ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 35–50

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.25

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНТРОПИЙНЫХ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА–ОРЛИЧА

© 2023 г. Л. М. Кожевникова, А. П. Кашникова

Рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака–Орлича, и правой частью из пространства $L_1(\Omega)$. В пространствах Музилака–Орлича–Соболева устанавливаются некоторые свойства и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях с липшицевой границей. Кроме того, доказывается эквивалентность и знакоопределённость энтропийных и ренормализованных решений.

DOI: 10.31857/S0374064123010053, EDN: OBVGXN

Введение. В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) + b(\boldsymbol{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

в строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, с конечной мерой. Здесь функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = (a_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \ldots, a_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеют рост, определяемый обобщённой N-функцией $M(\boldsymbol{x}, z)$.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. Для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) = \mu, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3}$$

с ограниченной мерой μ в работе [1] И. Хлебицка в рефлексивном пространстве Музилака–Орлича доказала существование ренормализованного решения задачи Дирихле, а также единственность ренормализованного решения уравнения (3) с диффузной мерой μ.

Если функция Музилака–Орлича M не удовлетворяет Δ_2-условию, то соответствующее пространство Музилака–Орлича не является рефлексивным, и рассматриваемая задача значительно усложняется. Обычно, если ограничений на рост обобщённой N-функции $M(\boldsymbol{x}, z)$ не требуется, то предполагается, что она подчиняется условию log-гёльдеровой непрерывности по переменной $\boldsymbol{x} \in \Omega$, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам пространства Музилака–Орлича.

Существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$ и с неоднородной анизотропной функцией Музилака–Орлича доказано в работе [2], а в статье [3] – существование и единственность ренормализованных решений эллиптических включений с многозначным оператором в условиях нерефлексивных и несепарабельных пространств Музилака–Орлича.

В работах [4] и [5] установлено существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) + \boldsymbol{c}(u)) + a_0(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

с функцией $\boldsymbol{c} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, u)) + a_0(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0, доказано в работах [6, 7] при $a_0 \equiv 0$ и в [8].

В работе [9] в пространствах Музилака–Орлича доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$, установлена их эквивалентность.

В настоящей статье получены некоторые свойства и доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле (1), (2) в нерефлексивных пространствах Музилака–Орлича в строго липшицевых областях Ω с конечной мерой. Кроме того, доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи. Ранее в работе [10] в произвольных областях установлен аналогичный результат в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями $(M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(\boldsymbol{x})}$, $p_i \in (1, \infty)$, $i = \overline{1, n})$.

1. Пространства Музилака–Орлича–Соболева. В этом пункте приведём необходимые сведения из теории обобщённых N-функций и пространств Музилака–Орлича (см. [11, гл. 1; 12, 13]).

Определение 1. Пусть функция $M(\boldsymbol{x}, z) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\boldsymbol{x}, \cdot)$ – N-функция по $z \in \mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, возрастающей при $z \in \mathbb{R}_+$, чётной, непрерывной, $M(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, и выполняются соотношения

$$\inf_{\boldsymbol{x} \in \Omega} M(\boldsymbol{x}, z) > 0 \quad \text{для всех} \quad z \neq 0,$$

$$\lim_{z \to 0} \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} M(\boldsymbol{x}, z)/z = 0, \quad \lim_{z \to \infty} \inf_{\boldsymbol{x} \in \Omega} M(\boldsymbol{x}, z)/z = \infty;$$

2) $M(\,\cdot\,, z)$ – измеримая функция по $\boldsymbol{x} \in \Omega$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(\boldsymbol{x}, z)$ называется *функцией Музилака–Орлича* или *обобщённой N-функцией.*

Сопряжённая функция $\overline{M}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(\boldsymbol{x}, \cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $z \geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\boldsymbol{x}, z) = \sup_{y \geqslant 0}(yz - M(\boldsymbol{x}, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга

$$|zy| \leqslant M(\boldsymbol{x}, z) + \overline{M}(\boldsymbol{x}, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{4}$$

Функция Музилака–Орлича M удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geqslant 0$ и функция $H \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$M(\boldsymbol{x}, 2z) \leqslant cM(\boldsymbol{x}, z) + H(\boldsymbol{x}).$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geqslant z_0$ неравенства

$$M(\boldsymbol{x}, lz) \leqslant c(l)M(\boldsymbol{x}, z) + H_l(\boldsymbol{x}), \quad H_l \in L_1(\Omega),$$

где l – любая константа больше единицы, $c(l) > 0$.

В настоящей работе не предполагается, что N-функции $M(\boldsymbol{x}, z)$, $\overline{M}(\boldsymbol{x}, z)$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Существуют три класса пространств Музилака–Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ – обобщённый класс Музилака–Орлича, состоящий из измеримых функций $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что
$$\varrho_{M,\Omega}(v)=\int\limits_\Omega M(\boldsymbol{x},v(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x}<\infty;$$

2) $L_M(\Omega)$ – обобщённое пространство Музилака–Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга
$$\|u\|_{M,\Omega}=\inf\{\lambda>0:\varrho_{M,\Omega}(v/\lambda)\leqslant 1\};$$

3) $E_M(\Omega)$ – замыкание по норме $\|u\|_{M,\Omega}$ ограниченных измеримых функций с компактным носителем в $\overline{\Omega}$. Справедливы вложения $E_M(\Omega)\subset\mathcal{L}_M(\Omega)\subset L_M(\Omega)$. Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$ будем опускать индекс Q, если $Q=\Omega$.

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака–Орлича $M(\boldsymbol{x},z)$.

Условие $(\boldsymbol{M}\mathbf{1},\mathbf{loc})$. Функция $M(\boldsymbol{x},z)$ локально интегрируема, т.е.
$$\varrho_{M,Q}(z)=\int\limits_Q M(\boldsymbol{x},z)\,d\boldsymbol{x}<\infty\quad\text{для любого}\quad z\in\mathbb{R}$$
и для любого измеримого множества $Q\subset\Omega$ такого, что $\operatorname{meas}Q<\infty$.

Условие $(\boldsymbol{M}\mathbf{2})$. Функция $M(\boldsymbol{x},z)$ удовлетворяет условию ϕ-регулярности, т.е. существует функция $\phi:[0,1/2]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что $\phi(\,\cdot\,,z)$ и $\phi(r,\cdot\,)$ – неубывающие функции и для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{\Omega}$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant 1/2$, $z\in\mathbb{R}_+$ и некоторой константы $c>0$ выполняется
$$M(\boldsymbol{x},z)\leqslant\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,z)M(\boldsymbol{y},z),\qquad \limsup_{\varepsilon\to 0+}\phi(\varepsilon,c\varepsilon^{-n})<\infty.$$

Пусть M и $\overline{M}$ подчиняются условию $(M1,\mathrm{loc})$, тогда пространство $E_M(\Omega)$ – сепарабельное и $(E_M(\Omega))^*=L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если дополнительно M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\Omega)=\mathcal{L}_M(\Omega)=L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ – сепарабельное. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака–Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2–условию.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v\in L_M(\Omega)$ (будем обозначать $v^j\underset{j\to\infty}{\overset{M}{\to}}v$), если существует константа $\lambda>0$ такая, что имеет место равенство
$$\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{v^j-v}{\lambda}\right)=0.$$
Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и $\overline{M}$, если $u\in L_M(\Omega)$ и $v\in L_{\overline{M}}(\Omega)$, выполняется неравенство Гёльдера
$$\left|\int\limits_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right|\leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака–Орлича–Соболева
$$W^1L_M(\Omega)=\{v\in L_M(\Omega):|\nabla v|\in L_M(\Omega)\}$$
с нормой
$$\|v\|^1_M=\|v\|_M+|||\nabla v|||_M.$$

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \in W^1L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in W^1L_M(\Omega)$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что справедливы равенства

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_M\left(\frac{v^j - v}{\lambda}\right) = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \varrho_M\left(\frac{|\nabla v^j - \nabla v|}{\lambda}\right) = 0.$$

Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ определим как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_{\overline{M}})^{n+1})$ в $W^1L_M(\Omega)$. Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ банахово (см. [12, теорема 10.2]).

Определение 2. Область Ω *подчиняется сегментному свойству*, если существует конечное открытое покрытие $\{\Theta_i\}_{i=1}^k$ множества $\overline{\Omega}$ и соответствующие ненулевые векторы $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\overline{\Omega}\bigcap\Theta_i) + t\boldsymbol{z}_i \subset \Omega$ для любых $t \in (0,1)$ и $i = \overline{1,k}$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака–Орлича–Соболева (см. [14, теорема 3]).

Лемма 1. *Предположим, что область Ω удовлетворяет сегментному свойству, а обобщённая N-функция M удовлетворяет условиям (M1,loc), (M2), и пусть $\overline{M}$ удовлетворяет условию (M1,loc). Тогда для любого $v \in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$ существует последовательность функций $\xi^j \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\xi^j \underset{j\to\infty}{\to} v$ модулярно в $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$, $j \to \infty$.*

Примеры функций Музилака–Орлича M, удовлетворяющих условиям леммы 1, приведены в работе [14].

1. Если N-функция $M(\boldsymbol{x}, z) = M(z)$ не зависит от $\boldsymbol{x}$, то удовлетворяет условию $(M2)$ с $\phi(r,z) = 1$.

2. Функция $M(\boldsymbol{x}, z) = |z|^{p(\boldsymbol{x})}$, $p : \Omega \to [p^-, p^+]$, $p^- = \inf\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega} p(\boldsymbol{x}) > 1$, $p^+ = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega} p(\boldsymbol{x}) < \infty$, удовлетворяет условию $(M2)$ с функцией $\phi(r,z) = \max\{z^{\sigma(r)}, z^{-\sigma(r)}\}$, где $\sigma : (0,1/2] \to \mathbb{R}_+$, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0+} \sigma(\varepsilon) = 0$, – модуль непрерывности функции p. Для $\sigma(r) = -c/\log r$, $0 < r \leqslant 1/2$, получаем стандартное условие log-гёльдеровой непрерывности.

3. N-функция $M(\boldsymbol{x}, z) = |z|^p + a(\boldsymbol{x})|z|^q$, $1 \leqslant p < q$, с неотрицательной функцией $a \in C_{\mathrm{loc}}^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1]$, удовлетворяет условию $(M2)$ с $\phi(r,z) = C_\alpha r^\alpha |z|^{q-p} + 1$, $q \leqslant p + \alpha/n$.

2. Предположения и формулировка результатов. Предполагается, что функции

$$b(\boldsymbol{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $\boldsymbol{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, и выполнено

Условие $(\boldsymbol{M})$. Существует положительная константа $\overline{a} \in (0,1)$ такая, что для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и для любых $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$, справедливы неравенства

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{s} \geqslant \overline{a}(M(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{s}|) + \overline{M}(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{a}|)), \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) > 0. \tag{6}$$

Здесь функция Музилака–Орлича $M(\boldsymbol{x}, z)$ подчиняется условиям $(M1, \mathrm{loc})$, $(M2)$, сопряжённая к M функция $\overline{M}(\boldsymbol{x}, z)$ удовлетворяет условию $(M1, \mathrm{loc})$, $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t} = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|\boldsymbol{s}| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Предполагается, что функция $b(\boldsymbol{x}, s_0)$ – неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, поэтому для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant 0. \tag{7}$$

Сформулируем дополнительное условие, которое используется в теореме существования. Будем считать, что для любого $k > 0$ имеет место равенство

$$\sup_{|s_0|\leqslant k} |b(\boldsymbol{x}, s_0)| = \Phi_k(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega). \tag{8}$$

Условию (M) удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = M(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{s}|)\frac{s_i}{|\boldsymbol{s}|^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Для $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ и любого $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \nabla u \in (L_M(\Omega))^n. \tag{9}$$

Введём обозначение $\langle u \rangle = \int_\Omega u\, d\boldsymbol{x}$.

Определение 3. *Энтропийным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что:

1) $b(\boldsymbol{x}, u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ при всех $k > 0$;

3) при всех $k > 0$ и $v \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\langle (b(\boldsymbol{x}, u) - f)T_k(u - v)\rangle + \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - v)\rangle \leqslant 0. \tag{10}$$

Определение 4. *Ренормализованным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что:

1) $b(\boldsymbol{x}, u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ при всех $k > 0$;

3) выполнено равенство

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<h+1\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} = 0;$$

4) для любой функции $S \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $v \in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\langle (b(\boldsymbol{x}, u) - f)S(u)v\rangle + \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)v\nabla u + S(u)\nabla v)\rangle = 0. \tag{11}$$

В теоремах 1–6 предполагается, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (M).

Теорема 1. *Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда существует энтропийное решение задачи (1), (2).*

Доказательство теоремы 1 следует из работы [5, теорема 5.1]. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 2–6.

Теорема 2. *Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением задачи (1), (2).*

Теорема 3. *Пусть $f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, тогда энтропийное решение задачи (1), (2) $u \geqslant 0$ для п.в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$.*

Теорема 4. *Пусть u^1, u^2 – энтропийные решения задачи (1), (2), тогда $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.*

Теорема 5. *Пусть u^1, u^2 – ренормализованные решения задачи (1), (2), тогда $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.*

Следует отметить, что теоремы 3–5 по сути являются обобщением соответствующих результатов работы [9] для уравнения (3) на уравнение вида (1). Однако доказательство теоремы 5 существенно проще за счёт соотношения, которое будет установлено для ренормализованного решения задачи (1), (2) в лемме 7.

Теорема 6. *Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное и ренормализованное решения задачи (1), (2) эквивалентны.*

Согласно единственности энтропийного решения (теорема 4) из теоремы 2 следует, что энтропийное решение является ренормализованным решением задачи (1), (2). Тогда, ввиду единственности ренормализованного решения задачи (1), (2) (теорема 5), справедливо утверждение теоремы 6.

3. Подготовительные сведения. В этом пункте установим некоторые свойства энтропийного и ренормализованного решений задачи (1), (2) и приведём вспомогательные леммы. Предполагается, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведём теорему Витали в следующей форме (см. [15, гл. 3, § 6, теорема 15]).

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_1(\Omega)$ *и* $v^j \to v$ *п.в. в* Ω, $j\to\infty$. *Тогда для сходимости* $v^j \to v$ *сильно в* $L_1(\Omega)$, $j\to\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной интегрируемости*

$$\lim_{\operatorname{meas}(Q)\to 0} \int\limits_Q |v^j(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} = 0 \quad \text{\textit{равномерно по}} \quad j\in\mathbb{N}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, область* Ω *строго липшицева, функция* $v\in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$, *тогда* $v\in\mathring{W}{}_1^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме 1 для функции $v\in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$ существует последовательность $\{\xi^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что найдётся число $\lambda>0$, при котором

$$\int\limits_\Omega M(\boldsymbol{x}, |v-\xi^j|/\lambda)\,d\boldsymbol{x}\to 0, \quad \int\limits_\Omega M(\boldsymbol{x}, |\nabla(v-\xi^j)|/\lambda)\,d\boldsymbol{x}\to 0, \quad j\to\infty. \tag{12}$$

Из сходимости (12), ввиду существования функции $M^{-1}(\boldsymbol{x},\cdot)$, непрерывной обратной к функции $M(\boldsymbol{x},\cdot)$ по $z\geqslant 0$, следует сходимость по некоторой подпоследовательности

$$\xi^j\to v, \quad \nabla\xi^j\to\nabla v \ \text{ п.в. в } \ \Omega, \quad j\to\infty. \tag{13}$$

Кроме того, по лемме 2 имеем, что

$$\{M(\boldsymbol{x}, |v-\xi^j|/\lambda)\}_{j\in\mathbb{N}}, \ \{M(\boldsymbol{x}, |\nabla(v-\xi^j)|/\lambda)\}_{j\in\mathbb{N}} \ \text{равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega). \tag{14}$$

Из определения N-функции заключаем, что для любого $\varepsilon>0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что для любых $z\in\mathbb{R}$ и п.в. $\boldsymbol{x}\in\Omega$ справедливо неравенство

$$|z|\leqslant \varepsilon M(\boldsymbol{x},z)+C_\varepsilon. \tag{15}$$

Тогда для любого измеримого множества $Q\subset\Omega$ имеем

$$\int\limits_Q |v-\xi^j|\,d\boldsymbol{x}\leqslant \lambda\int\limits_Q M(\boldsymbol{x}, |v-\xi^j|/\lambda)\,d\boldsymbol{x}+C_1\operatorname{meas}(Q), \quad j\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, ввиду (14), следует, что $\{v-\xi^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно интегрируема в $L_1(\Omega)$.

Тогда, применяя сходимость (13), по лемме 2 устанавливаем сходимость

$$\xi^j\to v \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{16}$$

Аналогично устанавливается сходимость

$$\nabla\xi^j\to\nabla v \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{17}$$

Применив неравенство (2.37) из [16, гл. 2, § 2] для функций $v-\xi^j\in W_1^1(\Omega)$, получаем

$$\|\widetilde{v}\|_{1,\partial\Omega}\leqslant C_2\|v-\xi^j\|^1_{1,\Omega}, \quad j\in\mathbb{N},$$

где $\widetilde{v}$ – след функции $v|_{\partial\Omega}$. Ввиду сходимостей (16) и (17) устанавливаем, что $\|\widetilde{v}\|_{1,\partial\Omega} = 0$, следовательно, $v = 0$ п.в. на $\partial\Omega$. Таким образом, доказано, что $v \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$.

Замечание. Пользуясь выпуклостью функции $M(\boldsymbol{x},\cdot)$ и принадлежностью $v \in L_M(\Omega)$, несложно установить эквивалентность условия (14) условию

$$\{M(\boldsymbol{x},|\xi^j|/\lambda_1)\}_{j\in\mathbb{N}},\ \ \{M(\boldsymbol{x},|\nabla\xi^j|/\lambda_1)\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega) \tag{18}$$

с некоторым $\lambda_1 > 0$.

Следствием теоремы Витали является

Лемма 4. *Пусть* v^j, $j \in \mathbb{N}$, $v \in L_M(\Omega)$ *и* $v^j \overset{M}{\to} v$ *модулярно в* $L_M(\Omega)$, $j \to \infty$. *Тогда* $v^j \rightharpoonup v$ *в топологии* $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ *пространства* $L_M(\Omega)$ (см. [14, лемма 2]).

Следствием теоремы Витали является теорема Лебега.

Лемма 5. *Пусть* g^j, $j \in \mathbb{N}$, g *– функции из пространства* $L_1(\Omega)$ *такие, что* $g^j \to g$ *сильно в* $L_1(\Omega)$, $j \to \infty$, *и пусть* v^j, $j \in \mathbb{N}$, v *– измеримые функции в* Ω *такие, что:*

1) $v^j \to v$ *п.в. в* Ω, $j \to \infty$;

2) $|v^j| \leqslant |g^j|$, $j \in \mathbb{N}$ *п.в. в* Ω.

Тогда $v^j \to v$ *сильно в* $L_1(\Omega)$, $j \to \infty$.

Лемма 6. *Пусть функции* v^j, $j \in \mathbb{N}$, $v \in L_\infty(\Omega)$ *такие, что* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *ограничена в* $L_\infty(\Omega)$ *и* $v^j \to v$ *п.в. в* Ω, $j \to \infty$, *тогда* $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, *в топологии* $\sigma(L_\infty, L_1)$ *пространства* $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, g *из* $L_M(\Omega)$ $(E_M(\Omega))$, *то* $v^j g \to vg$ *модулярно (сильно) в* $L_M(\Omega)$ $(E_M(\Omega))$, $j \to \infty$.

Доказательство леммы 6 следует из теоремы Лебега.

Лемма 7. *Пусть* u *– энтропийное решение задачи (1), (2), тогда*

$$\operatorname{meas}\{\Omega : |u| \geqslant k\} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{19}$$

Кроме того,

$$(M(\boldsymbol{x},|\nabla u|) + \overline{M}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)|))\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in L_1(\Omega) \quad \textit{для любого} \quad k > 0 \tag{20}$$

и справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\, d\boldsymbol{x} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Неравенство (10) при $v = 0$ принимает вид

$$I = \int\limits_\Omega b(\boldsymbol{x},u)T_k(u)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_\Omega fT_k(u)\, d\boldsymbol{x}.$$

С учётом неравенства (7) устанавливаем оценку

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_\Omega |f||T_k(u)|\, d\boldsymbol{x} \leqslant k\|f\|_1. \tag{22}$$

В силу (5) имеем

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} (M(\boldsymbol{x},|\nabla u|) + \overline{M}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},|\nabla u|)|))\, d\boldsymbol{x} \leqslant kC_1. \tag{23}$$

Из соотношения (23), применив неравенство (15), устанавливаем (19) (см. [9, предложение 3.1]).

Запишем неравенство (22) в виде

$$\frac{1}{k}\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\,d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\Omega}|f|\frac{|T_k(u)|}{k}\,d\boldsymbol{x}. \tag{24}$$

Поскольку $|T_k(u)|/k \leqslant 1$, $T_k(u)/k \to 0$ п.в. в Ω при $k\to\infty$, и $f\in L_1(\Omega)$, то по теореме Лебега имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega}|f|\frac{|T_k(u)|}{k}\,d\boldsymbol{x} = 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) выводим (21).

Лемма 8. *Если u является энтропийным решением задачи (1), (2), то неравенство (10) справедливо для любой функции $v\in \mathring{W}^1L_M(\Omega)\bigcap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 для функции $v\in \mathring{W}^1L_M(\Omega)$ существует последовательность $\{\xi^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что для некоторого $\lambda>0$ выполнено (12). Тогда, согласно лемме 3 и замечанию, справедливы соотношения (13), (18).

Рассмотрим нечётную неубывающую функцию $T\in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $T(z)=z$ для $|z|\leqslant\|v\|_\infty$, $|T(z)|=K>0$ для $|z|\geqslant z_0>\|v\|_\infty$. Обозначим $\max\limits_{[-z_0,z_0]}T'(z)=K_1>0$.

Применив сходимость (13), для ограниченной последовательности $\{T(\xi^j)\}_{j\in\mathbb{N}}\in C_0^\infty(\Omega)$ установим сходимости

$$T(\xi^j)\to T(v)=v,\quad \nabla T(\xi^j)=T'(\xi^j)\nabla\xi^j\to T'(v)\nabla v=\nabla v \quad \text{п.в. в } \Omega,\quad j\to\infty. \tag{26}$$

Тогда для любого $k>0$ имеют место сходимости

$$T_k(u-T(\xi^j))\to T_k(u-v),\quad \nabla T_k(u-T(\xi^j))\to\nabla T_k(u-v) \ \text{ п.в. в } \Omega,\quad j\to\infty. \tag{27}$$

Пусть $\widehat{k}=k+K$, тогда справедлива оценка

$$|\nabla T_k(u-T(\xi^j))|\leqslant|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|+|\nabla T(\xi^j)|,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Поскольку $\nabla T_{\widehat{k}}(u)\in(L_M(\Omega))^n$, то найдётся число $\mu>0$ такое, что

$$\int\limits_{\Omega}M(\boldsymbol{x},|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|/\mu)\,d\boldsymbol{x}<\infty. \tag{29}$$

Применяя (28) и учитывая выпуклость функции $M(\boldsymbol{x},\cdot)$, получаем неравенства

$$M\left(\boldsymbol{x},\frac{|\nabla T_k(u-T(\xi^j))|}{2(\lambda_1K_1+\mu)}\right)d\boldsymbol{x}\leqslant\frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{x},\frac{|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|}{\lambda_1K_1+\mu}\right)+\frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{x},\frac{|T'(\xi^j)\nabla\xi^j|}{\lambda_1K_1+\mu}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{x},\frac{|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|}{\mu}\right)+\frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{x},\frac{|\nabla\xi^j|}{\lambda_1}\right).$$

Отсюда, ввиду (18), (29), следует равномерная интегрируемость последовательности

$$\left\{M\left(\boldsymbol{x},\frac{|\nabla T_k(u-T(\xi^j))|}{2(\lambda_1K_1+\mu)}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

Учитывая замечание и сходимость (27), применяя лемму 2, устанавливаем модулярную сходимость

$$\nabla T_k(u-T(\xi^j))\overset{M}{\to}\nabla T_k(u-v),\quad j\to\infty. \tag{30}$$

Из сходимости (30), согласно лемме 4, при любом $k > 0$ имеем сходимость

$$\nabla T_k(u - T(\xi^j)) \rightharpoonup \nabla T_k(u - v) \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, \ j \to \infty. \qquad (31)$$

Запишем неравенство (10) с $v = T(\xi^j)$:

$$\int\limits_\Omega (b(\boldsymbol{x}, u) - f) T_k(u - T(\xi^j))\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T(\xi^j))\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \qquad (32)$$

Поскольку $b(\boldsymbol{x}, u), f \in L_1(\Omega)$ (см. п. 1) определения 3), то в первом слагаемом неравенства (32), используя (27), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $j \to \infty$.

Ввиду того, что $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega: |u| < \widehat{k}\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ (см. п. 2) определения 3), применяя (31), устанавливаем, что второе слагаемое в (32) также имеет предел при $j \to \infty$. Таким образом, после предельного перехода в (32) получим неравенство (10).

Лемма 9. *Если u является ренормализованным решением задачи (1), (2), то равенство (11) справедливо для любой функции $S \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega) \bigcap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Поступая как в лемме 8, найдём последовательность $\{\xi^j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что имеют место сходимость (26) и сходимость

$$\nabla T(\xi^j) \rightharpoonup \nabla v \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, \ j \to \infty. \qquad (33)$$

Пусть $S \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} S \subset [-L, L]$ для $L > 0$. Равенство (11) с $v = T(\xi^j)$ принимает вид

$$\int\limits_\Omega ((b(\boldsymbol{x}, u) - f) S(u) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)) T(\xi^j)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) S(u) \cdot \nabla T(\xi^j)\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Поскольку $f, b(\boldsymbol{x}, u), \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u) \in L_1(\Omega)$ (см. (9) и пп. 1), 2) определения 4), то в первом слагаемом, применяя (26), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $j \to \infty$. Ввиду принадлежности $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) S(u) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$, применив (33), во втором слагаемом можно перейти к пределу при $j \to \infty$. В итоге получим равенство (11) для любой функции $v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega) \bigcap L_\infty(\Omega)$.

Лемма 10. *Пусть u – энтропийное решение задачи (1), (2), тогда при всех $k > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega: h \leqslant |u| < h+k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} = 0. \qquad (34)$$

Доказательство. Положив в неравенстве (10) $v = T_h(u)$, $h > 0$, будем иметь

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u| < k+h\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{h \leqslant |u|\}} (b(\boldsymbol{x}, u)) T_k(u - T_h(u))\, d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{h \leqslant |u|\}} |f|\, d\boldsymbol{x}.$$

Далее, используя знакоопределённость функции $b(\boldsymbol{x}, s_0)$ по аргументу s_0 (см. (7)), выводим неравенство

$$k \int\limits_{\{|u| \geqslant k+h\}} |b(\boldsymbol{x}, u)|\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{h \leqslant |u| < k+h\}} (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u + b(\boldsymbol{x}, u)(u - h \operatorname{sign} u))\, d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{h \leqslant |u|\}} |f|\, d\boldsymbol{x}.$$

Ввиду (7) для $h \leqslant |u|$ справедливо неравенство $b(\boldsymbol{x}, u)(u - h \operatorname{sign} u) \geqslant 0$. Соединив два последних неравенства, для любого $k > 0$ имеем

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u| < k+h\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{h \leqslant |u|\}} |f|\, d\boldsymbol{x}.$$

Отсюда, ввиду того, что $f \in L_1(\Omega)$, учитывая (19) и переходя к пределу при $h \to \infty$, выводим соотношение (34).

Лемма 11. *Пусть u – ренормализованное решение задачи (1), (2), тогда справедливы соотношения (19)–(21).*

Доказательство. Зафиксируем $k > 0$, пусть $\sigma > k$. Определим функцию S_σ формулой

$$S_\sigma(r) = \begin{cases} r, & |r| < \sigma, \\ \left(\sigma + \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{sign} r - \dfrac{\operatorname{sign} r}{2}(r - (\sigma+1)\operatorname{sign} r)^2, & \sigma \leqslant |r| \leqslant \sigma + 1, \\ \left(\sigma + \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{sign} r, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$S'_\sigma(r) = \begin{cases} 1, & |r| < \sigma, \\ \sigma + 1 - |r|, & \sigma \leqslant |r| \leqslant \sigma + 1, \\ 0, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Легко проверить включения

$$S_\sigma \in W^2_\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} S'_\sigma \subset [-\sigma - 1, \sigma + 1], \quad \operatorname{supp} S''_\sigma \subset [-\sigma - 1, -\sigma] \bigcup [\sigma, \sigma + 1].$$

Положив в (11) $S = S'_\sigma$, $v = T_k(u)$, получим

$$J_1 + J_2 + J_3 = \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u) \rangle + \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) S''_\sigma(u) \cdot \nabla u T_k(u) \rangle + \\ + \langle b(\boldsymbol{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle = \langle f S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle. \tag{35}$$

Оценим каждый интеграл:

$$J_1 = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\{\Omega : |u| < k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x}, \tag{36}$$

$$J_2 = -\int\limits_{\{\Omega : \sigma \leqslant |u| \leqslant \sigma + 1\}} |T_k(u)| \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} = -k \int\limits_{\{\Omega : \sigma \leqslant |u| \leqslant \sigma + 1\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x}, \tag{37}$$

используя (7), выводим

$$J_3 = \int\limits_\Omega b(\boldsymbol{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u)\, d\boldsymbol{x} \geqslant 0. \tag{38}$$

Соединив (35)–(38), установим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega : |u| < k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_\Omega |f||T_k(u)|\, d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega : \sigma \leqslant |u| \leqslant \sigma + 1\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\, d\boldsymbol{x}.$$

Применив условие 3) определения 4, перейдём к пределу при $\sigma \to \infty$ и получим неравенство (22). Соотношения (19)–(21) являются следствием неравенства (22) (см. лемму 7).

4. Знакоопределённость энтропийного решения.

Доказательство теоремы 3. Пусть $l > 0$, положим в (10) $v = T_l(u^+)$ и получим

$$I + J = \langle (b(\boldsymbol{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \rangle + \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) \rangle \leqslant 0. \tag{39}$$

Если $0 \leqslant u < l$, то $T_k(u - T_l(u^+)) = 0$, поэтому имеем цепочку равенств

$$I = \int\limits_\Omega (b(\boldsymbol{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+))\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega : u < 0\}} (b(\boldsymbol{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+))\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega : u \geqslant l\}} (b(\boldsymbol{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+))\, d\boldsymbol{x} = I_1 + I_2.$$

Если $u<0$, то $T_k(u-T_l(u^+))=T_k(u)<0$ и $I_1\geqslant 0$. Если $u\geqslant l$, то $T_k(u-T_l(u^+))=T_k(u-l)$ и $I_2\geqslant -\int_{\{\Omega:u\geqslant l\}} fT_k(u-l)\,d\boldsymbol{x}$. Таким образом, выводим оценку

$$I\geqslant -\int\limits_{\{\Omega:u\geqslant l\}} fT_k(u-l)\,d\boldsymbol{x}. \tag{40}$$

В множествах $\{\Omega: u<-k\}$, $\{\Omega: 0\leqslant u<l\}$, $\{\Omega: u\geqslant l+k\}$ почти всюду выполнено равенство $\nabla T_k(u-T_l(u^+))=0$. Следовательно, получим

$$J=\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-T_l(u^+))\,d\boldsymbol{x}=\Bigg(\int\limits_{\{\Omega:-k\leqslant u<0\}}+\int\limits_{\{\Omega:l\leqslant u<l+k\}}\Bigg)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-T_l(u^+))\,d\boldsymbol{x}.$$

Если $-k\leqslant u<0$ или $l\leqslant u<l+k$, то $\nabla T_k(u-T_l(u^+))=\nabla u$. Отсюда имеем

$$J=\Bigg(\int\limits_{\{\Omega:-k\leqslant u<0\}}+\int\limits_{\{\Omega:l\leqslant u<l+k\}}\Bigg)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\,d\boldsymbol{x}. \tag{41}$$

Соединив (39)–(41), устанавливаем неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{\{\Omega:-k\leqslant u<0\}}+\int\limits_{\{\Omega:l\leqslant u<l+k\}}\Bigg)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\,d\boldsymbol{x}\leqslant\int\limits_{\{\Omega:u\geqslant l\}} fT_k(u-l)\,d\boldsymbol{x}. \tag{42}$$

Согласно (19), ввиду того, что $f\in L_1(\Omega)$, имеем

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\{\Omega:u\geqslant l\}} fT_k(u-l)\,d\boldsymbol{x}=0.$$

Отсюда, устремляя в (42) $l\to\infty$, пользуясь (34), получаем

$$\int\limits_{\{\Omega:-k\leqslant u<0\}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u)\cdot\nabla u\,d\boldsymbol{x}\leqslant 0,\quad k>0.$$

Применив (5), устанавливаем равенство

$$\int\limits_{\Omega} M(\boldsymbol{x},|\nabla T_k(u^-)|)\,d\boldsymbol{x}=0,\quad k>0.$$

Следовательно, $\nabla T_k(u^-)=0$ п.в. в Ω.

Согласно лемме 3 $T_k(u)\in \mathring{W}_1^1(\Omega)$. Отсюда ввиду следствия 3.1 [17, гл. II, § 3] устанавливаем принадлежность $T_k(u^-)\in\mathring{W}_1^1(\Omega)$. Поэтому $T_k(u^-)=0$ п.в. в Ω. Ввиду произвольности k отсюда следует, что $u^-=0$ п.в. в Ω. Теорема 3 доказана.

5. Единственность энтропийного и ренормализованного решений.

Доказательство теоремы 4. Пусть u^1, u^2 – энтропийные решения задачи (1), (2). В неравенстве (10) для u^1 положим $v=T_h(u^2)$, а для u^2 пусть $v=T_h(u^1)$, $h>k$. Сложив интегральные неравенства, получим

$$I(h,k)=\int\limits_{\Omega^1(h,k)}\boldsymbol{A}^1\cdot\nabla(u^1-T_h(u^2))\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega^2(h,k)}\boldsymbol{A}^2\cdot\nabla(u^2-T_h(u^1))\,d\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}(-B^1+f)T_k(u^1-T_h(u^2))\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}(-B^2+f)T_k(u^2-T_h(u^1))\,d\boldsymbol{x}=J(h,k). \tag{43}$$

Здесь $\boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^i)$, $B^i(\boldsymbol{x})=b(\boldsymbol{x},u^i)$, $\Omega^i(h,k)=\{\boldsymbol{x}\in\Omega: |u^i-T_h(u^{3-i})|<k\}$, $i=1,2$.

Множества $\Omega^1(h,k)$, $\Omega^2(h,k)$ представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств:

$$\Omega^1(h,k) = \Omega^{12}(h,k)\bigcup\Omega^1_1(h,k)\bigcup\Omega^1_2(h,k), \quad \Omega^2(h,k) = \Omega^{12}(h,k)\bigcup\Omega^2_1(h,k)\bigcup\Omega^2_2(h,k),$$

где

$$\Omega^{12}(h,k) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^1-u^2|<k, \ \ |u^1|<h, \ \ |u^2|<h\},$$

$$\Omega^i_{3-i}(h,k) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^i - h\operatorname{sign} u^{3-i}|<k, \ \ |u^{3-i}|\geqslant h\}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega^i_i(h,k) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^i-u^{3-i}|<k, \ \ |u^i|\geqslant h, \ \ |u^{3-i}|<h\}, \quad i=1,2.$$

Интегралы в левой части неравенства (43) от функций $\boldsymbol{A}^i\cdot\nabla(u^i-T_h(u^{3-i}))$, $i=1,2$, по множеству $\Omega^{12}(h,k)$ принимают вид

$$I^{12}(h,k) = \int\limits_{\Omega^{12}(h,k)} (\boldsymbol{A}^1-\boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla(u^1-u^2)\,d\boldsymbol{x}\geqslant 0. \tag{44}$$

Интегралы от функций $\boldsymbol{A}^i\cdot\nabla(u^i-T_hu^{3-i})$ по множествам $\Omega^i_{3-i}(h,k)$, $i=1,2$, соответственно, учитывая (5), оцениваются как

$$\int\limits_{\Omega^1_2(h,k)} \boldsymbol{A}^1\cdot\nabla u^1\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega^2_1(h,k)} \boldsymbol{A}^2\cdot\nabla u^2\,d\boldsymbol{x}\geqslant 0. \tag{45}$$

Наконец, пользуясь (5), получаем

$$\int\limits_{\Omega^1_1(h,k)} \boldsymbol{A}^1\cdot\nabla(u^1-u^2)\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega^2_2(h,k)} \boldsymbol{A}^2\cdot\nabla(u^2-u^1)\,d\boldsymbol{x}\geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{\Omega^1_1(h,k)} \boldsymbol{A}^1\cdot\nabla u^2\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega^2_2(h,k)} \boldsymbol{A}^2\cdot\nabla u^1\,d\boldsymbol{x} = -I^1_1(h,k)-I^2_2(h,k). \tag{46}$$

Соединяя (44)–(46), устанавливаем оценку

$$I(h,k)\geqslant I^{12}(h,k)-I^3(h,k), \quad I^3(h,k) = I^1_1(h,k)+I^2_2(h,k).$$

Покажем, что $I^3(h,k)\to 0$ при $h\to\infty$. Используя (4) и (5), оценим интеграл

$$|I^1_1(h,k)|\leqslant \|\chi_{\{\Omega:h\leqslant|u^1|<h+k\}}\overline{M}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{A}^1|)\|_1 + \|\chi_{\{\Omega:h-k\leqslant|u^2|<h\}}M(\boldsymbol{x},|\nabla u^2|)\|_1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\overline{a}}\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u^1|<h+k\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^1)\cdot\nabla u^1\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{\overline{a}}\int\limits_{\{\Omega:h-k\leqslant|u^2|<h\}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^2)\cdot\nabla u^2\,d\boldsymbol{x}.$$

Применив (34), устанавливаем, что $I^1_1(h,k)\to 0$ при $h\to\infty$. Аналогично оценивается интеграл $I^2_2(h,k)$.

Очевидно представление $\Omega = \widetilde{\Omega}^{12}(h)\bigcup\widetilde{\Omega}^1_2(h)\bigcup\widetilde{\Omega}^2_1(h)\bigcup\widetilde{\Omega}_{12}(h)$, в котором

$$\widetilde{\Omega}^{12}(h) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^1|<h, \ \ |u^2|<h\}, \quad \widetilde{\Omega}_{12}(h) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^1|\geqslant h, \ \ |u^2|\geqslant h\},$$

$$\widetilde{\Omega}^i_{3-i}(h) = \{\boldsymbol{x}\in\Omega : |u^i|<h, \ \ |u^{3-i}|\geqslant h\}, \quad i=1,2.$$

Для интегралов в правой части неравенства (43) от функций $(-B^i + f)T_k(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\widetilde{\Omega}^{12}(h)$, ввиду неубывания функции $b(\boldsymbol{x}, s_0)$ по s_0, имеем неравенство

$$-J^{12}(h) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}^{12}(h)} (B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2)\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

Для интегралов от тех же функций по множеству $\widetilde{\Omega}_1^2(h)$ получаем оценку

$$|J_1^2(h)| \leqslant k \int\limits_{\widetilde{\Omega}_1^2(h)} (|B^1| + |B^2| + 2|f|)\,d\boldsymbol{x}. \tag{47}$$

Поскольку $f, B^1, B^2 \in L_1(\Omega)$ и мера множества $\widetilde{\Omega}_1^2(h)$ стремится к нулю при $h \to \infty$ (см. (19)), из (47) следует, что $\lim\limits_{h\to\infty} |J_1^2(h)| = 0$.

Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{h\to\infty} |J_2^1(h)| = \lim\limits_{h\to\infty} |J_{12}(h)| = 0$. Таким образом, предельный переход в (43) даёт соотношение

$$\lim_{h\to\infty} I^{12}(h,k) = \lim_{h\to\infty} \int\limits_{\Omega^{12}(h,k)} (\boldsymbol{A}^1 - \boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla(u^1 - u^2)\,d\boldsymbol{x} \leqslant 0.$$

Множество $\Omega^{12}(h,k)$ при $h \to \infty$ сходится к $\widehat{\Omega}^{12}(k) = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |u^1 - u^2| < k\}$, значит, при любом $k > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}^{12}(k)} (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u^1) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u^2))\cdot\nabla(u^1 - u^2)\,d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{48}$$

Это противоречит условию (6), поэтому $\nabla(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в $\widehat{\Omega}^{12}(k)$ при любом $k > 0$. Следовательно, $\nabla T_k(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в Ω. Ввиду принадлежностей $T_k(u^1), T_k(u^2) \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$ (см. лемму 3), заключаем, что $T_k(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в Ω для любого $k > 0$. Ввиду произвольности k устанавливаем, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.

Доказательство теоремы 5. Определим функцию h_σ формулой

$$h_\sigma(r) = \begin{cases} 0, & |r| \geqslant 2\sigma, \\ 1, & |r| \leqslant \sigma, \\ \dfrac{2\sigma - |r|}{\sigma}, & \sigma < |r| < 2\sigma. \end{cases}$$

Пусть u^1, u^2 – ренормализованные решения задачи (1), (2). Запишем (11) для u^1 и u^2 с $S = h_\sigma(u^1)$, $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^2)$ и $S = h_\sigma(u^2)$, $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)$ соответственно, затем вычтем из первого решения второе и получим равенство

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \langle(\boldsymbol{A}^1 - \boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\rangle +$$
$$+ \langle(\boldsymbol{A}^1 - \boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla u^1 T_k(u^1 - u^2)h'_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\rangle + \langle(\boldsymbol{A}^1 - \boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla u^2 T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h'_\sigma(u^2)\rangle +$$
$$+ \langle(B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\rangle = 0. \tag{49}$$

Оценим каждый интеграл J_k, $k = \overline{1,4}$. Применив (6), для первого имеем

$$J_1 = \int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}} (\boldsymbol{A}^1 - \boldsymbol{A}^2)\cdot\nabla(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0. \tag{50}$$

Учитывая (4), (5), выводим неравенство

$$|J_2| \leqslant \frac{k}{\sigma} \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma,\quad |u^2|<2\sigma\}} (\boldsymbol{A}^1\cdot\nabla u^1 + \overline{M}(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{A}^2|) + M(\boldsymbol{x},|\nabla u^1|))\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{\sigma} C_3 \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma,\quad |u^2|<2\sigma\}} (\boldsymbol{A}^1\cdot\nabla u^1 + \boldsymbol{A}^2\cdot\nabla u^2)\,d\boldsymbol{x}.$$

Ввиду (21) имеем

$$\lim_{\sigma\to\infty} |J_2| = 0. \tag{51}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma\to\infty} |J_3| = 0. \tag{52}$$

Пользуясь монотонностью функции $b(\boldsymbol{x}, s_0)$, выводим оценку

$$J_4 \geqslant 0. \tag{53}$$

Соединив (49), (50), (53), получим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}} (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^1) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^2))\cdot\nabla(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\,d\boldsymbol{x} \leqslant |J_2| + |J_3|.$$

Использовав лемму Фату и соотношения (51), (52), выполнив в последнем неравенстве предельный переход при $\sigma\to\infty$, установим неравенство (48), из которого следует, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.

6. Существование ренормализованного решения. Энтропийное и ренормализованное решения строятся как предел последовательности слабых решений аппроксимационной задачи для уравнения

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u) + b^m(\boldsymbol{x},u) = f^m(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{54}$$

с функциями

$$f^m(\boldsymbol{x}) = T_m f(\boldsymbol{x}), \quad b^m(\boldsymbol{x},s_0) = T_m b(\boldsymbol{x},s_0).$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ существует обобщённое решение $u^m \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ задачи (54), (2) [17, теорема 13]. Таким образом, для любой функции $v\in\mathring{W}^1L_M(\Omega)\bigcap L_\infty(\Omega)$ выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(\boldsymbol{x},u^m) - f^m(\boldsymbol{x}))v\rangle + \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla u^m)\cdot\nabla v\rangle = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{55}$$

В работе [5, теорема 5.1] установлены сходимости

$$f^m \to f \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{56}$$

$$u^m \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m\to\infty, \tag{57}$$

$$b^m(\boldsymbol{x},u^m) \to b(\boldsymbol{x},u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{58}$$

при любом $k>0$ получены сходимости

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla T_k(u)) \ \text{ по топологии } \ \sigma((L_{\overline{M}})^n,(E_M)^n) \ \text{ в } \ (L_{\overline{M}}(\Omega))^n, \ \ m\to\infty, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m) \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_k(u) \ \text{ в } \ L_1(\Omega), \ \ m\to\infty, \tag{60}$$

и доказано, что предельная функция u является энтропийным решением задачи (1), (2).

Доказательство теоремы 2. Докажем, что энтропийное решение, построенное в теореме 1, удовлетворяет определению 4. Условия 1), 2) выполнены, так как совпадают с условиями 1), 2) определения 3. Условие 3) также выполнено (см. соотношение (34)).

Докажем равенство (11). Пусть функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} S \subset [-L, L]$ для $L > 0$. Для любой функции $\xi \in C_0^1(\Omega)$, взяв в качестве тестовой функции в (55) $v = S(u^m)\xi \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$, выводим

$$\langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla\xi)\rangle + \langle (b^m(\boldsymbol{x}, u^m) - f^m(\boldsymbol{x}))S(u^m)\xi\rangle =$$
$$= I^m + J^m = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

Очевидно, что справедливы равенства

$$I^m = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla\xi)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi\, d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla\xi S(u^m)\, d\boldsymbol{x} = I_1^m + I_2^m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Ввиду сходимостей (57), (60), применив лемму 5, устанавливаем

$$\lim_{m\to\infty} I_1^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi\, d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)\xi\, d\boldsymbol{x}. \tag{63}$$

Из сходимости (57) по лемме 6 получаем $S(u^m)\nabla\xi \to S(u)\nabla\xi$ сильно в $(E_M(\Omega))^n$, $m \to \infty$. Отсюда, учитывая сходимость (59), выводим

$$\lim_{m\to\infty} I_2^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla\xi S(u^m)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla\xi S(u)\, d\boldsymbol{x}. \tag{64}$$

Соединив (62)–(64), получаем

$$\lim_{m\to\infty} I^m = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla T_L(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_L(u) + S(u)\nabla\xi) d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla\xi)\, d\boldsymbol{x}. \tag{65}$$

Из сходимости (57) по лемме 6 имеем

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_\infty, L_1), \quad m \to \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (56) и (58), устанавливаем равенство

$$\lim_{m\to\infty} J^m = \int\limits_\Omega (b(\boldsymbol{x}, u) - f) S(u)\xi\, d\boldsymbol{x}. \tag{66}$$

Комбинируя (61), (65), (66), получаем равенство (11). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Sec. A: Math., First View. 2022. P. 1–31.
2. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space // J. of Differ. Equat. 2017. V. 264. P. 341–377.
3. *Denkowska A., Gwiazda P., Kalita P.* On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 2021. V. 60. № 21. P. 1–44.
4. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order termsand L^1 data in Musielak–Orlicz spaces // Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2016. V. 43. № 2. P. 164–187.
5. *Elemine Vall M.S.B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data // Bol. Soc. Paran. Math. 2018. V. 36. № 1. P. 125–150.
6. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces // Ricerche Mat. 2017. V. 62. № 2. P. 1–31.
7. *Ait Khelloul M., Douiri S.M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition // Mediterranean J. of Math. 2020. V. 17. Art. no. 33. P. 1–18.
8. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces // Monatsh Math. Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2018. V. 186. P. 745–776.
9. *Li Ying., Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2021. V. 61. P. 1–20.
10. *Кожевникова Л.М.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений анизотропной эллиптической задачи в неограниченных областях с данными в виде меры // Изв. вузов. Математика. 2020. № 1. С. 1–16.
11. *Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
12. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Math. V. 1034. Berlin, 1983.
13. *Chlebicka I.* A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2018. № 175. P. 1–27.
14. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez's approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // J. of Funct. Anal. 2018. V. 275. № 9. P. 2538–2571.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
16. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
17. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2014. V. 21. № 5. P. 787–811.

Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологий,
Елабужский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.
После доработки 17.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.