}\|u_{xx}\|_2^2 + h_{27} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (66)$$

Вернёмся к рассмотрению неравенства (46): уменьшая его левую часть и увеличивая правую, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma > 1$, обозначая $h_{28} = (\alpha - 1)^{-1}(h_1^2 + 2h_1 + \beta)$ и

$$E_2(t) = (\alpha - 1)^{-1} \left(h_{14} + 2f_2(t) + (\beta + 2) \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 1) \int_0^t f_1(\tau) d\tau \right),$$

получаем интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq E_2(t) + h_{28} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau,$$

откуда в силу леммы Гронуолла выводим оценку

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq E_2(t) + h_{28} \int_0^t E_2(\tau) e^{h_{28}(t-\tau)} d\tau \leq E_2(t) + h_{29} \int_0^t E_2(\tau) d\tau, \quad (67)$$

где обозначено $h_{29} = h_{28}e^{h_{28}t_0}$.

Интегрируя по частям

$$\int_0^t \left(\int_0^\tau f_i(s) ds \right) d\tau = \tau \int_0^\tau f_i(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau f_i(\tau) d\tau \leq t \int_0^t f_i(\tau) d\tau \leq t_0 \int_0^t f_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

оценим интеграл в (67):

$$\int_0^t E_2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(h_{14}t_0 + 2 \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 2)t_0 \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 1) \int_0^t f_1(\tau) d\tau \right).$$

Применим полученную оценку для увеличения правой части неравенства (66) и обозначим $h_{30} = (\alpha - 1)^{-1}h_{14}(1 + h_{29}t_0)$, $h_{31} = (\alpha - 1)^{-1}[\beta + 2 + (2 + (\beta + 2)t_0)h_{29}]$, $h_{32} = (\alpha - 1)^{-1}(\beta + 1) \times (1 + h_{29}t_0)$. В результате имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{30} + \frac{2}{\alpha - 1} f_2(t) + h_{31} \int_0^t f_2(\tau) d\tau + h_{32} \int_0^t f_1(\tau) d\tau. \quad (68)$$

Теперь вернёмся к рассмотрению неравенства (66): применив (68), увеличим его правую часть:

$$\begin{aligned} h_{24}f_2(t) &\leq kh_{22} + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{30} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + \frac{2h_{26}}{\alpha - 1}f_2(t) + \\ &+ \left((h_{26} + h_{27}t_0)h_{31} + \frac{2h_{27}}{\alpha - 1} \right) \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{32} \int_0^t f_1(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

откуда, полагая

$$\alpha > 2h_1 + 1, \quad (69)$$

обозначая $h_{33} = h_{24} - 2h_{26}/(\alpha - 1)$, $h_{34} = kh_{22} + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{30}$, $h_{35} = (h_{26} + h_{27}t_0)h_{32}$, $h_{36} = (h_{26} + h_{27}t_0)h_{31} + 2h_{27}/(\alpha - 1)$,

$$E_3(t) = h_{34} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + h_{35} \int_0^t f_1(\tau) d\tau$$

и требуя $h_{33} > 0$, что приводит к условию

$$k > 2[(\alpha - 1)(\alpha + \beta + \gamma - 1) + h_1^2 - 2h_1 + \beta]/(\alpha - 2h_1 - 1),$$

имеем

$$f_2(t) \leq \frac{1}{h_{33}} E_3(t) + \frac{h_{36}}{h_{33}} \int_0^t f_2(\tau) d\tau. \quad (70)$$

Пусть $h_{34} + f_1''(0) + h_{25}f_1(0) \geq 0$, тогда на некотором отрезке $[0, t_{02}] \subseteq [0, t_{01}]$ справедливо неравенство $E_3(t) \geq 0$, поэтому к интегральному неравенству (70) применима лемма Гронуолла и, значит, справедлива оценка

$$h_{33}f_2(t) \leq E_3(t) + h_{37} \int_0^t E_3(\tau) d\tau, \quad (71)$$

где обозначено $h_{37} = e^{t_0 h_{36}/h_{33}} h_{36}/h_{33}$.

Оценивая интеграл в правой части неравенства (71), имеем

$$\int_0^t E_3(\tau) d\tau \leq h_{34}t_0 + f_1'(t) - f_1'(0) + (h_{25} + h_{35}t_0) \int_0^t f_1(\tau) d\tau. \quad (72)$$

Пусть выполняется условие $f_1'(0) = 2[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')] > 0$. Тогда на отрезке $[0, t_{03}] \subseteq [0, t_{02}]$ справедливо неравенство $f_1'(t) \geq 0$, и поэтому справедлива оценка

$$\int_0^t f_1(\tau) d\tau = tf_1(t) - \int_0^t \tau f_1'(\tau) d\tau \leq t_0 f_1(t),$$

с учётом которой неравенство (72) примет вид

$$\int_0^t E_3(\tau) d\tau \leq h_{34}t_0 + f_1'(t) + (h_{25} + h_{35}t_0)t_0 f_1(t). \quad (73)$$

Из (71) и (73), обозначая $h_{38} = h_{34} + h_{37}h_{34}t_0$ и $h_{39} = (h_{25} + h_{35}t_0)(1 + h_{37})$, выводим

$$h_{33}f_2(t) \leq f_1''(t) + h_{37}f_1'(t) + h_{39}f_1(t) + h_{38}, \quad t \in [0, t_{03}]. \quad (74)$$

Оценивая снизу левую часть неравенства (74) с учётом соотношения (60), получаем

$$f_1(t)f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4}(f_1'(t))^2 + h_{37}f_1(t)f_1'(t) + h_{39}f_1^2(t) + h_{38}f_1(t) \geq 0,$$

причём, так как $f_1(t) \geq f_1(0) > 0$ на отрезке $[0, t_{03}]$, то $h_{38}f_1(t) \leq (h_{38}/f_1(0))f_1^2(t)$ и, значит,

$$f_1(t)f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4}(f_1'(t))^2 + h_{37}f_1(t)f_1'(t) + h_{40}f_1^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_{03}], \quad (75)$$

где обозначено $h_{40} = h_{39} + h_{38}/f_1(0)$.

К полученному обыкновенному дифференциальному неравенству (75) можно применить результат, приведённый в монографии [13, приложение, § 2, формула (2.9)], если потребовать $h_{33}/4 > 1$, и, значит, при выполнении условия (69) справедлива оценка ранее неопределённого числа k :

$$k = k_0 > \max\{2, 2[(\alpha - 1)(\alpha + \beta + \gamma + 1) + \beta + h_1^2 - 2h_1]/(\alpha - 2h_1 - 1)\}.$$

Теперь, полагая во всех соотношениях (в которых фигурирует) число k равным k_0 , из неравенства (75) заключаем, что если в дополнении к ранее приведённым условиям потребовать выполнения неравенства

$$f_1'(0) > (4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)})f_1(0),$$

то время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = (f_1(0))^{1-h_{33}/4}/h_{41}$, где

$$h_{41} = \left(\frac{h_{33}}{4} - 1 \right) (f_1(0))^{-h_{33}/4} \left[\left(f_1'(0) - \frac{4h_{37}}{h_{33}-4} f_1(0) \right)^2 - \frac{4h_{40}}{h_{33}-4} (f_1(0))^2 \right] > 0,$$

причём для функционала $f_1(t)$ справедлива оценка снизу

$$f_1(t) \geq \frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t]^{4/(h_{33}-4)}},$$

и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
3. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М., 2002.
4. Greenberg J.M., McCamy R.C., Mizel V.J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. and Mech. 1968. V. 17. P. 707–728.
5. Webb G.F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Canad. J. Math. 1980. V. 32. № 3. P. 631–643.
6. Andrews G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ // J. Differ. Equat. 1980. V. 35. № 2. P. 200–231.
7. Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.Н. Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. № 6. С. 81–86.
8. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск, 1983.
9. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 28. М., 1990. С. 87–202.
10. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002.
11. Appell J., Zabrejko P.P. Nonlinear Superposition Operators. Cambridge, 1990.
12. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
13. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М., 2014.

Академия наук Чеченской Республики,
г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический
университет, г. Грозный

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.
После доработки 07.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.