

ISSN 0374-0641

Август 2024

Том 60, Номер 8



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 8, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью
А. А. Бондарев 1011
- Аналитическое вычисление неподвижной точки оператора, порождаемого многомерной системой с релейным гистерезисом
А. М. Камачкин, В. В. Евстафьева, Д. К. Потапов 1021
- Оценки снизу главного собственного значения билапласиана на графе
Р. Ч. Кулаев, С. А. Каркузаев 1034
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Об определении стационарной температуры в неограниченной полосе
Ш. А. Алимов, А. К. Кудайбергенов 1049
- Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа
У. Ю. Жураева 1063
- Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска
А. А. Замышляева, Е. В. Бычков 1076
- Об одной нелокальной задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами
М. Мирсабуров, Р. Н. Тураев 1086
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Численный метод решения задачи дифракции, описываемой уравнениями Максвелла с мезоскопическими граничными условиями
Ю. А. Еремин, В. В. Лопушенко 1100
- Асимптотические свойства параметрических задач на собственные значения в гильбертовом пространстве
А. А. Самсонов 1112
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Краевая задача для одного уравнения с переменными коэффициентами и дробной производной Лиувилля

А. Д. Ахметшин

1124

Целые решения одного класса алгебраических дифференциальных уравнений, обобщающих уравнения типа Брио–Буке

А. Я. Янченко

1131

ХРОНИКА

О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова

1137

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

МНОГОМЕРНАЯ АВТОНОМНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА, ОБЛАДАЮЩАЯ ЕДИНИЧНОЙ МЕРОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, НО МАССИВНОЙ ЧАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

© А. А. Бондарев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: albondarev1998@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024 г., после доработки 10.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Построен пример неоднородной автономной дифференциальной системы, у которой, с одной стороны, все решения, начинающиеся во внешности единичного шара, стремятся к нулю при неограниченном росте времени, а с другой — относительная мера начальных условий тех решений, которые начинаются в шаре с центром в нуле и удаляются от него на достаточное расстояние с ростом времени, приближается сколь угодно близко к единице при стремлении радиуса шара к нулю. Построенная в работе нелинейная система обладает также нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, автономная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, мера устойчивости, асимптотическое поведение решений.

DOI: 10.31857/S0374064124080019, EDN: KDOVPR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В классическом примере Р.Э. Винограда [1, гл. III, § 6.3] (и его упрощённой модификации А.Ф. Филиппова [2, гл. 4, § 18]) все решения конкретной двумерной автономной дифференциальной системы стремятся к нулю (здесь и всюду ниже — при неограниченном росте времени), но тем не менее нулевое решение этой системы является неустойчивым по Ляпунову.

Некоторые примеры столь контрастных сочетаний свойств (ляпуновских и недавно введённых перроновских [3] и верхнепредельных [4]) решений также приведены в исследованиях автора [5–10]. Наиболее логически сильные результаты, представленные в этих работах, состоят в построении многомерных систем, обладающих:

– одновременно как перроновской, так и верхнепредельной, с одной стороны, полной неустойчивостью (а следовательно, и ляпуновской глобальной неустойчивостью), а с другой — массивной частной устойчивостью;

– одновременно ляпуновской крайней неустойчивостью и как перроновской, так и верхнепредельной глобальной устойчивостью.

Цель настоящей статьи — построить дифференциальную систему с контрастными сочетаниями свойств (подобными тем, что были предложены в [5–10]), но при этом ещё и автономную (в отличие от примеров из работ [5–10], нереализуемых в автономном случае [11]), т.е. систему, у которой:

1) имеется как перроновская, так и верхнепредельная массивная частная устойчивость (которая есть и у системы, построенной в работе [10, теорема 1]);

2) меры устойчивости и неустойчивости (см. описание свойств в определении 3) всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) равны соответственно нулю и единице, что является логическим ослаблением наличия у системы свойства ляпуновской почти полной (а значит, и имевшейся у системы из работы [10, теорема 1] ляпуновской полной) неустойчивости.

Сочетание в автономном случае ляпуновской почти полной неустойчивости с перроновской и верхнепредельной частной устойчивостью также реализуется на дифференциальных системах (например, на двумерной линейной системе с седловой особой точкой), однако частная устойчивость оказывается лишь *точечной*.

Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ в фазовом пространстве \mathbb{R}^n с нормой $|\cdot|$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с правой частью $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Положим

$$B_\rho \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n: 0 < |x_0| < \rho\}, \quad \rho > 0,$$

а также для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ через $x(\cdot, x_0)$ обозначим непродолжаемое решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1 [3, 4, 12]. Для системы (1) имеет место *ляпуновская, перроновская* или *верхнепредельная* (отмечены ниже индексом $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно):

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) *полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему условию (2) (в частности, если решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче \mathbb{R}_+);

3) *почти полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_δ подмножество полной меры;

4) *μ -устойчивость* при данном значении $\mu \in [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все начальные значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество относительной меры $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ (т.е. доли от меры всего шара B_ρ , причём мера здесь и всюду ниже лебегова) не меньшей μ ;

5) *ν -неустойчивость* при данном значении $\nu \in [0, 1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все начальные значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество относительной меры $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ не меньшей ν .

Определение 2 [3, 4, 13]. Будем говорить, что для системы (1) имеет место *перроновская* или *верхнепредельная*:

6) *массивная частная устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta$ удовлетворяет соответственно второму или третьему условию в (2);

7) *асимптотическая устойчивость*, если для некоторого $\delta > 0$ любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0 \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0.$$

Определение 3 [12]. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовем *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ -устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ — нет;

б) *мерой неустойчивости* такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ система (1) обладает ν -неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ — нет.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже в теореме представлена автономная дифференциальная система, у которой:

– имеется как перроновская, так и верхнепредельная массивная частная устойчивость (первое свойство);

– меры устойчивости и неустойчивости всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) равны соответственно нулю и единице (второе свойство).

Теорема. Для каждого числа $n > 1$ существует автономная система (1), которая имеет правую часть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию $f'(0) = 0$, а также обладает следующими свойствами:

1) каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0; \tag{3}$$

2) для мер устойчивости и неустойчивости системы выполнены равенства

$$\mu_\varkappa(f) = 0, \quad \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Замечание. Отметим, что система, существование которой утверждается в теореме, не одномерна. Более того, при $n = 1$ существование двух начальных значений разных знаков, удовлетворяющих равенству (3), эквивалентно [14, теорема 29] наличию у системы асимптотической устойчивости (как перроновской, так и верхнепредельной), а значит, одномерного примера с таким набором свойств не существует.

Доказательство теоремы. Построение описанной в теореме системы проведём в два этапа.

Этап I. Введём на декартовой плоскости Ox_1x_2 полярные координаты ρ, φ по формулам

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

и рассмотрим автономную двумерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} P(\rho, \varphi) \\ \Phi(\rho, \varphi) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$P(\rho, \varphi) = \begin{cases} \rho - \sin(2\varphi) - 2 \cos^2(2\varphi), & \rho \leq \sin(2\varphi), \\ \rho + \sin(2\varphi) - 2 \cos^2(2\varphi), & \rho \leq -\sin(2\varphi), \\ \chi(\rho, \varphi), & \rho > |\sin(2\varphi)|; \end{cases} \quad \Phi(\rho, \varphi) = \begin{cases} -\cos(2\varphi), & \rho \leq \sin(2\varphi), \\ \cos(2\varphi), & \rho \leq -\sin(2\varphi), \\ \rho^3 \sin(2\varphi), & \rho > |\sin(2\varphi)|; \end{cases} \quad (6)$$

$$\chi(\rho, \varphi) = \begin{cases} 2\rho^4 \cos(2\varphi), & |\cos \varphi| \geq 1/2 \quad \text{или} \quad |\cos \varphi| < 1/2 \quad \text{и} \quad \psi(\rho, \varphi) \leq 0, \\ 2\rho^4 \cos(2\varphi) + 768\psi^2(\rho, \varphi), & |\cos \varphi| < 1/2 \quad \text{и} \quad \psi(\rho, \varphi) > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi(\rho, \varphi) = (\rho \sin^2(\varphi - \pi/3) - \sin(2\varphi))(\rho \sin^2(2\pi/3 - \varphi) + \sin(2\varphi)). \quad (8)$$

Равенства (5)–(8) определяют векторное поле в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ переменных (ρ, φ) , которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулами (4), переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2) и непрерывно продолжается в начало координат нулем. Более того, продолженное поле, во-первых, непрерывно дифференцируемо и имеет нулевое линейное приближение в нуле, а во-вторых, является непрерывно дифференцируемым на всей плоскости за счёт наличия в правой части системы множителей ρ^2 и $(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2$. Из сказанного выше следует, что система (5) допускает нулевое решение, а значит, является системой вида (1).

Заметим также, что полученное таким образом на плоскости переменных (x_1, x_2) поле является симметричным относительно обеих осей координат x_1 и x_2 в силу чётности функций $\varphi \mapsto P(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto P(\rho, \pi/2 + \varphi)$ (вытекающей из чётности $\varphi \mapsto \chi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \chi(\rho, \pi/2 + \varphi)$, $\varphi \mapsto \psi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \psi(\rho, \pi/2 + \varphi)$ и равенств (6)), а также нечётности функций $\varphi \mapsto \Phi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \Phi(\rho, \pi/2 + \varphi)$ при каждом фиксированном значении $\rho > 0$.

1. Сначала рассмотрим все ненулевые решения данной системы, начинающиеся на кривой (четырёхлепестковая роза Гранди единичного радиуса [15])

$$\Gamma \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho = |\sin(2\varphi)|\}. \quad (9)$$

Каждое такое решение является стационарным в силу наличия в правой части системы (5) множителя $(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2$, следовательно, кривая Γ целиком заполнена особыми точками.

2. Рассмотрим ненулевые решения, начинающиеся в области (внутренность лепестков розы Гранди)

$$D^\bullet \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho < |\sin(2\varphi)|\}.$$

В этой области система (5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} \rho - |\sin(2\varphi)| - 2 \cos^2(2\varphi) \\ -\operatorname{sgn}(\sin(2\varphi)) \cos(2\varphi) \end{pmatrix},$$

следовательно, качественное поведение таких решений точно такое же, как соответствующих (т.е. начинающихся в тех же точках) решений системы

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho - |\sin 2\varphi| - 2 \cos^2 2\varphi \\ -\operatorname{sgn}(\sin 2\varphi) \cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

у которой

– на кривой Γ имеется ровно четыре особые точки – те, что образуют на плоскости переменных (x_1, x_2) квадрат с вершинами в точках $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$;

– каждое из остальных решений, начинающихся на кривой Γ , притягивается асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ к какой-либо из этих четырёх особых точек, поскольку его фазовая кривая целиком лежит на этой кривой и на ней же справедливо неравенство

$$\dot{\rho} = 2 \cos^2(2\varphi) > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \Gamma, \quad |\cos \varphi| \neq 1/\sqrt{2};$$

– любое решение, начинающееся внутри области D^\bullet , в силу ограниченности D^\bullet , справедливости неравенства

$$0 < -(\rho - |\sin(2\varphi)|) \leq -(\rho - |\sin(2\varphi)|) + 2 \cos^2(2\varphi) = \dot{\rho}, \quad (\rho, \varphi) \in D^\bullet,$$

и теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см., например, [16, гл. 2]) тоже асимптотически притягивается к одной из четырёх перечисленных выше особых точек при $t \rightarrow +\infty$.

3. Обозначим

$$\gamma \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) = 0\}$$

и рассмотрим решения, начинающиеся в области (часть внешней области лепестков розы Гранди, содержащая ось координат x_1)

$$D_1^\circ \equiv D_{1,1}^\circ \sqcup D_{1,2}^\circ, \quad D_{1,1}^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) < 0\}, \\ D_{1,2}^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| \geq 1/2\}.$$

В этой области система (5) имеет решения двух типов.

Тун 1. Решения, удовлетворяющие начальному условию $\sin \varphi(0) = 0$, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, поскольку их фазовые кривые лежат на оси координат x_1 и на ней справедливо неравенство $\dot{\rho} = -2\rho^{10} < 0$.

Тун 2. В области D_1° система (5) записывается как

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} 2\rho^4 \cos(2\varphi) \\ \rho^3 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из (10) при помощи деления одного уравнения на другое и интегрирования находим, что в этой области все фазовые кривые системы (5) имеют вид

$$r = C \sin(2\varphi), \quad C > 0,$$

т.е. являются дугами концентрических лепестков роз Гранди разных радиусов. Отсюда и из справедливости при $(\rho, \varphi) \in D_1^\circ$ оценок

$$\operatorname{sgn} \dot{\varphi} = \operatorname{sgn}(-\rho^5(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \sin(2\varphi)) = -\operatorname{sgn}(\sin(2\varphi)) = \begin{cases} -1, & \sin(2\varphi) > 0, \\ 1, & \sin(2\varphi) < 0 \end{cases}$$

следует, что все решения системы (5), начинающиеся в области D_1° , стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

4. Наконец, рассмотрим решения, начинающиеся в области (часть внешней области лепестков розы Гранди, содержащая ось координат x_2)

$$D_2^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) > 0\}.$$

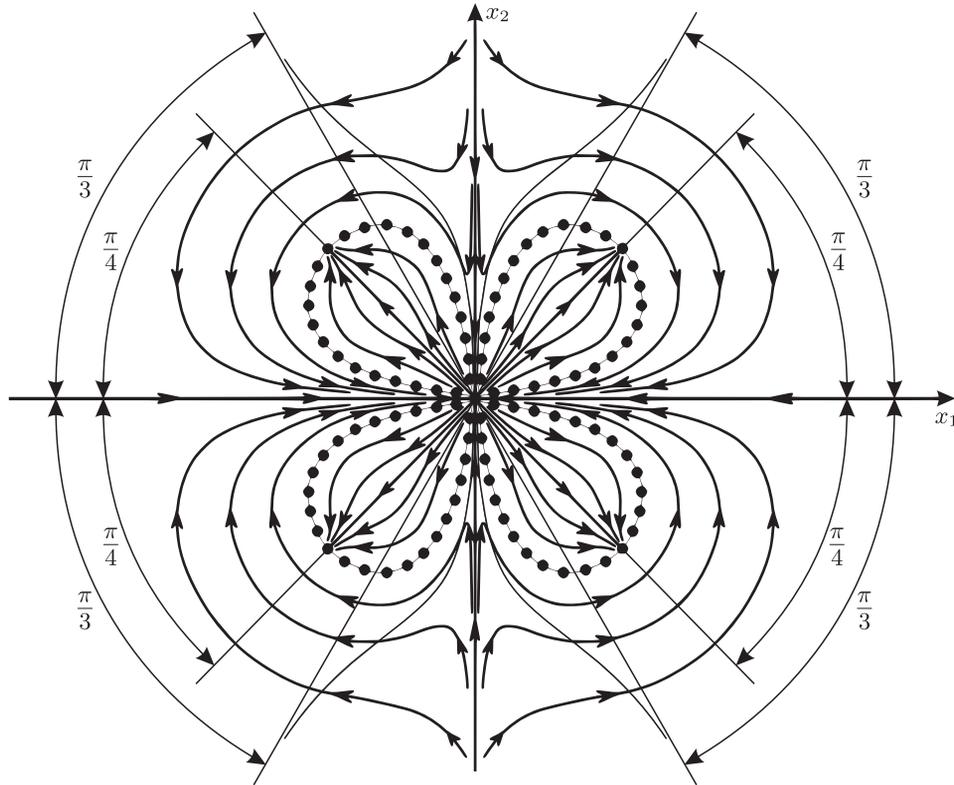


Рисунок. Фазовый портрет системы (5).

В области D_2° система (5) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} 2\rho^4 \cos(2\varphi) + 768\psi^2(\rho, \varphi) \\ \rho^3 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

и, следовательно, имеет решения двух типов.

Тун 3. Решения, удовлетворяющие начальному условию $\cos \varphi(0) = 0$, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, поскольку их фазовые кривые лежат на оси координат x_2 и на ней справедливо неравенство $\dot{\rho} = -\rho^{10} < 0$.

Тун 4. Рассмотрим решения, удовлетворяющие начальному условию $\cos \varphi(0) \neq 0$. Из справедливости при $(\rho, \varphi) \in D_2^\circ$ оценок

$$\dot{\rho} < -2\rho^6(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \cos(2\varphi), \quad \text{sgn } \dot{\varphi} = \text{sgn}(-\rho^5(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \sin(2\varphi)) = \begin{cases} -1, & \sin(2\varphi) > 0, \\ 1, & \sin(2\varphi) < 0 \end{cases}$$

(первая из которых означает, что радиальная скорость $\dot{\rho}$ решений в области D_2° строго меньше одноимённой величины для решений системы (10), рассматриваемой также и в области D_2°), а также ограниченности всех решений системы (10) в области D_2° (которая, в свою очередь, доказывается рассуждениями, аналогичными проделанным в области D_1°) следует, что каждое решение системы (5) такого типа (а точнее, его фазовая кривая) в некоторый момент $t > 0$ обязательно пересечёт кривую γ и войдет в область D_1° . Отсюда и из исследованного выше качественного поведения решений в области D_1° следует, что решения данного типа тоже стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Этап II. Обозначим через $f \equiv (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ правую часть системы (5), записанной при помощи формул (4) в декартовых координатах (x_1, x_2) , и рассмотрим для произвольного натурального числа $n > 1$ дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, \sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}), \\ \dot{y}_i = f_2(y_1, \sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}) \frac{y_i}{\sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}}, \end{cases} \quad i = \overline{2, n}, \quad y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

которая является системой вида (1) (и к тому же ещё и автономной), а также обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку, во-первых, этими же свойствами обладает система (5), а во-вторых, существуют непрерывно дифференцируемые функции $h_i : \tilde{D}_1^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям

$$f_i(u_1, u_2) = u_i h_i(u_1, u_2^2), \quad i = 1, 2, \quad (u_1, u_2) \in \tilde{D}_1^\circ \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\rho, \varphi) \in D_1^\circ\}.$$

Существование функций h_i , $i = 1, 2$, с указанными свойствами устанавливается непосредственными вычислениями.

5. Рассмотрим сначала решения y системы (11), удовлетворяющие начальному условию $y_3^2(0) + \dots + y_n^2(0) = 0$.

Точки $(0, \dots, 0)^T$, $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)^T$ и $(\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)^T$ обращают в нуль векторное поле, заданное равенствами (11), поэтому они являются особыми для рассматриваемой системы.

В двумерной плоскости

$$\Pi_{3, \dots, n} \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y_3 = \dots = y_n = 0\}$$

система (11) имеет такой же вид, как и система (5), записанная при помощи формул (4) в декартовых координатах (x_1, x_2) . Отсюда следует, что фазовые кривые таких решений целиком лежат в плоскости $\Pi_{3, \dots, n}$ и, следовательно, их качественное поведение в точности такое же, как и поведение решений системы (5).

6. Далее рассмотрим решения y , удовлетворяющие условию $y_3^2(0) + \dots + y_n^2(0) \neq 0$, которое эквивалентно существованию такого индекса i_0 , что

$$y_{i_0}(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad 3 \leq i_0 \leq n.$$

С помощью интегрирования находим, что функции

$$\Psi_j(y) \equiv y_j / y_{i_0}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0,$$

постоянны вдоль решений y системы (11) (являются её первыми интегралами), откуда

$$y_j = C_j y_{i_0}, \quad C_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0.$$

Подставив эти равенства в систему (11) и сделав замену переменных

$$z_j = y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i_0, \quad z_{i_0} = C_0 y_{i_0}, \quad C_0 \equiv \left(1 + \sum_{j=2, j \neq i_0}^n C_j^2\right)^{1/2},$$

получим в двумерной плоскости

$$\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n} \equiv \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z_j = \frac{C_j}{C_0} z_{i_0}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0 \right\}$$

дифференциальную систему такого же вида, как и система (5), записанная в декартовых координатах (x_1, x_2) .

Итак, из сказанного выше следует полное описание качественного поведения всех решений системы (11):

– фазовая кривая каждого решения является плоской и лежит либо в плоскости, задаваемой условием $y_3^2 = \dots = y_n^2 = 0$, либо в некоторой плоскости вида $\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n}$, либо во всех таких плоскостях сразу (для решений, удовлетворяющих начальному условию $y_2^2(0) + \dots + y_n^2(0) = 0$);

– в каждой такой плоскости имеются решения трёх типов: а) петли роз Гранди единичного радиуса целиком заполнены особыми точками; б) ненулевые решения, начинающиеся внутри петель единичных роз Гранди, стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к наиболее удалённым от нуля особым точкам из п. а); в) решения, начинающиеся снаружи петель, стремятся при неограниченном росте времени к точке $(0, \dots, 0)^T$.

Отсюда и из касания в нуле петель роз Гранди, лежащих в двумерной плоскости переменных (y_1, y_2) , осей координат y_1 и y_2 (а значит, в силу построения системы (11) и касания соответствующих петель в соответствующих полуплоскостях вида $\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n}$, лежащих в ней оси координат y_1 и ортогональной ей прямой) следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 22-8-10-3-1).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
2. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. — 2-е изд., испр. — М. : КомКнига, 2007. — 240 с.
3. Сергеев, И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 855–856.
4. Сергеев, И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1556–1557.
5. Бондарев, А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону / А.А. Бондарев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 2. — С. 43–47.
6. Бондарев, А.А. Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 147–152.
7. Бондарев, А.А. О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1011–1019.
8. Bondarev A.A. An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces / A.A. Bondarev // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. — 2022. — V. 87. — P. 25–36.

9. Бондарев, А.А. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепределных свойств / А.А. Бондарев, И.Н. Сергеев // Докл. РАН. Математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 25–29.
10. Бондарев, А.А. Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью / А.А. Бондарев // Мат. заметки. — 2024. — Т. 115, № 1. — С. 24–42.
11. Сергеев, И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепределные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 63–78.
12. Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904.
13. Сергеев, И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1576–1578.
14. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепределных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. — 2023. — Т. 33. — С. 353–423.
15. Grandi, G. *Florum geometricorum manipulus* / G. Grandi // *Philosophical Transactions*. — 1723. — V. 32. — P. 355–371.
16. Сергеев, И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям / И.Н. Сергеев. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2019. — 304 с.

MULTIDIMENSIONAL AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH UNIT MEASURE OF INSTABILITY AND MASSIVE PARTICULAR STABILITY

A. A. Bondarev

*Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: albondarev1998@yandex.ru*

An example of non-one-dimensional autonomous differential system is constructed, in which, on the one hand, all solutions starting in the exterior of the unit ball, tend to zero with unlimited growth of time, and on the other hand, a relative measure of the initial conditions of those solutions that begin in the ball with a center at the zero and move away from it at a sufficient distance with increasing time, approaches arbitrary close to unity as the radius of the ball tends to zero. The nonlinear system constructed in this work also has a zero linear approximation along the zero solution.

Keywords: differential system, nonlinear system, autonomous system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability, measure of stability, asymptotic properties of solutions.

FUNDING

This work was carried out with support from the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” (project no. 22-8-10-3-1).

REFERENCES

1. Bylov, B.F., Vinograd, R.E., Grobman, D.M., and Nemytskii, V.V., *Teoriya pokazatelej Lyapunova i eyo pri-lozheniya k voprosam ustojchivosti* (The Theory of Lyapunov Exponents and its Applications to Problems of Stability), Moscow: Nauka, 1966.
2. Filippov, A.F., *Vvedenie v teoriyu differencial'nyx uravnenij* (Introduction to the Theory of Differential Equations), Moscow: KomKniga, 2007.
3. Sergeev, I.N., Definition of the Perron stability and its relationship with the Lyapunov stability, *Differ. Uravn.*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 855–856.
4. Sergeev, I.N., Definition of upper-limit stability and its relationship with Lyapunov stability and Perron stability, *Differ. Uravn.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1556–1557.

5. Bondarev, A.A., An example of complete but not global Perron instability, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2021, no. 2, pp. 78–82.
6. Bondarev, A.A., Example of a differential system with complete Perron and upper-limit instability but massive partial stability, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 147–153.
7. Bondarev, A.A., On the existence of a globally Lyapunov unstable differential system all of whose solutions tend to zero as time tends to infinity, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 999–1007.
8. Bondarev, A.A., An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces, *Mem. Differ. Equat. Math. Phys.*, 2022, vol. 87, pp. 25–36.
9. Bondarev, A.A., Sergeev, I.N., Examples of differential systems with contrasting combinations of Lyapunov, Perron, and upper-limit properties, *Dokl. Math.*, 2022, vol. 106, no. 2, pp. 322–325.
10. Bondarev, A.A., Two contrasting examples of multidimensional differential systems with Lyapunov extreme instability, *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 1, pp. 21–36.
11. Sergeev, I.N., Lyapunov, Perron and upper-limit stability properties of autonomous differential system, *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 56, pp. 63–78.
12. Sergeev, I.N., Definition and properties of measures of stability and instability of zero solution of a differential system, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 6, pp. 831–839.
13. Sergeev, I.N., Massive and almost massive properties of stability and instability of differential systems, *Differ. Uravn.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1576–1578.
14. Sergeev, I.N., On the Perron, Lyapunov and upper-limit stability properties of differential systems, *Trudy sem. im. I.G. Petrovskogo*, 2023, vol. 33, pp. 353–423.
15. Grandi, G., *Florum geometricorum manipulus*, *Philosophical Transactions*, 1723, vol. 32, pp. 355–371.
16. Sergeev, I.N., *Lekcii po differencial'nyim uravneniyam* (Lectures on Differential Equations), Moscow: Izd. Mosk. Gos. Univ., 2019.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925+517.93

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДАЕМОГО МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

© А. М. Камачкин¹, В. В. Евстафьева², Д. К. Потапов³*Санкт-Петербургский государственный университет**e-mail: ¹a.kamachkin@spbu.ru, ²v.evstafieva@spbu.ru, ³d.potapov@spbu.ru**Поступила в редакцию 25.03.2024 г., после доработки 23.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.*

Для многомерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с релейной нелинейностью гистерезисного типа в специальном виде аналитически вычислена неподвижная точка оператора, порождаемого этой системой. Предложены способы выбора вектора, определяющего в фазовом пространстве системы расположение поверхностей разрыва (поверхностей переключения), при котором существует единственная неподвижная точка на одной из этих поверхностей. Приведены примеры, демонстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, релейная нелинейность с гистерезисом, неподвижная точка, точка переключения, поверхность переключения, периодическое решение, клетка Жордана, семейство точечно-множественных отображений, итерационный процесс.

DOI: 10.31857/S0374064124080029, EDN: KDNHXQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье исследуется многомерная релейная динамическая система, не имеющая положений равновесия. В связи с этим если в динамике такой системы существуют периодические движения различных типов, то в фазовом пространстве им соответствуют замкнутые траектории с различным числом точек переключения. Для определения конфигураций фазовых траекторий необходимо, прежде всего, уметь определять точки переключения. Под *конфигурацией* будем понимать вид фазовой траектории и её расположение в пространстве.

Последние несколько лет нелинейные системы с обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом изучались в ряде работ (см., например, [1–11]). В [1] исследовались динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов. Проблема существования колебательных и периодических режимов рассматривалась в статьях [2, 3]. Двухточечно-колебательные решения (периодические колебательные решения с двумя точками переключения за период) изучались в работах [4–8]. В [9] доказана теорема об ограниченности периодических и непериодических решений, а также теоремы о непрерывной зависимости от параметров периодических решений систем. Работы [10, 11] посвящены исследованию свойств семейства операторов, порождённых исследуемой системой. В [10] получены условия существования и единственности неподвижной точки оператора, а также условия, при выполнении которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений. В [11] установлено необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки для семейства операторов. Данная статья является продолжением наших работ [9–11].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \quad (1)$$

Здесь X — вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$; A — постоянная невырожденная квадратная матрица n -го порядка с вещественными элементами; B — постоянный ненулевой вектор из пространства \mathbb{R}^n с вещественными элементами; $F(\sigma)$ — релейная нелинейность, где F — оператор, определяющий работу неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 ($l_1 < l_2$) и значениями выхода m_1, m_2 ($m_1 < m_2$), $\sigma = (\Gamma, X)$ — скалярное произведение векторов Γ и X , Γ — ненулевой вектор из \mathbb{R}^n с вещественными элементами (вектор обратной связи).

Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [12] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq l_1$ следует равенство $F(\sigma(t)) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq l_2$ — равенство $F(\sigma(t)) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ ($t_1 < t \leq t_2$) — равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$, т.е. $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ или $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$.

Петля гистерезиса на плоскости (σ, F) обходится против хода часовой стрелки (положительный или пассивный гистерезис [13, с. 49]).

Ниже приведём определения из работ [4, 8], которые используются в данной статье.

Определение 1. Точкой переключения называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений $l_i, i = 1, 2$, а выходная функция $F(\sigma(t))$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. Поверхностью (гиперплоскостью) переключения называется гиперплоскость $L_i = \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) = l_i\}, i = 1, 2$.

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_i, i = 1, 2$, то наименьший момент времени t'' ($t'' > t'$), в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_{3-i} , назовём моментом первой встречи изображающей точки с гиперплоскостью L_{3-i} .

Фазовая траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \quad (2)$$

“склеивание” которых происходит в точке переключения по непрерывности. Непрерывному T -периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X_* , которая согласно определениям 1 и 2 удовлетворяет равенствам $X_* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X_*) = l_i, i = 1, 2$, где $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени, $T > 0$ — период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X_* .

Система (1) не имеет положений равновесия, если имеют место неравенства

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \quad (3)$$

Действительно, при выполнении (3) точка виртуальной устойчивости $X_i = -A^{-1}Bm_i, i = 1, 2$, полученная из (2) при условии $\dot{X} = 0$, находится за границами зоны неоднозначности релейной нелинейности $F(\sigma)$.

Будем рассматривать непрерывные T -периодические решения $X(t)$ с фазовыми траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий в силу систем (2); число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T . В силу решения системы (1) гиперплоскость L_i (или её подмножество), $i = 1, 2$, отображается в себя.

Пусть существует T -периодическое решение $X(t)$ с $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) точками переключения X^1, X^2, \dots, X^{2k} в фазовом пространстве системы (1) и следующим поведением. Изображающая точка решения начинает движение в точке X^1 на L_1 в момент времени t_0 и достигает L_2 в точке X^2 в момент времени t_1 в силу системы (2) с $m_i = m_1$, затем переходит на L_1 в точку X^3 в момент времени t_2 в силу (2) с $m_i = m_2$, далее достигает L_2 в точке X^4 в момент времени t_3 в силу (2) с $m_i = m_1$ и так продолжает движение от L_1 к L_2 и обратно k раз. В момент времени $t_{2k} = T$ изображающая точка возвращается на гиперплоскость L_1 в начальную точку X^1 в силу системы (2) с $m_i = m_2$.

Таким образом, t_1, t_2, \dots, t_{2k} — моменты переключения реле, при этом согласно определению 3 t_1, \dots, t_{2k-1} (с нечётными номерами) являются моментами первой встречи изображающей точки с L_2 после её ухода с гиперплоскости L_1 , а t_2, \dots, t_{2k} (с чётными номерами) — моментами первой встречи с L_1 после ухода с L_2 .

Выпишем систему относительно точек и моментов переключения в соответствии с описанным выше поведением движения изображающей точки решения, используя форму Коши для аналитического представления решения:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma, X^1) &= l_1, & X^2 &= e^{A(t_1-t_0)} X^1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau, \\
 (\Gamma, X^2) &= l_2, & X^3 &= e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau, \\
 && \dots, & \\
 (\Gamma, X^{2k-1}) &= l_1, & X^{2k} &= e^{A(t_{2k-1}-t_{2k-2})} X^{2k-1} + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} e^{A(t_{2k-1}-\tau)} B m_1 d\tau, \\
 (\Gamma, X^{2k}) &= l_2, & X^{2k+1} &= e^{A(t_{2k}-t_{2k-1})} X^{2k} + \int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k}-\tau)} B m_2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда на гиперплоскости L_i существует выпуклое компактное множество Ω_i ($i = 1, 2$), которое в силу системы (1) отображается в себя (см. [9, 10]). Множество Ω_i является пересечением ограниченного замкнутого множества из \mathbb{R}^n с гиперплоскостью L_i , а значит, это множество (из пространства \mathbb{R}^{n-1}) является компактным.

Система (4) для любого $k \in \mathbb{N}$ описывает процесс отображения множества $\Omega_1 \subset L_1$ в себя в силу систем (2). Аналогично можно построить процесс отображения множества $\Omega_2 \subset L_2$ в себя. При этом если $X^{2k+1} = X^1$, то $X^j \in \Omega_i$ ($j = \overline{1, 2k}, i = 1, 2$) принадлежит траектории T -периодического решения. Если $X^{2k+1} \neq X^1$, то $X^j \in \Omega_i$ ($j = \overline{1, 2k+1}$) не принадлежит траектории T -периодического решения с начальной точкой X^1 .

Обозначим оператор через P_2 , если отображение множества Ω_i ($i = 1, 2$) в себя в силу систем (2) имеет два перехода, через P_4 , если четыре перехода, и т.д. В результате получим семейство операторов $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}_{k=1}^\infty$, каждый из которых соответствует отображению множества Ω_i в себя. Известно [10, 11], что семейство \mathcal{P} различает точки и замкнутые множества. Если оператор P_{2k} имеет неподвижную точку, то существует периодическое решение системы (1) с $2k$ точками переключения в фазовом пространстве и периодом $T = t_{2k}$.

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при выполнении которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам семейства \mathcal{P} , и получить формулы для вычисления неподвижных точек оператора P_2 .

2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОПЕРАТОРА P_2

В работе [10] найдены условия, при которых каждый из операторов семейства \mathcal{P} имеет на множестве Ω_i ($i = 1, 2$) по крайней мере одну неподвижную точку. Установлено также, когда оператор P_2 имеет единственную неподвижную точку на множестве Ω_i . Справедлива

Теорема 1 [10, теорема 2, следствие 1]. *Пусть система (1) удовлетворяет предположениям, сделанным относительно её правой части, собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $b = (\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (3). Тогда оператор P_2 имеет хотя бы одну неподвижную точку. Если дополнительно выполнено равенство*

$$A^T \Gamma = \lambda \Gamma, \quad (5)$$

где t — операция транспонирования, Γ — собственный вектор матрицы A^T , который отвечает вещественному собственному числу λ матрицы A , то оператор P_2 имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует орбитально асимптотически устойчивая замкнутая фазовая траектория, состоящая из двух кусков в силу разных систем (2), с областью притяжения, совпадающей со всем фазовым пространством.

Геометрический смысл теоремы 1 заключается в следующем: по любому направлению, ортогональному вектору Γ (т.е. на гиперплоскости $(\Gamma, X) = l_i$), имеет место сжатие вдоль любой траектории, в том числе вдоль траектории периодического решения.

Перечислим ниже некоторые свойства решений системы (1), которые используются в дальнейшем.

В работе [9] установлено, что изображающая точка любого решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве за конечное время попадает и остаётся в ограниченной области этого пространства, т.е. оператор P_{2k} отображает множество Ω_i в себя для любого k . В случае существования периодического решения с $2k$ изолированными точками переключения в фазовом пространстве доказано, что при $b \neq 0$ эти точки локально непрерывно зависят от параметров $A, B, \Gamma, l_1, l_2, m_1$ и m_2 . Точка переключения является изолированной в том смысле, что в её окрестности не существует точек переключения других периодических орбит. Кроме того, если $b \neq 0$, то в точке переключения траектория решения одновременно (при подходе к поверхности переключения и уходе с неё) не касается поверхности переключения. В статье [10] отмечено, что если точка касания принадлежит множеству Ω_i , то это множество может быть заменено его подмножеством, не содержащим точку касания. Это подмножество сохраняет свойства связности, выпуклости и компактности множества Ω_i . Поэтому далее полагаем, что Ω_i не содержит точку касания и выполняется условие $b \neq 0$.

Таким образом, из теоремы 1 и свойств решений следует, что динамика системы (1) существенно зависит от выбора вектора обратной связи Γ , который определяет в фазовом пространстве расположение поверхностей переключения. Вектор Γ влияет на количество неподвижных точек операторов семейства \mathcal{P} и конфигурацию траекторий, которые могут как принадлежать зоне неоднозначности релейной нелинейности $F(\sigma)$, так и выходить за границы этой зоны.

3. СПОСОБЫ ВЫБОРА ВЕКТОРА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ Γ

Согласно теореме 1 если $b \neq 0$, выполнены неравенства (3) и равенство (5), где вещественное собственное число $\lambda < 0$ (по условию теоремы 1 все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части), то имеет место утверждение теоремы 1 о единственности неподвижной точки.

Условие $b \neq 0$ можно обеспечить за счёт выбора вектора B , неравенства (3) — за счёт выбора параметров нелинейности l_1, l_2, m_1 и m_2 . Ставится следующая задача: найти вектор Γ , удовлетворяющий равенству (5). Отметим, что число λ может быть простым или кратным. Ниже рассмотрим способ выбора вектора Γ в зависимости от собственного числа λ .

Способ 1. Пусть λ — простое собственное число. Обозначим его через λ_s , где s — некоторый индекс. Из непосредственного разрешения (5) относительно переменных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (элементов вектора Γ) получим вектор Γ с одним ненулевым элементом γ_s и остальными нулевыми элементами (см., например, [4, 7]). В этом случае поверхности переключения ориентируются ортогонально оси Ox_s в фазовом пространстве.

Способ 2. Пусть λ — собственное число кратности m ($m \leq n$). Положим $X = SY$, где S — некоторая невырожденная матрица такая, что $S^{-1}AS = A_j$. Здесь и далее A_j — это жорданова форма матрицы A . Тогда система (1) после преобразования с матрицей S примет вид

$$\dot{Y} = A_j Y + S^{-1}BF(\sigma), \quad \sigma = (S^T \Gamma, Y).$$

Пусть S_1, S_2, \dots, S_m — линейно независимые вектор-столбцы матрицы $S = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_m)$, т.е. $\det S \neq 0$. Известно [14, с. 460], что существует клетка Жордана порядка m , связанная с собственным числом λ матрицы A лишь в том случае, если m линейно независимых векторов S_1, S_2, \dots, S_m удовлетворяют равенствам

$$AS_1 = \lambda S_1, \quad AS_2 = \lambda S_2 + S_1, \quad \dots, \quad AS_m = \lambda S_m + S_{m-1}. \tag{6}$$

Далее воспользуемся этим фактом и построим новую невырожденную матрицу \tilde{S} такую, что $\tilde{S}^{-1}A\tilde{S} = A_j$ и выполняется равенство

$$A_j^T \tilde{\Gamma} = \lambda \tilde{\Gamma}, \tag{7}$$

где $\tilde{\Gamma} = \tilde{S}^T \Gamma$. Отсюда находим вектор Γ по формуле

$$\Gamma = (\tilde{S}^T)^{-1} \tilde{\Gamma}. \tag{8}$$

Поскольку $A^T = (\tilde{S}^T)^{-1} A_j^T \tilde{S}^T$, то Γ удовлетворяет равенству (5).

Оба способа выбора вектора Γ продемонстрируем на примере.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_{1,2} = -4 < 0$ и $\lambda_3 = -2 < 0$ являются собственными числами матрицы A .

Способ 1. Пусть $\lambda_3 = \lambda$. Разрешив непосредственно (5), получим ненулевой вектор $\Gamma = (0, 0, \gamma_3)^T$, где $\gamma_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь вектор Γ задаёт ортогональное расположение поверхностей переключения относительно оси Ox_3 . В этом случае траектория решения не выходит за границы зоны неоднозначности релейной нелинейности [15, с. 30]. Заметим, что условие $b \neq 0$ выполняется при любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ и $b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где b_1, b_2, b_3 — элементы вектора B .

Способ 2. Пусть $\lambda_{1,2} = \lambda$. Для приведения матрицы A к жордановой форме

$$A_j = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

подходит матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{11} & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} \end{pmatrix}$$

с $s_{11} \neq 0$, $s_{23} \neq 0$ и $s_{12} \neq s_{22}$.

Приведём матрицу A к виду A_j с помощью, например, матрицы преобразования

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S = 0.5 \neq 0.$$

Вектор-столбцы $S_1 = (1, 1, 0)^T$, $S_2 = (1, 1.5, 0)^T$ и $S_3 = (0, -1, 1)^T$, составляющие матрицу S , линейно независимы.

Первое равенство $AS_1 = \lambda S_1$ из (6) выполняется, т.е. S_1 — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу $\lambda = -4$. Рассмотрим второе равенство из (6), а именно

$$AS_2 = \lambda S_2 + S_1. \quad (9)$$

Подставим вектор S_1 в (9) и полученное равенство рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных s_{12} , s_{22} и s_{32} (элементов вектора S_2). Системе (9) удовлетворяют значения $s_{12} = 1$, $s_{22} = 1.5$ и $s_{32} = 0$, т.е. элементы вектор-столбца S_2 матрицы S . Общим решением системы (9) является вектор $\tilde{S}_2 = (s_{12}, 0.5(1 + 2s_{12}), 0)^T$, где переменная s_{12} может быть выбрана произвольно. Нетрудно проверить, что векторы S_1 , \tilde{S}_2 и S_3 линейно независимы. Вектор \tilde{S}_2 неоднозначен в силу произвольности выбора s_{12} . Подберём такое значение s_{12} , чтобы выполнялось равенство $A_j^T \tilde{S}_2 = \lambda \tilde{S}_2$ (аналогичное равенству (7)). Имеем

$$A_j^T \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} -4s_{12} \\ s_{12} - 2(1 + 2s_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} -4s_{12} \\ -2(1 + 2s_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Равенства первой и третьей строк — это тождества, а из равенства второй строки следует, что $s_{12} = 0$, т.е. $\tilde{S}_2 = (0, 0.5, 0)^T$.

Получим новую матрицу

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (S_1 \ \tilde{S}_2 \ S_3), \quad \det \tilde{S} = 0.5 \neq 0,$$

с линейно независимыми столбцами. Отметим, что преобразования с матрицами S и \tilde{S} приводят к одной и той же жордановой форме A_j . Таким образом, векторы, составляющие матрицы S и \tilde{S} , являются векторами базиса, в котором $A = A_j$ и выполняется равенство $A_j^T \tilde{S}_2 = \lambda \tilde{S}_2$. Отсюда в силу (7) имеем $\tilde{\Gamma} = \tilde{S}_2$.

Вектор $\Gamma = (-1, 1, 1)^T$, вычисленный по формуле (8), удовлетворяет равенству (5). Действительно, $A^T \Gamma = (4, -4, -4)^T = -4\Gamma$. Следовательно, Γ — собственный вектор матрицы A^T , отвечающий $\lambda = -4$. Заметим, что условие $b \neq 0$ выполняется, если элементы вектора B удовлетворяют неравенству $-b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$.

Замечание 1. В примере 1 клетка Жордана имеет порядок $m = 2$, поэтому для построения матрицы \tilde{S} и вычисления вектора Γ использованы два равенства из (6). В случае если $m > 2$ проводятся аналогичные рассуждения с большим числом равенств из (6), что расширяет выбор вектора Γ .

Замечание 2. В примере 1, разрешив непосредственно систему $A^T \Gamma = -4\Gamma$, получим $\Gamma = (\gamma_1, -\gamma_1, -\gamma_1)^T$, где $\gamma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При $\gamma_1 = -1$ имеем найденный в примере 1 вектор Γ .

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ОПЕРАТОРА P_2

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, причём $\lambda < 0$, $b < 0$, дополнительно $t_0 = 0$ и имеют место неравенства

$$-\frac{bm_2}{\lambda} < l_1 < l_2 < -\frac{bm_1}{\lambda}. \tag{10}$$

Тогда времена перехода t_1 и $t_2 - t_1$ из Ω_1 в Ω_2 и из Ω_2 в Ω_1 определяются соответственно как

$$t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda l_2 + bm_1}{\lambda l_1 + bm_1}, \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda l_1 + bm_2}{\lambda l_2 + bm_2}, \tag{11}$$

а неподвижная точка $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$ оператора P_2 вычисляется по формуле

$$X_*^1 = (E - e^{AT})^{-1} (e^{A(t_2-t_1)} A^{-1} (e^{At_1} - E) Bm_1 + A^{-1} (e^{A(t_2-t_1)} - E) Bm_2), \tag{12}$$

где E — единичная матрица n -го порядка, $T = t_2$.

Доказательство. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда на компактном множестве Ω_1 (или Ω_2) оператор $P_2 \in \mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует замкнутая траектория.

Из (4) выпишем систему с двумя переходами, которая определяет оператор P_2 . Для начальной точки $X^1 \in \Omega_1$ и начального момента времени $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} X^2 &= e^{At_1} X^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bm_1 d\tau, \quad (\Gamma, X^1) = l_1, \\ X^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} Bm_2 d\tau, \quad (\Gamma, X^2) = l_2, \end{aligned} \tag{13}$$

где t_1 и t_2 — моменты первой встречи с L_2 и L_1 соответственно, $t_2 = T$, точки X^1, X^2 принадлежат замкнутой траектории T -периодического решения.

Для любого решения $X(t)$ системы (1) независимо от начальной точки на множестве Ω_1 время перехода t_1 из Ω_1 в Ω_2 такое же, как и время перехода $t_2 - t_1$ из Ω_2 в Ω_1 , т.е. для любой начальной точки $X(0) \in \Omega_1$ сумма $T = t_1 + (t_2 - t_1) = t_2$ является постоянной величиной. Действительно, если выполнено равенство (5), то приходим к дифференциальному уравнению относительно функции $\sigma(t) = (\Gamma, X(t))$ следующего вида:

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda\sigma(t) + bF(\sigma(t)). \tag{14}$$

Решив задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием $\sigma(0) = l_1$ на интервале $[0, t_1)$, начальным условием $\sigma(t_1) = l_2$ на интервале $[t_1, t_2)$ и с учётом равенства $\sigma(t_2) = l_1$, получим для времён перехода формулы (11), имеющие смысл при выполнении неравенств (10) в условии теоремы 2 (см. [16, с. 564-565]).

Введём обозначения

$$I_1 = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bm_1 d\tau, \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} Bm_2 d\tau.$$

Множество Ω_1 , содержащее начальную точку X^1 , и значения t_1, t_2 известны. Поэтому, используя представление (13) с учётом введённых обозначений, далее построим итерационный процесс для нахождения единственной неподвижной точки. Вообще операторы семейства \mathcal{P} представляют собой семейство точно-множественных отображений компактного множества Ω_1 в себя, и поэтому оператор P_2 обеспечивает стандартный итерационный процесс отображения выпуклого компактного множества Ω_1 в себя (определение стандартного процесса см. в [17, с. 47]).

Пусть $X_{(1)}^1 \in \Omega_1$ является начальной точкой, где номер в скобках означает порядковый номер итерации. Тогда первая итерация описывается равенствами

$$\begin{aligned} X_{(1)}^2 &= e^{At_1} X_{(1)}^1 + I_1, & X_{(1)}^2 &\in \Omega_2, \\ X_{(2)}^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X_{(1)}^2 + I_2, & X_{(2)}^1 &\in \Omega_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Точка $X_{(2)}^1$ является начальной для второй итерации. Выразим $X_{(2)}^1$ через $X_{(1)}^1$, подставив выражение для $X_{(1)}^2$ из первого равенства системы (15) во второе:

$$X_{(2)}^1 = e^{AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2.$$

Вторая итерация с учётом последнего равенства описывается равенствами

$$\begin{aligned} X_{(2)}^2 &= e^{At_1} X_{(2)}^1 + I_1 = e^{AT} e^{At_1} X_{(1)}^1 + e^{AT} I_1 + e^{At_1} I_2 + I_1, & X_{(2)}^2 &\in \Omega_2, \\ X_{(3)}^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X_{(2)}^2 + I_2 = e^{AT} X_{(2)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2, & X_{(3)}^1 &\in \Omega_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Точка $X_{(3)}^1$ — начальная точка для третьей итерации. Выразим $X_{(3)}^1$ через $X_{(1)}^1$:

$$X_{(3)}^1 = e^{2AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} e^{AT} I_1 + e^{AT} I_2 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2.$$

Данный процесс можно продолжить и получить последовательность точек переключения $\{X_{(k)}^1\}_{k=1}^\infty \in \Omega_1 \subset L_1$. Выпишем формулы для $X_{(k)}^1$ и $X_{(k+1)}^1$:

$$\begin{aligned} X_{(k)}^1 &= e^{(k-1)AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} e^{(k-2)AT} I_1 + e^{(k-2)AT} I_2 + \dots + e^{A(t_2-t_1)} e^{AT} I_1 + e^{AT} I_2 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2, \\ X_{(k+1)}^1 &= e^{AT} X_{(k)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично строится последовательность точек переключения $\{X_{(k)}^2\}_{k=1}^\infty \in \Omega_2 \subset L_2$.

Сумма двух последних слагаемых в формулах (17) является постоянной величиной, которую обозначим через C , т.е.

$$C = e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2 = e^{A(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau. \quad (18)$$

Пусть $X_{(1)}^1$ и $\tilde{X}_{(1)}^1$ из множества Ω_1 являются начальными точками. Тогда, исходя из соотношений (17), получим равенство

$$\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| = \|e^{kAT}\| \|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|.$$

По теореме 1 вещественная часть $\operatorname{Re} \lambda_i$ собственного числа λ_i матрицы A отрицательна. Пусть $\alpha = \max_{i=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_i$, тогда $\alpha < 0$. Согласно [14, с. 57] справедлива оценка $\|e^{At}\| \leq c e^{\alpha t}$ при $t \geq 0$, где c — положительная константа. Отсюда следует неравенство

$$\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| \leq c e^{\alpha k T} \|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Величина $\|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|$ ограничена, так как не превосходит $\sup_{X_1, X_2 \in \Omega_1} \|X_1 - X_2\|$; $ce^{\alpha kT} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Значит $\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, т.е. итерационный процесс сходится.

Рассмотрим второе равенство из (17), а именно $X_{(k+1)}^1 = e^{AT} X_{(k)}^1 + C$. Итерационный процесс сходится к неподвижной точке $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$ (т.е. $\|X_{(k)}^1 - X_*^1\| \rightarrow 0$) тогда и только тогда, когда $\|X_{(k+1)}^1 - X_{(k)}^1\| = \|(e^{AT} - E)X_{(k)}^1 + C\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, откуда $X_*^1 = (E - e^{AT})^{-1}C$.

После интегрирования выражений в равенстве (18) получим для неподвижной точки $X_*^1 \in \Omega_1$ оператора P_2 формулу (12). Теорема доказана.

Замечание 3. Формулу для вычисления неподвижной точки $X_*^2 \in \Omega_2 \subset L_2$ можно получить аналогично.

Далее пусть X, Y — топологические пространства. Приведём определения из [18, с. 24].

Определение 4. Гомотопией или деформацией из X в Y называется непрерывное отображение $\Theta: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, т.е. для каждого $\nu \in [0, 1]$ отображение $\Theta_\nu: X \rightarrow Y$, $\Theta_\nu(x) = \Theta(x, \nu)$, является непрерывным. Однопараметрическое семейство $\{\Theta_\nu\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ также называется гомотопией или деформацией.

Определение 5. Два непрерывных отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует деформация $\{\Theta_\nu: X \rightarrow Y\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ такая, что $f_0 = \Theta_0$ и $f_1 = \Theta_1$.

Справедливо

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда любой оператор семейства $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}$ при $k > 1$ имеет единственную неподвижную точку, которая совпадает с неподвижной точкой $X_*^1 \in \Omega_1$ оператора P_2 .

Доказательство. В работе [11] показано, что семейство операторов \mathcal{P} имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geq 3$ выполняется условие

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \text{sign } J_{P_2}(X_{\text{fp}}) = 0,$$

где X_{fp} — неподвижная точка оператора P_2 , $J_{P_2}(X_{\text{fp}})$ — якобиан отображения P_2 , вычисленный в точке X_{fp} .

Для точки $X_{\text{fp}} = X_*^1$, определяемой по формуле (12), выполняется равенство $\Lambda(P_2) = 0$ (см. [19, с. 252, 255]), что геометрически в условиях теоремы 1 означает следующее: на множестве Ω_1 существует непрерывное касательное к траекториям векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. При этом якобиан $J_{P_2}(X)$ отличен от нуля, непрерывен и не меняет свой знак на множестве Ω_1 , поскольку это множество связное и замкнутое.

Покажем гомотопность семейства \mathcal{P} . Для отображения P_2 при t_1 и $t_2 = T$ (одних и тех же для всех переходов) из (15) получим

$$X_{(2)}^1 = e^{A(T-t_1)}(e^{At_1} X_{(1)}^1 + I_1) + I_2,$$

а для отображения P_4 из (16) имеем

$$X_{(3)}^1 = e^{A(T-t_1)}(e^{At_1} X_{(2)}^1 + I_1) + I_2,$$

где $X_{(1)}^1, X_{(2)}^1 \in \Omega_1$, при этом точка $X_{(1)}^1$ произвольная. Определим теперь деформацию (или гомотопию) относительно Ω_1 . Положим $X_{(2)}^1 = f_0$ и $X_{(3)}^1 = f_1$. Функции f_0 и f_1 определены на множестве Ω_1 . Зададим $\{\Theta_\nu: \Omega_1 \rightarrow \Omega_1\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ равенством $\Theta_\nu = (1 - \nu)f_0 + \nu f_1$. Имеем $\Theta_0 = f_0$ и $\Theta_1 = f_1$. Следовательно, непрерывные отображения P_2 и P_4 являются гомотопными. Аналогичное утверждение можно получить для отображений P_4 и P_6 и т.д. для всего семейства \mathcal{P} .

Итак, все операторы семейства \mathcal{P} — гомотопные между собой отображения, поэтому степень отображения определена и одинакова для любого отображения из семейства \mathcal{P} [20,

с. 94–95]. В частности, все отображения из \mathcal{P} удовлетворяют теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [19, с. 255]). Значит, степень отображения P_2 является инвариантом класса гомотопных между собой отображений P_{2k} , $k \geq 1$. Отсюда следует единственность неподвижной точки $X_*^1 \in \Omega_1$ для семейства \mathcal{P} . Следствие доказано.

Приведём пример, иллюстрирующий основной теоретический результат.

Пример 2. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Gamma = (-1, 1, 1)^T$$

из примера 1. Положим $B = (2, 0, 0)^T$, $l_1 = 0.01$, $l_2 = 0.2$, $m_1 = -2$ и $m_2 = 0$. Отметим, что петля гистерезиса несимметричная.

Собственные числа $\lambda_{1,2} = -4$, $\lambda_3 = -2$ матрицы A являются вещественными и отрицательными. Имеем $b = -2 \neq 0$. Справедливы неравенства (3), поскольку $-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) = 0 < l_1$, $-(\Gamma, A^{-1}Bm_1) = 1 > l_2$. Равенство (5) выполняется для $\lambda = -4$ (см. пример 1). Таким образом, выполнены условия теоремы 1, причём $\lambda < 0$, $b < 0$. Имеем $-bm_2/\lambda = 0$, $-bm_1/\lambda = 1$, откуда получим $0 < 0.01 < 0.2 < 1$, т.е. выполнены неравенства (10) в теореме 2.

Рассмотрим матрицу неособого преобразования

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из примера 1. Получим матрицу

$$A_j = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

вычисленную по формуле $A_j = \tilde{S}^{-1}A\tilde{S}$. Поскольку A_j — жорданова форма матрицы A , то $e^{At} = \tilde{S}e^{A_j t}\tilde{S}^{-1}$ [14, с. 56]. Итак,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2te^{-4t} \\ -2te^{-4t} & (1+2t)e^{-4t} & (1+2t)e^{-4t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее расчёты выполнены с точностью до 10^{-9} , полученные результаты представлены с округлением до тысячных. По формулам (11) находим $t_1 = 0.053$ и $t_2 - t_1 = 0.749$, откуда $T = 0.802$. После подстановки значений в (12) получим неподвижную точку X_*^1 оператора P_2 . Имеем $X_*^1 = (0.006, 0.016, 0)^T$ и $(\Gamma, X_*^1) = 0.01 = l_1$, значит $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе доказанного ранее утверждения (теорема 1), что орбитально асимптотически устойчивой замкнутой траектории с двумя точками переключения в фазовом пространстве

соответствует единственная неподвижная точка оператора, порождаемого исследуемой системой для двух переходов за некоторое время T при определённых условиях на вектор обратной связи, получены результаты данной работы. Предложены способы выбора вектора обратной связи, которые иллюстрируются на примере 1. Установлены условия существования неподвижной точки и получена формула для её вычисления (теорема 2). Доказано, что найденная неподвижная точка является единственной для любого оператора из порождённого семейства (следствие). Пример 2 подтверждает конструктивность теоремы 2 и демонстрирует её применение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камачкин, А.М. Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью / А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. — 2020. — Т. 16, № 2. — С. 186–199.
2. О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами / А.С. Фурсов, Т.С. Тодоров, П.А. Крылов, Р.П. Митрев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 8. — С. 1103–1121.
3. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
4. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
5. Евстафьева, В.В. Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2021. — Т. 109, № 4. — С. 529–543.
6. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
7. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
8. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
9. Kamachkin, A.M. Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system / A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva // Appl. Math. — 2022. — V. 67, № 1. — P. 65–80.
10. Камачкин, А.М. Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом / А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 456–469.
11. Камачкин, А.М. Существование единственной неподвижной точки отображений, порождённых многомерной системой с релейным гистерезисом / А.М. Камачкин, В.В. Евстафьева, Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 996–1000.
12. Покровский, А.В. Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах / А.В. Покровский // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 4. — С. 16–23.
13. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.

14. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
15. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.
16. Зубов, В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах / В.И. Зубов. — Л. : Судпромгиз, 1962. — 631 с.
17. Итеративные методы в теории игр и программировании / В.З. Беленький, В.А. Волконский, С.А. Иванков [и др.]. — М. : Наука, 1974. — 239 с.
18. Дольд, А. Лекции по алгебраической топологии / А. Дольд. — М. : Мир, 1976. — 463 с.
19. Спеньер, Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. — М. : Мир, 1971. — 680 с.
20. Понтрягин, Л.С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий / Л.С. Понтрягин. — М. : Наука, 1976. — 174 с.

ANALYTICAL CALCULATION OF FIXED POINT OF OPERATOR GENERATED BY MULTIDIMENSIONAL SYSTEM WITH RELAY HYSTERESIS

A. M. Kamachkin¹, V. V. Yevstafyeva², D. K. Potapov³

Saint Petersburg State University, Russia

e-mail: ¹a.kamachkin@spbu.ru, ²v.evstafieva@spbu.ru, ³d.potapov@spbu.ru

We consider a multidimensional system of ordinary differential equations with relay nonlinearity of a hysteresis type in a special form that has made it possible to analytically calculate the fixed point of the operator generated by this system. We propose procedures for selecting a vector defining the location of discontinuity surface (switch surfaces) in the phase space such that there exists a unique fixed point on one of these surfaces. Examples representing the obtained theoretical results are given.

Keywords: multidimensional dynamical system, relay nonlinearity with hysteresis, fixed point, switch point, switch surface, periodic solution, Jordan block, family of point-multiple mappings, iterative process.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators, *Vestn. S.-Peterb. Univ. Prikl. Mat. Inf. Protsess. Upr.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 186–199.
2. Fursov, A.S., Todorov, T.S., Krylov, P.A., and Mitrev, R.P., On the existence of oscillatory modes in a nonlinear system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 8, pp. 1081–1099.
3. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.
4. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
5. Yevstafyeva, V.V., Existence of T/k -periodic solutions of a nonlinear nonautonomous system whose matrix has a multiple eigenvalue, *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 4, pp. 551–562.
6. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
7. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 254–269.
8. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.

9. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system, *Appl. Math.*, 2022, vol. 67, no. 1, pp. 65–80.
10. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Fixed points of a mapping generated by a system of ordinary differential equations with relay hysteresis, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 455–467.
11. Kamachkin, A.M., Yevstafyeva, V.V., and Potapov, D.K., The existence of a unique fixed point of mappings generated by a multidimensional system with relay hysteresis, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 998–1002.
12. Pokrovskii, A.V., Existence and computation of stable modes in relay systems, *Autom. Remote Control*, 1986, vol. 47, no. 4, pp. 451–458.
13. Tsypkin, Ya.Z., *Releinye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
14. Demidovich, B.P., *Lektsii po matematicheskoi teorii upravleniya* (Lectures on Mathematical Stability Theory), Moscow: Nauka, 1967.
15. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.
16. Zubov, V.I., *Kolebaniya v nelineinykh i upravlyaemykh sistemakh* (Oscillations in Nonlinear and Controlled Systems), Leningrad: Sudpromgiz, 1962.
17. Belenkii, V.Z., Volkonskii, V.A., Ivankov, S.A. [et al.], *Iterativnye metody v teorii igr i programmirovanii* (Iterative Methods in Games Theory and Programming), Moscow: Nauka, 1974.
18. Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972.
19. Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1966.
20. Pontryagin, L.S., *Gladkie mnogoobraziya i ikh primeneniya v teorii gomotopii* (Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory), Moscow: Nauka, 1976.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.5

ОЦЕНКИ СНИЗУ ГЛАВНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
БИЛАПЛАСИАНА НА ГРАФЕ© Р. Ч. Кулаев¹, С. А. Каркузаев²¹Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
г. Владикавказ²Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ
e-mail: ¹kulaevrch@mail.ru, ²s.a.karkuzaev@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2024 г., после доработки 30.04.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Найдены нижние оценки для минимальных собственных значений дифференциальных операторов четвёртого порядка на графах. Установлен аналог тождества Пиконе для уравнения четвёртого порядка на сети. Получены теоремы сравнения штурмовского типа для такого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на графе, собственное значение, уравнение стержня, теорема Штурма.

DOI: 10.31857/S0374064124080032, EDN: KDHDXT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье изучается краевая задача на собственные значения для дифференциального оператора L четвёртого порядка на графе Γ , возникающая при моделировании малых деформаций плоских стержневых систем:

$$Lu(x) = \lambda \rho(x)u(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Оператор L задаётся обыкновенными дифференциальными уравнениями на рёбрах графа Γ , а в узлах графа — наборами условий трансмиссии (см. п. 2). Под *дифференциальным уравнением на графе* подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа и набор условий согласования в его внутренних вершинах.

К настоящему времени подробно изучен вопрос об асимптотике спектра краевых задач на графах произвольного порядка [2–5], получены оценки кратностей собственных значений оператора Штурма–Лиувилля [6] и оператора четвёртого порядка на графе [7]. В данной работе мы находим оценку снизу ведущего собственного значения краевой задачи для уравнения четвёртого порядка. Имеется несколько подходов к получению таких оценок. Наиболее общим является операторный подход, развитый в работах М.А. Красносельского (см., например, [8, гл. 2]) и его учеников. Его основная идея заключается в том, что оценка снизу ведущего собственного значения краевой задачи эквивалентна оценке спектрального радиуса интегрального оператора, обращающего краевую задачу. Ядром такого интегрального оператора является функция Грина соответствующей краевой задачи. А поскольку положительность функции Грина задачи на графе обеспечивают оператору “хорошие” зна-

корегулярные свойства [1, 3, 9–13], то для получения оценки ведущего собственного значения можно применить теорию операторов в пространствах с конусами. Однако этот операторный подход не может быть применён для наших целей ввиду его трудоёмкости.

Другой подход при получении оценок ведущего собственного значения краевой задачи для лапласиана с краевыми условиями Дирихле на графе основан на принципе Рэлея и методе перестановок–симметризаций [14]. При симметризации Шварца (при симметричной перестановке) неотрицательной функции из пространства $H^1(\mathbb{R})$ норма её градиента в $L^2(\mathbb{R})$ не возрастает. Вместе с принципом Рэлея этот факт позволил получить оценку первого собственного значения лапласиана, подчинённого условиям Дирихле.

В настоящей статье мы получаем оценку снизу минимального собственного значения краевой задачи для дифференциального уравнения четвёртого порядка на графе Γ , аналогичную оценке Д.Р. Даннингера [15] (см. также [16]). Для её обоснования используется аналог тождества Пиконе [17, гл. X], позволяющий также сформулировать теорему сравнения типа Штурма для уравнения четвёртого порядка на графе.

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной статье будем использовать терминологию и обозначения работ [1, 9]. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ — связный и конечный *геометрический граф* без петель с множеством $V(\Gamma)$ вершин и множеством $E(\Gamma)$ точек рёбер графа. *Ребро* графа — это открытый прямолинейный интервал конечной длины, а *вершина* графа — это концевая точка одного или нескольких рёбер. Рёбра графа обозначаются как γ_i , вершины — a, b, c, \dots . Для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a , и через $|I(a)|$ — количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geq 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое связное подмножество Γ .

Введём функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\},$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$, обозначим его через $u_i(a)$. Отметим, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ ($k \neq i$).

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i — длина γ_i . Положим $u'_i(x) := \lim_{\gamma_i \ni y \rightarrow x} (u_i(y) - u_i(x)) / (\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \bar{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) будем обозначать пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ пусть $u_i^{(j)}(a)$, $j = \bar{1}, \bar{n}$, — множество производных вдоль рёбер, смежных с этой вершиной. Производные нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению “от вершины”, которые будем обозначать $u_i^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали).

Далее рассмотрим спектральную краевую задачу (1), (2) на геометрическом графе Γ . При этом под *дифференциальным уравнением (1) на графе* мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа:

$$(p_i(x)u_i'')'' + r_i(x)u_i = \lambda\rho_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{3}$$

и набор условий согласования во внутренних вершинах графа $a \in J(\Gamma)$. В каждой вершине $a \in J(\Gamma)$, $|I(a)| \geq 3$, накладываются условия

$$u_i(a) = u(a), \quad i \in I(a),$$

$$u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \quad i \in I(a) \setminus \{j, k\}, \tag{4}$$

$$(p_k u_k'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{j, k\}} \alpha_{ki}(a)(p_i u_i'')(a) = 0,$$

$$(p_j u_j'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{j, k\}} \alpha_{ji}(a)(p_i u_i'')(a) = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'(a) + r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{6}$$

Здесь k и j — фиксированные индексы из множества $I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ — заданные действительные числа. В условиях (4)–(6) все производные вычисляются в направлении удаления от вершины $a \in J(\Gamma)$.

Если внутренняя вершина a инцидентна всего двум ребрам γ_i и γ_k , то в системе условий (4)–(6) нужно удалить все термины с индексом j . В этом случае условия (4)–(6) принимают вид

$$u_i(a) = u_k(a) = u(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a),$$

$$(p_k u_k'')(a) + \alpha_{ki}(a)(p_i u_i'')(a) = 0,$$

$$(p_i u_i'')'(a) + (p_k u_k'')'(a) + r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a).$$

Соотношения (3)–(6) имеют естественную физическую интерпретацию (см. [10, 18]): они возникают при моделировании малых деформаций плоской сетчатой структуры из прямых тонких стержней с условиями жёсткой спайки.

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (3), а в каждой внутренней вершине — условиям (4), (6).

Таким образом, дифференциальный оператор $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$ определяется соотношениями

$$D_L = \{u \in C^4[\Gamma]: u \text{ удовлетворяет (4), (5) на } J(\Gamma)\},$$

$$Lu(x) \equiv \begin{cases} (p(x)u'')'' + r(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ \sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'(a) + r(a)u(a), & a \in J(\Gamma). \end{cases} \tag{7}$$

Всюду далее полагаем:

– $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$; $\rho(x) \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ на $E(\Gamma)$ и $\rho(x) \geq 0$ на $J(\Gamma)$; $r(x) \in C[\Gamma]$;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и любого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ степени $|I(a)| \geq 3$ можно определить индексы $k, j \in I(a)$ так, что $\alpha_{ki_1}(a) < 0$, $\alpha_{ji_1}(a) \leq 0$ для некоторого индекса $i_1 \in I(a) \setminus \{j, k\}$ и $\alpha_{ki_2}(a) \leq 0$, $\alpha_{ji_2}(a) < 0$ для некоторого индекса $i_2 \in I(a) \setminus \{j, k\}$;
- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ степени $|I(a)| = 2$ полагаем $\alpha_{ki_1}(a) < 0$;
- в граничных условиях и условиях трансмиссии все производные вычисляются в направлении “от вершины”.

3. ТОЖДЕСТВО ПИКОНЕ

Помимо оператора $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$, порождённого соотношениями (7) с коэффициентами $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $r(x) \in C[\Gamma]$, рассмотрим оператор $\mathcal{L}: D_{\mathcal{L}} \rightarrow C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями с заменой коэффициентов на $\mathcal{P}(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} \mathcal{P}(x) > 0$, и $\mathcal{R}(x) \in C[\Gamma]$ соответственно.

Теорема 1. Пусть функции $u, v \in C^4[\Gamma]$. Если $u/v \in C[\Gamma]$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ & = \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - \\ & - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) [u(a)(\mathcal{P}v'')(a) - v(a)(pu'')(a)] + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \\ & + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a) + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')(a)u_i'(a) + \\ & + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a)v_i'(a) - 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) \sum_{i \in I(a)} u_i'(a)(\mathcal{P}_i v_i'')(a). \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Проинтегрируем дважды по частям вдоль графа Γ произведение uLu :

$$\int_{\Gamma} u Lu dx = \int_{\Gamma} [pu''^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} [u' pu'' - u(pu'')]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} [u_i' p_i u_i'' - u_i (p_i u_i'')]_{x=a}.$$

Поскольку функция u непрерывна в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u Lu dx = \int_{\Gamma} [pu''^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} u'(a)(pu'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} u(a)(pu'')(a) + \\ & + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} u_i'(a)(p_i u_i'')(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u(a) \left[\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')(a) + r(a)u(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a). \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично, проинтегрировав дважды по частям произведение $(u^2/v)\mathcal{L}v$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx = \int_{\Gamma} \left[\mathcal{P}v'' \left(\frac{u^2}{v} \right)'' + \mathcal{R}u^2 \right] dx + \\ & + \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[\left(\frac{u^2}{v} \right)' \mathcal{P}v'' - \frac{u^2}{v} (\mathcal{P}v'')' \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[\left(\frac{u_i^2}{v_i} \right)' \mathcal{P}_i v_i'' - \frac{u_i^2}{v_i} (\mathcal{P}_i v_i'')' \right]_{x=a} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \int_{\Gamma} \left[\mathcal{P}v'' \left(\frac{u^2}{v} \right)'' - \mathcal{P}u''^2 \right] dx + \\
 &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[\left(\frac{u^2}{v} \right)' \mathcal{P}v'' - \frac{u^2}{v} (\mathcal{P}v'')' \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[\left(\frac{u_i^2}{v_i} \right)' \mathcal{P}_i v_i'' - \frac{u_i^2}{v_i} (\mathcal{P}_i v_i'')' \right]_{x=a}.
 \end{aligned}$$

Вычислим производные дроби u^2/v . Тогда правая часть последнего равенства примет вид

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx - \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx + 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx - \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a) (\mathcal{P}v'')(a) v'(a) + \\
 &+ 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v}(a) (\mathcal{P}v'')'(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a) v_i'(a) + \\
 &+ 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) \sum_{i \in I(a)} u_i'(a) (\mathcal{P}_i v_i'')(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \left[\sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')'(a) + \mathcal{R}(a) v(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a) u^2(a). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Теперь, составив разность

$$\int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - uLv) dx$$

с учётом (9), (10) и (7), получим равенство (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $u \in D_L$ и $v \in D_{\mathcal{L}}$. Если $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - uLv) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\
 &= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - \\
 &- 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) [u(a)(\mathcal{P}v'')'(a) - v(a)(pu'')'(a)] + \\
 &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a) (\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, из условий (4), (5) в произвольной вершине $a \in J(\Gamma)$ получаем

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')(a) u_i'(a) = u_k'(a) \left((p_k u_k'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{k, j\}} \alpha_{ki}(a) (p_i u_i'')(a) \right) + \\
 &+ u_j'(a) \left((p_j u_j'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{k, j\}} \alpha_{ji}(a) (p_i u_i'')(a) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично для любой вершины $a \in J(\Gamma)$ получаем равенства

$$\sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a) v_i'(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} u_i'(a) (\mathcal{P}_i v_i'')(a) = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 дополнительно предположить, что $u|_{\partial\Gamma} = 0$, то выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} t(vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ & = \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a). \end{aligned} \quad (11)$$

4. ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ

Теоремы Штурма о перемежаемости и сравнении для уравнения второго порядка на графе впервые были установлены в работе [18]. В [12, 19] были доказаны аналоги теоремы Штурма о перемежаемости нулей решений для уравнения четвёртого порядка. В данном пункте, как первое следствие тождества Пиконе, приведём некоторые свойства дифференциальных неравенств и, в частности, теорему сравнения штурмовского типа для уравнения четвёртого порядка, заданного соотношениями (3)–(6).

Лемма. Пусть функция $u \in D_L$, $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и

$$\mathcal{Q}[u] := \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a)u^2(a) \leq 0.$$

Тогда система дифференциальных неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad v''(x) < 0 \quad (x \in E(\Gamma)), \quad v|_{\partial\Gamma} > 0 \quad (12)$$

не имеет решений в классе $D_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Предполагая противное, рассмотрим решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы (12). Покажем, что $v > 0$ на Γ . Для этого, учитывая неравенства $v'' < 0$ на $E(\Gamma)$ и $v > 0$ на $\partial\Gamma$, достаточно показать, что v не имеет локальных минимумов в Γ . Пусть a — произвольная внутренняя вершина графа Γ . Если a — точка локального минимума функции v , то из неравенства $v''(x) < 0$, выполненного всюду на $E(\Gamma)$, следует, что для всех $i \in I(a)$ должны выполняться неравенства $v'_i(a) > 0$. Но из свойств коэффициентов условий (4) (см. п. 2) следует, что существуют индексы $i, j, k \in I(a)$ такие, что $\alpha_{ki}(a) < 0$, $\alpha_{ji}(a) \leq 0$. Это приводит к противоречивому неравенству

$$0 < v'_i(a) = \alpha_{ki}(a)v'_k(a) + \alpha_{ji}(a)v'_j(a) < 0.$$

Следовательно, v не имеет локальных минимумов в $J(\Gamma)$. А поскольку $v'' < 0$ на $E(\Gamma)$, то v не имеет локальных минимумов в Γ . Учитывая всё сказанное и положительность v на $\partial\Gamma$, получаем, что $v > 0$ на Γ .

Подставим функции u и v в формулу (11). Полагая здесь $p \equiv 0$ на $E(\Gamma)$ и $r \equiv 0$ на Γ , будем иметь

$$0 \geq \mathcal{Q}[u] - \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a) = \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx \geq 0.$$

Но тогда $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем, что $u/v \equiv \text{const}$ на Γ , что невозможно ввиду условий леммы $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Следовательно, система (12) не разрешима в $D_{\mathcal{L}}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если существует нетривиальная функция $u \in D_L$, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned} uLu &\leq 0, \quad x \in \Gamma, \\ u|_{\partial\Gamma} &= (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0, \\ \mathcal{W}[u] &:= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u'^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \geq 0, \end{aligned}$$

то любое решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma; \quad v''(x) < 0, \quad x \in E(\Gamma), \tag{13}$$

положительное хотя бы в одной точке графа Γ , имеет нуль в $\Gamma \cup \partial\Gamma$.

Доказательство. Действительно, если $v \neq 0$ в $\Gamma \cup \partial\Gamma$, то $v > 0$ на $\Gamma \cup \partial\Gamma$. С учётом формулы (11) получим

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\mathcal{W}[u] + \int_{\Gamma} \frac{u}{v}(vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ &= \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) \geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку $(\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0$ и $\beta \geq 0, \vartheta \geq 0$, то $(pu'')(a)u'(a) \geq 0$ для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$. Поэтому $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем, что $u/v \equiv \text{const}$ на Γ . Но это противоречит равенствам $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Теорема доказана.

Следствие 3 (теорема сравнения). *Если существует нетривиальное решение краевой задачи*

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0,$$

удовлетворяющее условию $\mathcal{W}[u] \geq 0$, то любое решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы неравенств (13), положительное хотя бы в одной точке графа Γ , либо пропорционально функции u на Γ , либо имеет нуль в Γ .

Доказательство. Пусть функция $v \in D_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет (13) и положительна хотя бы в одной точке графа Γ . Из теоремы 2 следует, что v имеет нуль в $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Если v равна нулю в некоторой точке графа Γ , то теорема доказана.

Пусть v не имеет нулей в Γ . Тогда из условий теоремы следует, что $v > 0$ на Γ . Кроме того, ввиду $v''(x) < 0$ всюду на $E(\Gamma)$ все нули функции v из $\partial\Gamma$ простые. Поэтому, учитывая $u|_{\partial\Gamma} = 0$, имеем $u/v \in C[\Gamma]$. Используя следствие 2, приходим к формуле (14), а отсюда получаем $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Следовательно, $u/v \equiv \text{const}$ на Γ , т.е. v пропорциональна u на Γ . Следствие доказано.

5. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим спектральную краевую задачу (1), (2). Установим оценку снизу для ведущего собственного значения оператора L .

Как и в п. 4, вместе с оператором $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$, порождённым соотношениями (7) с коэффициентами $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $r(x) \in C[\Gamma]$, введём оператор $\mathcal{L}: D_{\mathcal{L}} \rightarrow C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями (7) с коэффициентами $\mathcal{P}(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\mathcal{R}(x) \in C[\Gamma]$.

Рассмотрим коэффициент ρ из уравнения (1) и пусть $J_{\rho}(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma): \rho(a) > 0\}$, $\Gamma_{\rho} = E(\Gamma) \cup J_{\rho}(\Gamma)$.

Теорема 3. Пусть λ_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи (1), (2), u — соответствующая собственная функция. Пусть далее v — произвольная функция из класса $D_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющая условиям:

- (i) $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$;
- (ii) $v''(x) \leq 0$ на $E(\Gamma)$;
- (iii) $\mathcal{L}v(x) \geq 0$ на $J(\Gamma) \setminus J_{\rho}(\Gamma)$.

Если

$$B[u] := \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \geq 0,$$

то

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in \Gamma_{\rho}} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}. \tag{15}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из следствия 2. Действительно, поскольку $Lu(x) = \lambda_0 \rho(x)u$ для всех $x \in \Gamma$, то из (11) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ & = \int_{\Gamma} \lambda_0 \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \lambda_0 \rho(a)u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a) = \\ & = \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - \\ & - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a). \end{aligned}$$

Из условий теоремы и неотрицательности коэффициентов краевых условий (2) следует неотрицательность правой части последнего равенства, поэтому

$$0 \leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx + \lambda_0 \sum_{a \in J(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{v}(a).$$

Наконец, используя условие (iii), получаем

$$\begin{aligned} 0 & \leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \lambda_0 \sum_{a \in J_{\rho}(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx - \sum_{a \in J_{\rho}(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}(a) \leq \\ & \leq \left(\lambda_0 - \inf_{x \in \Gamma_{\rho}} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} \right) \left(\int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_{\rho}(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_{\rho}(\Gamma)} \rho(a)u^2(a) > 0,$$

то выполняется оценка (15). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 3 является аналогом основного результата работы [16].

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМАЦИЯХ СЕТКИ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

Применим утверждение теоремы 1 к задаче о малых колебаниях плоской прямоугольной сетки тонких однородных стержней с условиями жёсткой спайки.

Рассмотрим в плоскости \mathbb{R}^2 конечный связный граф Γ , все рёбра которого параллельны координатным осям Ox_1 и Ox_2 , а степень каждой внутренней вершины графа Γ равна четырём (см. рисунок). Граф Γ можно представить в виде конечного объединения горизонтальных и вертикальных интервалов $\Gamma = (\bigcup_i (a_1^i, b_1^i)) \cup (\bigcup_j (a_2^j, b_2^j))$, множество концов которых образует границу графа $\partial\Gamma$. Отметим, что мы не требуем, чтобы длины интервалов были равны.

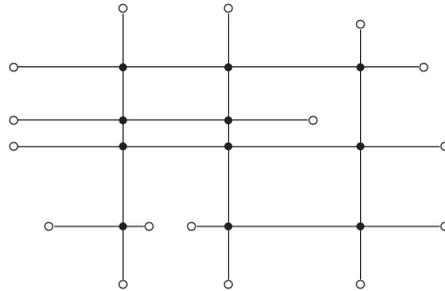


Рисунок. Конечный связный граф.

Рассмотрим плоскую сетку из тонких однородных стержней с условиями жёсткой спайки. В состоянии покоя стержневая система копирует описанный выше граф Γ . Тогда задача о собственных колебаниях стержневой системы сводится к краевой задаче на собственные значения на Γ (см., например, [9–11, 20]), порождённой обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$u_i^{IV} = \lambda u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{16}$$

и условиями трансмиссии в каждой внутренней вершине $c \in J(\Gamma)$, $I(c) = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} u_i(c) &= u(c), \quad u'_1(a) = -u'_3(c), \quad u'_2(c) = -u'_4(c), \\ u''_1(c) &= u''_3(c), \quad u''_2(c) = u''_4(c), \\ \sum_{i \in I(c)} u_i'''(c) &= 0, \quad c \in J(\Gamma). \end{aligned} \tag{17}$$

На границе графа соотношения (16), (17) дополняются краевыми условиями

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{18}$$

Обозначим через R минимальный радиус шара, содержащего граф Γ , в плоскости \mathbb{R}^2 .

Теорема 4. Пусть λ_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи (16)–(18). Тогда

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61R^4}. \tag{19}$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала построим пробную функцию. Без ограничения общности можно считать, что граф Γ содержится в шаре $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ радиуса R с центром в начале координат, при этом каждое ребро графа параллельно одной из координатных осей. Для точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, как обычно, полагаем $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и определим функцию

$$V_\varepsilon(x) = \int_{\|x\|}^{R+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{R+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in B_R(0).$$

Пусть $v_\varepsilon(x)$ — сужение функции $V_\varepsilon(x)$ на граф $\Gamma \subset B_R(0)$. Покажем, что функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 3. Положительность v_ε на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ очевидна.

Рассмотрим произвольную точку $x \in E(\Gamma)$. Обозначим через (a, b) , где $a, b \in \partial\Gamma$, прямолинейный маршрут графа Γ , содержащий точку x . Пусть для определённости рёбра маршрута (a, b) параллельны оси Ox_1 и ориентированы от a к b . Тогда если $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ — координаты точек $a, b \in \partial\Gamma$ в \mathbb{R}^2 , то

$$x = (x_1, a_2) \in [a, b] \implies x_1 \in [a_1, b_1] \subset [-r(\varepsilon), r(\varepsilon)],$$

где $r(\varepsilon) = \sqrt{(R+\varepsilon)^2 - a_2^2}$. Поэтому на (a, b) функция v_ε допускает представление

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, a_2) = \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} dt \int_0^t ds \int_s^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b). \tag{20}$$

Отсюда при $x_1 \neq 0$ легко получаем

$$v'_\varepsilon(x) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, a_2) = -\frac{|x_1|}{x_1} \int_0^{|x_1|} ds \int_s^{r_\varepsilon} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b).$$

Поскольку

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(-0, a_2) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(+0, a_2) = 0,$$

то $v'_\varepsilon(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $v_\varepsilon \in C^1[a, b]$.

Аналогично

$$v''_\varepsilon(x) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(x_1, a_2) = - \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b) \setminus 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(-0, a_2) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(+0, a_2) = - \int_0^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma$$

и $v_\varepsilon \in C^2[a, b]$. Кроме того, $v''_\varepsilon(x) < 0$ на (a, b) .

Далее несложно показать, что

$$v_\varepsilon^{IV}(x) = \frac{\partial^4 v_\varepsilon}{\partial x_1^4}(x_1, a_2) = (r^2(\varepsilon) - x_1^2) \geq \varepsilon_1 > 0, \quad x \in (a, b), \tag{21}$$

и $v_\varepsilon \in C^4[a, b]$.

Таким образом, $v_\varepsilon \in C^4[\Gamma] \cap C^4[a, b]$ для любого прямолинейного маршрута $(a, b) \subset \Gamma$. Отсюда следует, что v_ε удовлетворяет условиям трансмиссии (17) всюду на $J(\Gamma)$.

Шаг 2. Согласно теореме 3

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in E(\Gamma)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} > 0,$$

поэтому существуют прямолинейный маршрут $(a, b) \subset \Gamma$, соединяющий вершины $a, b \in \partial\Gamma$, и точка $x^* \in [a, b]$ такие, что выполнены соотношения

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in E(\Gamma)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \lim_{(a,b) \ni x \rightarrow x^*} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \inf_{x \in (a,b)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon}. \tag{22}$$

Ввиду формул (20), (21) получим, что в (22) значение справа равно

$$\inf_{x \in (a,b)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \inf_{x_1 \in (a_1, b_1)} \frac{360(r^2(\varepsilon) - |x_1|^2)}{61r^6(\varepsilon) - 75r^4(\varepsilon)|x_1|^2 + 15r^2(\varepsilon)|x_1|^4 - |x_1|^6}.$$

Положим $r = \max\{|a_1|, |b_1|\}$. Тогда

$$\lambda_0 \geq \inf_{x_1 \in [-r, r]} \frac{360(r^2 - |x_1|^2)}{61r^6 - 75r^4|x_1|^2 + 15r^2|x_1|^4 - |x_1|^6}.$$

Вычисления показывают, что инфимум достигается при $x_1 = 0$, поэтому

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61r^4} \geq \frac{360}{61(R + \varepsilon)^4}.$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то утверждение теоремы можно считать доказанным.

В случае когда граф является деревом, оценка (19) допускает уточнение, а сам граф допускает представление в виде прямолинейных маршрутов $\Gamma = \bigcup_i (a_i, b_i)$ с концевыми вершинами $a_i, b_i \in \partial\Gamma$. Пробную функцию v_ε можно последовательно строить на маршрутах (a_i, b_i) . Сначала можно определить функцию v_ε на маршруте (a_1, b_1) формулой (20). На втором шаге нужно достроить функцию v_ε на каждом маршруте, проходящем через внутренние вершины графа Γ , лежащие на интервале (a_1, b_1) . Так, если $c = (a_1, b_1) \cap (a_j, b_j)$, то

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, a_j) = K(c) \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} dt \int_0^t ds \int_s^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a_j, b_j),$$

где положительная константа $K(c)$ обеспечивает непрерывность функции v_ε в узловой вершине c . Поскольку граф является деревом, такие константы $K(c)$ существуют.

На третьем шаге достраиваем функцию v_ε на каждом маршруте, проходящем через внутренние вершины графа Γ , лежащие на интервалах, задействованных на втором шаге. И так далее.

Рассуждая аналогично как при доказательстве теоремы 4, можно получить следующий результат.

Теорема 5. Пусть $\ell(\Gamma) := \max_{(a_i, b_i) \subset \Gamma} \mu(a_i, b_i)/2$, где $\mu(a_i, b_i)$ — длина интервала (a_i, b_i) . Если граф Γ является деревом, то наименьшее собственное значение краевой задачи (16)–(18) удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61(\ell(\Gamma))^4}. \tag{23}$$

Пример. Рассмотрим граф-крест Γ , состоящий из четырёх ребер $\gamma_i, i = \overline{1, 4}$, с одной общей концевой точкой c (внутренняя вершина). На Γ рассмотрим задачу на собственные значения, порождённую соотношениями (16), (17), с граничными условиями $u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0$.

Предположив, что мера каждого из четырёх рёбер графа Γ равна $1/2$, вычислим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи. Учитывая положительность собственных

значений, нас интересуют значения $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Прямые вычисления показывают, что при $\lambda > 0$ характеристический определитель равен

$$\Delta(\lambda) = 256 \sqrt[4]{\lambda^9} \sin \sqrt[4]{\lambda} \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \left(\sin \sqrt[4]{\lambda} \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} - \sin^2 \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \right).$$

Положительные нули определителя $\Delta(\lambda)$ и есть искомые собственные значения, причём наименьший из них равен $\lambda_0 = \pi^4 \approx 97.4091$.

Поскольку меры всех рёбер графа равны, то в рассматриваемом случае $R = \ell(\Gamma)$. Если теперь использовать оценку (19) (или (23)), то вычисления покажут, что при $R = 1/2$ выполняется неравенство $\lambda_0 \geq 94.4262$.

7. ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ λ_0

Теорема 3 даёт верхнюю границу для ведущего собственного значения λ_0 , но оставляет открытым вопрос о нахождении оптимальной пробной функции v в оценке (15). Для решения этой проблемы могут быть использованы методы оптимизации.

Пусть $v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[m]} \in D_{\mathcal{L}}$, $m \in \mathbb{N}$, — произвольный набор функций, удовлетворяющих условиям (i)–(iii) теоремы 3. Пробную функцию v для оценки (15) можно искать в виде

$$v(x) = \omega_1 v^{[1]}(x) + \omega_2 v^{[2]}(x) \dots + \omega_m v^{[m]}(x),$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, а Ω — множество значений параметров, обеспечивающее выполнение условий (i)–(iii).

Тогда определение оптимальной оценки собственного значения λ_0 для заданного набора $\{v^{[i]}\}_{i=1}^m$ сводится к задаче о нахождении величины $\sup_{\omega \in \Omega} \inf_{x \in \Gamma_\rho} F_m(x, \omega)$, где

$$F_m(x, \omega) = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i \mathcal{L}v^{[i]}(x)}{\rho(x) \sum_{i=1}^m \omega_i v^{[i]}(x)}.$$

Для решения задачи минимакса можно привлечь методы вычислительной математики.

Вернёмся к примеру из п. 6 на графе-кресте. Представим граф-крест в виде объединения двух интервалов единичной меры, пересекающихся в точке $c \in J(\Gamma)$. Поскольку мера каждого ребра графа равна $1/2$, мы можем отождествить каждый из этих интервалов со своим экземпляром интервала $(-1/2, 1/2)$, который, для определённости, будем обозначать $(-1/2, 1/2)_i$, $i = 1, 2$. Пробную функцию будем искать в виде

$$v(x) = \omega_1 v^{[1]}(x) + \omega_2 v^{[2]}(x) + \omega_3 v^{[3]}(x), \quad x \in (-1/2, 1/2)_i,$$

где

$$\begin{aligned} v^{[1]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i; \\ v^{[2]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau \sigma^2 ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i; \\ v^{[3]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau \sigma^4 ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i. \end{aligned}$$

Рассуждая как и в п. 6, можно показать, что функция $v \in C^4[\Gamma]$ удовлетворяет условиям трансмиссии в узловой вершине графа. Условия (i)–(iii) теоремы 3 выполнены для любого $\varepsilon > 0$ и $\omega \in \Omega$, где $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3: \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 \leq 0\}$.

Если $\varepsilon = 10^{-5}$, то вычисления показывают, что $\sup_{\omega \in \Omega} \inf_{x \in E(\Gamma)} F_3(x, \omega) = 97.3904$ достигается при $\omega = (1, 0.94, 0.366)$ и $x = 0.229733$. Напомним, что в данном случае $\lambda_0 = \pi^4 \approx 97.4091$.

Замечание 2. Отметим, что для вычисления нулей характеристического определителя краевой задачи (1), (2) необходима фундаментальная система решений уравнения (1) на графе, а для применения формулы (15) решения дифференциального уравнения не требуется.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2024-1447.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. [и др.]. — М. : Физматлит, 2005. — 268 с.
2. Bondarenko, N.P. Partial inverse Sturm–Liouville problems / N.P. Bondarenko // *Mathematics*. — 2023. — V. 11. — Art. 2408.
3. Borovskikh, A.V. Fourth-order differential equations on geometric graphs / A.V. Borovskikh, K.P. Lazarev // *J. Math. Sci.* — 2004. — V. 119, № 6. — P. 719–738.
4. Panasenko, G. Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary layer-in-time / G. Panasenko, K. Pileckas // *Nonlin. Anal.* — 2015. — V. 122. — P. 125–168.
5. Yang, Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph / Ch.-F. Yang // *J. Math. Anal. Appl.* — 2010. — V. 365, № 2. — P. 742–749.
6. Диаб, А.Т. О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах / А.Т. Диаб, Б.К. Калдыбекова, О.М. Пенкин // *Мат. заметки*. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 489–501.
7. Кулаев, Р.Ч. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева // *Дифференц. уравнения*. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 869–876.
8. Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Физматлит, 1962. — 392 с.
9. Кулаев, Р.Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке / Р.Ч. Кулаев // *Изв. вузов. Математика*. — 2013. — Т. 57, № 2. — С. 56–66.
10. Кулаев, Р.Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев // *Мат. сб.* — 2015. — Т. 206, № 12. — С. 79–118.
11. Кулаев, Р.Ч. О свойстве неосцилляции уравнения на графе / Р.Ч. Кулаев // *Сиб. мат. журн.* — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 85–97.
12. Kulaev, R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph / R.Ch. Kulaev // *Mediterr. J. Math.* — 2022. — V. 19, № 2. — Art. 73.
13. Kulaev, R.Ch. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network / R.Ch. Kulaev, A.A. Urtaeva // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2023. — V. 46, № 14. — P. 15743–15763.
14. Диаб, А.Т. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе / А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин // *Мат. заметки*. — 2014. — Т. 96, № 6. — С. 885–895.
15. Dunninger, D.R. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities / D.R. Dunninger // *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* — 1971. — V. 50. — P. 630–641.

16. Jaroš, J. Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications / J. Jaroš // *Electron. J. Differ. Equat.* — 2011. — V. 122. — P. 1–6.
17. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс ; под ред. А.М. Эфроса. — Харьков : ГНТИУ, 1939. — 720 с.
18. Покорный, Ю.В. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин // *Докл. АН СССР.* — 1989. — Т. 309, № 6. — С. 1306–1308.
19. Кулаев, Р.Ч. Теоремы сравнения Штурма для уравнения четвертого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева // *Мат. заметки.* — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 947–952.
20. Кулаев, Р.Ч. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Р.Ч. Кулаев // *Дифференц. уравнения.* — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 161–173.

BOTTOM ESTIMATES FOR THE MINIMAL EIGENVALUE OF THE BI-LAPLACIAN ON A GRAPH

R. Ch. Kulaev¹, S. A. Karkuzaev²

¹*Southern Mathematical Institute — Branch of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia*

²*North Ossetian State University named after K.L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia*

e-mail: ¹kulaevrch@mail.ru, ²s.a.karkuzaev@mail.ru

Bottom estimates for the minimum eigenvalues of fourth-order differential operators on graphs are found. An analogue of the Picone identity for a fourth-order equation on a network is established. Comparison theorems of the Sturm type for such an equation are obtained.

Keywords: differential equation on a graph, eigenvalue, equation of rod, Sturm's theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement no. 075-02-2024-1447.

REFERENCES

1. Pokornyy, Yu.V., Penkin, O.M., Pryadiev, V.L., Borovskikh, A.V., Lazarev, K.P., and Shabrov, S.A., *Differentsialnye uravneniya na geometricheskikh grafakh* (Differential Equations on Geometric Graphs), Moscow: Fizmatlit, 2005.
2. Bondarenko, N.P., Partial inverse Sturm–Liouville problems, *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. 2408.
3. Borovskikh, A.V. and Lazarev, K.P., Fourth-order differential equations on geometric graphs, *J. Math. Sci.*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 719–738.
4. Panasenko, G. and Pileckas K., Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary layer-in-time, *Nonlin. Anal.*, 2015, vol. 122. pp. 125–168.
5. Yang, Ch.-F., Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 365, no. 2, pp. 742–749.
6. Diab, A.T., Kaldybekova, B.K., and Penkin, O.M., On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs, *Math. Notes.*, 2016, vol. 99, no. 4, pp. 492–502.
7. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva, A.A., On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 869–876.
8. Krasnoselskii, M.A., *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff–Groningen, 1964.
9. Kulaev, R.Ch., The Green function of the boundary value problem on a star-shaped graph, *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 2, pp. 48–57.
10. Kulaev, R.Ch., Disconjugacy of fourth-order equations on graphs, *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 12, pp. 1731–1770.
11. Kulaev, R.Ch., On the disconjugacy property of an equation on a graph, *Sib. Math. J.*, 2016. vol. 57, no. 1, pp. 64–73.

12. Kulaev, R.Ch., The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph, *Mediterr. J. Math.*, 2022. vol. 19, no. 2, art. 73.
13. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva, A.A., Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023. vol. 46, no. 14, pp. 15743–15763.
14. Diab, A.T., Kuleshov, P.A., and Penkin, O.M., Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 6, pp. 948–956.
15. Dunninger, D.R., A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities, *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1971, vol. 50, pp. 630–641.
16. Jaroš, J., Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications, *Electron. J. Differ. Equat.*, 2011, vol. 122, pp. 1–6.
17. Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover Publ., 2013.
18. Pokornyi, Yu.V. and Penkin, O.M., Sturm theorems for equations on graphs, *Dokl. AN SSSR*, 1990, vol. 40, no. 3, pp. 640–642.
19. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva A.A., Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph, *Math. Notes*, 2022. vol. 111, no. 5, pp. 977–981.
20. Kulaev, R.Ch., Criterion for the positiveness of the Green function of a many-point boundary value problem for a fourth-order equation, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 163–176.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 917.955

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ
В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ© Ш. А. Алимов¹, А. К. Кудайбергенов²¹Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,
г. Ташкент, Узбекистан^{1,2}Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент
e-mail: ¹sh_alimov@mail.ru, ²khudaybergenovallambergen@mail.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г., после доработки 03.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Исследованы вопросы существования и единственности решения задачи определения стационарной температуры на верхней границе полосы при известных условиях на нижней границе.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Коши, аналитическая функция.

DOI: 10.31857/S0374064124080047, EDN: KDGAUS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий процесс распределения температуры в слое $P \subset \mathbb{R}^3$:

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1, x_2 \in \mathbb{R}, -h < x_3 < 0, h > 0\}.$$

Пусть $u(x_1, x_2, x_3, t)$ — температура в точке (x_1, x_2, x_3) в момент $t \geq 0$, а $k(x_1, x_2, x_3)$ — коэффициент теплопроводности. Процесс распространения тепла описывается уравнением (см. [1, гл. III, § 1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[k(x_1, x_2, x_3) \operatorname{grad} u] = 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Предполагаем, что температура на верхней границе $\{x_3 = 0\}$ слоя P и тепловой поток через неё известны. Граничные условия на верхней границе имеют вид

$$u(x_1, x_2, 0, t) = \phi(x_1, x_2, x_3), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} = \chi(x_1, x_2, x_3), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Требуется найти температуру $u(x_1, x_2, -h, t)$ на нижней границе слоя P .

Формально к граничным условиям (1), (2) следует присоединить начальное условие, однако в настоящей работе рассматривается установившийся процесс, в котором требуется найти стационарное, т.е. не зависящее от времени, решение. Кроме того, будем предполагать, что граничные данные не зависят от x_2 , а коэффициент теплопроводности зависит только от глубины: $k = k(x_3)$.

Вводя новые обозначения $x = x_1$ и $y = -x_3$, получаем следующую плоскую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{k(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[k(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \chi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

которую рассматриваем в области

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h\}.$$

Коэффициент теплопроводности $k(y)$ предполагается положительным и дважды непрерывно дифференцируемым на полупрямой $y \geq 0$.

Обозначим символом $\Lambda_h(\Omega)$ класс функций $u(x, y)$, непрерывных в области Ω и для любого компакта $K \subset (0, h)$ удовлетворяющих условию

$$\|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_K, \quad y \in K, \quad (5)$$

где C_K — некоторая постоянная; точка означает переменную, по которой находится норма.

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(x, y)$ является решением краевой задачи (3), (4), если выполнены следующие условия:

- i) функция u и все её производные, входящие в уравнение (3), принадлежат $\Lambda_h(\Omega)$;
- ii) функция u удовлетворяет уравнению (3);
- iii) выполняются граничные условия (4) в следующем смысле:

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - \phi(x)|^2 dx = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \chi(x) \right|^2 dx = 0. \quad (7)$$

Таким образом, мы ищем решения, для которых на каждом слое выполняется условие (5).

Заметим, что, вычитая из решения $u(x)$ произвольную функцию $w(x)$ из класса Λ_h , удовлетворяющую в области Ω уравнению (3) и только второму из граничных условий (4), т.е.

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \chi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

мы можем свести задачу (3), (4) к следующей задаче Коши:

$$\operatorname{div}[k(y) \operatorname{grad} u(x, y)] = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

с новой функцией $\phi(x)$.

Предельная задача Коши. Для заданной функции $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ найти предельное значение решения $u(x, y)$ задачи (8), (9) на верхней границе $\{y = h\}$ области Ω .

Определение 2. Решением предельной задачи Коши является пара функций, а именно: функция $u(x, y)$, удовлетворяющая (8) и (9) в смысле i)–iii), и функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, h - \varepsilon) - \psi(x)|^2 dx = 0. \quad (10)$$

Задаче Коши для эллиптических уравнений посвящено огромное число работ, начиная с классической книги Ж. Адамара [2], в которой данная задача была названа *некорректно поставленной* (достаточно полный обзор соответствующей литературы содержится в [3]). В большинстве работ изучаются вопросы устойчивости и регуляризации решений в предположении их существования и удовлетворения некоторым дополнительным условиям (см. [4–8]).

В настоящей статье условия разрешимости предельной задачи Коши устанавливаются в терминах принадлежности граничной функции ϕ специальному классу функций A_σ . Ранее аналогичные результаты были получены для случая ограниченной области [9].

Пусть задано число $\sigma > 0$. Символом A_σ обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые могут быть аналитически продолжены внутрь полосы

$$S_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$$

так, что аналитическое продолжение $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\|f\|_\sigma^2 = \sup_{|y| < \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < +\infty. \tag{11}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть функция ϕ принадлежит классу A_σ , где $\sigma = h$. Тогда решение предельной задачи Коши существует и является единственным.

Теорема 2. Предположим, что для заданной функции $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ существует решение предельной задачи Коши. Тогда функция ϕ принадлежит классу A_σ , где $\sigma = h$.

Доказательства этих теорем во многом опираются на методы спектральной теории дифференциальных операторов и гармонического анализа (см. [10, 11]).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА A_σ

Изучим свойства преобразования Фурье

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

функций из класса A_σ .

Теорема 3. Для любой функции $f \in A_\sigma$ выполняются неравенства

$$\pi \|f\|_\sigma^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \operatorname{ch}(2\sigma\xi) d\xi \leq 2\pi \|f\|_\sigma^2. \tag{12}$$

Заметим, что функции из A_σ не предполагаются абсолютно интегрируемыми.

Установим справедливость неравенств (12) при дополнительном предположении абсолютной интегрируемости.

Лемма 1. Пусть функция $f \in A_\sigma$. Предположим, что выполняется оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)| dx \leq \operatorname{const}, \quad |y| < \sigma. \tag{13}$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\xi y} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx, \quad |y| < \sigma. \tag{14}$$

Доказательство. Из оценки (13) следует, что

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)| dx dy \leq \text{const}. \quad (15)$$

Положим

$$g(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(x+iy)| dy,$$

тогда согласно (15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Из сходимости последнего интеграла вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \inf g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \inf g(x) = 0.$$

Следовательно, найдутся последовательности $a_k \rightarrow -\infty$ и $b_k \rightarrow +\infty$ такие, что

$$g(a_k) \rightarrow 0, \quad g(b_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Для любого $\xi \in \mathbb{R}$ функция $f(z)e^{-i\xi z}$ аналитична в полосе $|\text{Im } z| \leq \sigma$, тогда по теореме Коши

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)e^{-i\xi x} dx + \int_0^y f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)} dt + \int_{b_k}^{a_k} f(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)} dx + \int_y^0 f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)} dt = 0. \quad (17)$$

Из определения функции g следуют оценки

$$\left| \int_0^y f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)} dt \right| \leq e^{\sigma|\xi|} g(b_k), \quad \left| \int_y^0 f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)} dt \right| \leq e^{\sigma|\xi|} g(a_k),$$

и, принимая во внимание (16), можно записать

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_y^0 f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)} dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^y f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)} dt = 0.$$

Переходя в (17) к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx, \quad 0 < |y| < \sigma. \quad (18)$$

Положим

$$\widehat{f}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)e^{-i\xi x} dx. \quad (19)$$

Согласно (18) выполняется равенство

$$\widehat{f}(\xi, y) = e^{-\xi y} \widehat{f}(\xi). \quad (20)$$

Далее применим равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi, y)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx.$$

Отсюда, принимая по внимание (20), получаем требуемое равенство (14). Лемма доказана.

Лемма 2. Равенство (14) справедливо для любой функции $f \in A_\sigma$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{1 + \varepsilon x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если $\varepsilon < 1/\sigma^2$, то выполняется включение $f_\varepsilon \in A_\sigma$. Далее из неравенства

$$|f_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}|f(z)|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{|1 + \varepsilon z^2|^2}, \quad |\operatorname{Im} z| < \sigma,$$

следует, что функция f_ε удовлетворяет условию (13).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon < 1/(4\sigma^2)$. Тогда

$$|1 + \varepsilon z^2| \geq 1/2 + \varepsilon|z|^2, \quad |y| < \sigma,$$

отсюда

$$|f_\varepsilon(z)| \leq \frac{|f(z)|}{1/2 + \varepsilon|z|^2} \leq 2|f(z)|, \quad |y| < \sigma.$$

Следовательно,

$$|f_\varepsilon(z) - f(z)|^2 = |f(z)|^2 \frac{\varepsilon^2|z|^4}{|1 + \varepsilon z^2|^2} \leq |f(z)|^2 \frac{\varepsilon^2|z|^4}{(1/2 + \varepsilon|z|^2)^2} \leq |f(z)|^2.$$

В каждой точке полосы S_σ выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f_\varepsilon(z) - f(z)| = 0, \quad |\operatorname{Im} z| < \sigma,$$

поэтому, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [12, с. 155],

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(x + iy) - f(x + iy)|^2 dx = 0, \quad |y| < \sigma. \tag{21}$$

Аналогично определению (19) положим

$$\widehat{f}_\varepsilon(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x + iy) e^{-i\xi x} dx.$$

Применяя равенство Парсеваля и соотношение (21), получаем

$$\|\widehat{f}_\varepsilon(\cdot, y) - \widehat{f}(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon(\cdot + iy) - f(\cdot + iy)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{22}$$

Поскольку функция f_ε удовлетворяет условиям леммы 1, к ней применимо соотношение (20), т.е.

$$\widehat{f}_\varepsilon(\xi, y) = e^{-\xi y} \widehat{f}_\varepsilon(\xi). \tag{23}$$

Соотношение (22) выполняется и при $y = 0$. В таком случае переход в равенстве (23) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что соотношение (20) выполняется и для функции f . Тогда (22) мы можем записать в следующем виде:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_\varepsilon(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\varepsilon y} d\xi = 0, \quad |y| < \sigma. \tag{24}$$

Остаётся заметить, что согласно лемме 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_\varepsilon(\xi)|^2 e^{-2\varepsilon y} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(x + iy)|^2 dx, \quad |y| < \sigma.$$

Принимая во внимание (21) и (24), отсюда в пределе получаем требуемое равенство (14). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in A_\sigma$. Согласно лемме 1 эта функция удовлетворяет равенству (14). Заменяя в нём y на противоположное значение $(-y)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2\varepsilon y} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - iy)|^2 dx.$$

Отсюда следует основное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \operatorname{ch}(2\varepsilon y) d\xi = \pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - iy)|^2 dx, \quad |y| < \sigma. \tag{25}$$

Принимая во внимание определение (11), из (25) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \operatorname{ch}(2\varepsilon y) d\xi \leq 2\pi \|f\|_\sigma^2.$$

Тем самым справедливость правого неравенства в (12) установлена.

Из основного равенства (25) следует выполнение оценки

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \operatorname{ch}(2\sigma\xi) d\xi, \quad |y| < \sigma,$$

которая, согласно определению (11), доказывает справедливость левого неравенства в (12). Теорема доказана.

Следствие. Если для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл в формуле (12) сходится, то $f \in A_\sigma$.

Действительно, в этом случае аналитическое продолжение функции f внутрь полосы S_σ можно определить равенством

$$f(x + iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i(x+iy)\xi} d\xi.$$

Принадлежность данной функции f классу A_σ проверяется с помощью равенства Парсеваля.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ
ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Доказательство теорем 1 и 2 основано на представлении решения задачи в виде преобразования Фурье по переменной x функции, удовлетворяющей по переменной y обыкновенному дифференциальному уравнению. Мы ищем решение в следующем виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s, y) e^{isx} ds, \tag{26}$$

где функция $\widehat{u}(s, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{k(y)} \frac{d}{dy} \left[k(y) \frac{d\widehat{u}}{dy} \right] = s^2 \widehat{u}(s, y), \quad y > 0. \tag{27}$$

При введении новой функции

$$v(s, y) = \sqrt{k(y)} \widehat{u}(s, y) \tag{28}$$

уравнение (27) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - q(y)v - s^2 v = 0. \tag{29}$$

Согласно сделанным выше предположениям потенциал $q(y)$ в уравнении (29) является непрерывной на полупрямой $y \geq 0$ функцией, равной

$$q(y) = \frac{1}{2} \frac{k''(y)}{k(y)} - \frac{1}{4} \left(\frac{k'(y)}{k(y)} \right)^2.$$

Среди решений уравнения (29) следующие два обладают важными свойствами.

Предложение 1. Уравнение (29) имеет решения $v_1(s, y)$ и $v_2(s, y)$, которые при $s \rightarrow \infty$ равномерно на каждом компакте полупрямой $y \geq 0$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$v_1(s, y) = e^{|s|y} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right], \quad v_2(s, y) = e^{-|s|y} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right].$$

Для производных этих функций справедливы аналогичные асимптотические формулы:

$$\frac{\partial v_1(s, y)}{\partial y} = |s| e^{|s|y} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right], \quad \frac{\partial v_2(s, y)}{\partial y} = -|s| e^{-|s|y} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right].$$

Доказательство см. в [11, гл. II, § 4, теорема 1].

Для дальнейших рассуждений потребуется следующее утверждение.

Предложение 2. Уравнение (27) имеет решения $V_1(s, y)$ и $V_2(s, y)$, которые при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно на каждом компакте полупрямой $y \geq 0$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$V_1(s, y) = \frac{e^{|s|y}}{\sqrt{k(y)}} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right], \quad V_2(s, y) = \frac{e^{-|s|y}}{\sqrt{k(y)}} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right]. \tag{30}$$

Для производных этих функций справедливы аналогичные асимптотические формулы:

$$V_{1y}(s, y) \equiv \frac{\partial V_1(s, y)}{\partial y} = \frac{|s| e^{|s|y}}{\sqrt{k(y)}} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right], \quad V_{2y}(s, y) \equiv \frac{\partial V_2(s, y)}{\partial y} = -\frac{|s| e^{-|s|y}}{\sqrt{k(y)}} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right]. \tag{31}$$

Доказательство следует непосредственно из предложения 1 и соотношения (28). Введём в рассмотрение функцию

$$V(s, y) = \frac{V_{1y}(s, 0)V_2(s, y) - V_{2y}(s, 0)V_1(s, y)}{V_{1y}(s, 0)V_2(s, 0) - V_{2y}(s, 0)V_1(s, 0)}. \quad (32)$$

Прямая проверка показывает, что функция $V(s, y)$ является решением следующей задачи Коши:

$$V_{yy} + \frac{k'(y)}{k(y)}V_y - s^2V(s, y) = 0, \quad (33)$$

$$V(s, 0) = 1, \quad V'_y(s, 0) = 0. \quad (34)$$

Интегрируя уравнение (33) и учитывая второе из условий (34), получаем

$$V_y(s, y) = \frac{s^2}{k(y)} \int_0^y k(\eta)V(s, \eta) d\eta. \quad (35)$$

Повторное интегрирование с учётом первого из условий (34) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$V(s, y) = 1 + s^2 \int_0^y \frac{dt}{k(t)} \int_0^t k(\eta)V(s, \eta) d\eta, \quad (36)$$

равносильному задаче Коши (33), (34).

Из соотношений (33)–(36) вытекает, что выполняются соотношения

$$V(s, y) \geq 1, \quad V_y(s, y) \geq 0, \quad y \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (37)$$

Выше отмечалось, что решение предельной задачи Коши мы ищем в виде интеграла (26). Естественно предположить, что выполняется равенство

$$\widehat{u}(s, y) = \widehat{\phi}(s)V(s, y), \quad (38)$$

где

$$\widehat{\phi}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-isx} dx.$$

Далее покажем, что в случае $\phi \in A_\sigma$ функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(s)V(s, y)e^{isx} ds \quad (39)$$

действительно является решением предельной задачи Коши.

Лемма 3. *Решение $V(s, y)$ задачи Коши (33), (34) с некоторыми положительными постоянными C_j , $j = 1, 2$, удовлетворяет оценкам*

$$C_1e^{|s|y} \leq V(s, y) \leq C_2e^{|s|y}. \quad (40)$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать справедливость неравенств (40) для достаточно больших значений $|s|$. Воспользуемся представлением решения в виде дроби (32). Согласно асимптотическим равенствам (30) и (31) для числителя этой дроби справедлива оценка

$$V_{1y}(s, 0)V_2(s, y) - V_{2y}(s, 0)V_1(s, y) = \frac{2|s| \operatorname{ch}(|s|y)}{\sqrt{k(0)k(y)}} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right], \quad y \geq 0.$$

Для знаменателя выполняется аналогичная оценка:

$$V_{1y}(s, 0)V_2(s, 0) - V_{2y}(s, 0)V_1(s, 0) = \frac{2|s|}{k(0)} \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right].$$

Следовательно, для решения задачи Коши (33), (34) выполняется асимптотическая формула

$$V(s, y) = \sqrt{\frac{k(0)}{k(y)}} \operatorname{ch}(|s|y) \left[1 + \frac{O(1)}{1+|s|} \right],$$

из которой для достаточно больших $|s|$ вытекают оценки

$$C_1 \operatorname{ch}(|s|y) \leq V(s, y) \leq C_2 \operatorname{ch}(|s|y),$$

а непосредственно из них — требуемая оценка (40). Лемма доказана.

Лемма 4. Производные решения $V(s, y)$ задачи Коши (33), (34) обладают следующими свойствами:

$$|V_y(s, y)| \leq C(1+|s|)e^{|s|y}, \quad |V_{yy}(s, y)| \leq C(1+|s|)^2 e^{|s|y}. \quad (41)$$

Доказательство. Первая оценка (41) непосредственно вытекает из (35) и (40):

$$V_y(s, y) = O(s^2) \int_0^y V(s, \eta) d\eta = O(s^2) \int_0^y e^{|s|\eta} d\eta = O(|s|)e^{|s|y}.$$

Далее из уравнения (33) получаем

$$|V_{yy}(s, y)| \leq C|V_y(s, y)| + s^2|V(s, y)|.$$

Для завершения доказательства леммы остаётся применить первую оценку (41) и правое неравенство в (40).

Лемма 5. Пусть функция $\phi \in A_\sigma$. Тогда функция $u(x, y)$, определённая равенством (39), бесконечно дифференцируема по x и дважды непрерывно дифференцируема по y в полосе $S_\sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \mathbb{R}, 0 \leq y < \sigma\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число ρ из интервала $0 < \rho < \sigma$ и докажем, что функция $u(x, y)$ бесконечно дифференцируема по x и дважды непрерывно дифференцируема по y в полосе S_ρ^+ .

Согласно (39) для производной функции $u(x, y)$ можем записать следующее равенство:

$$\frac{\partial^{n+k} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (is)^n \widehat{\phi}(s) \frac{\partial^k V(s, y)}{\partial y^k} e^{isx} ds, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (42)$$

Отсюда, применяя оценки (40) и (41), получаем

$$\left| \frac{\partial^{n+k} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^k} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^n |\widehat{\phi}(s)| \left| \frac{\partial^k V(s, y)}{\partial y^k} \right| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{n+k} |\widehat{\phi}(s)| e^{|s|y} ds.$$

Далее, для любого $y \leq \rho$ воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{n+k} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^k} \right| &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{n+k} |\widehat{\phi}(s)| e^{|s|\rho} ds = C \int_{-\infty}^{\infty} (|\widehat{\phi}(s)| e^{|s|\sigma}) |s|^{n+k} e^{-|s|(\sigma-\rho)} ds \leq \\ &\leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 e^{2|s|\sigma} ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2(n+k)} e^{-2|s|(\sigma-\rho)} ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Так как $e^{2\sigma|s|} \leq 2 \operatorname{ch}(2\sigma|s|)$, то согласно оценке (12) первый интеграл в правой части (43) сходится:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 e^{2|s|\sigma} ds \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 \operatorname{ch}(2|s|\sigma) ds \leq 4\pi \|\phi\|_{\sigma}^2.$$

Положим

$$M_{nk}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2(n+k)} e^{-2|s|(\sigma-\rho)} ds, \quad \rho < \sigma.$$

Подставив эту величину в (43), получим ключевую оценку

$$\left| \frac{\partial^{n+k} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^k} \right| \leq C \sqrt{M_{nk}(\rho)} \|\phi\|_{\sigma}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы.

Лемма 6. Пусть функция $\phi \in A_{\sigma}$. Тогда функция $u(x, y)$, определённая равенством (39), и все её производные, входящие в уравнение (8), принадлежат классу Λ_{σ} .

Доказательство. Применим к равенству (42) теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{n+k} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^k} \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 \left| \frac{\partial^k V(s, y)}{\partial y^k} \right|^2 s^{2n} ds.$$

Далее воспользуемся оценками (40) и (41):

$$\left\| \frac{\partial^{n+k} u(\cdot, y)}{\partial x^n \partial y^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 e^{2y|s|} s^{2n+2k} ds.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 7. Пусть функция $\phi \in A_{\sigma}$, а $u(x, y)$ – функция, определённая равенством (39). Существует функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\lim_{y \rightarrow \sigma-0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - \psi(x)|^2 dx = 0.$$

Доказательство. Пусть $0 < y' < y'' < \sigma$. Воспользуемся равенством Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y'') - u(x, y')|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 [V(s, y'') - V(s, y')]^2 ds.$$

В силу (37) функция $V(s, y)$ возрастает на полупрямой $y > 0$, поэтому

$$|V(s, y'') - V(s, y')|^2 \leq |V(s, \sigma) - V(s, y')|^2 \leq V^2(s, \sigma).$$

Согласно лемме 3 и теореме 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 V^2(s, \sigma) ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 \operatorname{ch}(2\sigma s) ds \leq C \|\phi\|_{\sigma}^2.$$

Таким образом, можно применить теорему Лебега [12, с. 155], из которой следует, что

$$\lim_{y' \rightarrow \sigma, y'' \rightarrow \sigma} \|u(\cdot, y') - u(\cdot, y'')\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

Полнота пространства $L_2(\mathbb{R})$ влечёт существование функции ψ , удовлетворяющей условиям леммы.

Лемма 8. *Предположим, что функция $u(x, y)$ является решением задачи Коши (8), (9). Тогда её преобразование Фурье имеет вид (38).*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям (9) в смысле (6) и (7) с функцией $\psi \equiv 0$. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\widehat{u}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-ixs} dx. \tag{44}$$

Принадлежность функции u и её производных классу Λ_h позволяет продифференцировать (44) под знаком интеграла. Отсюда следует, что функция \widehat{u} удовлетворяет дифференциальному уравнению (27) и представима в виде

$$\widehat{u}(s, y) = A(s)V(s, y) + B(s)W(s, y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h. \tag{45}$$

Здесь $V(s, y)$ — решение задачи Коши (33), (34), а функция $W(s, y)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} W_{yy} + \frac{k'(y)}{k(y)} W_y - s^2 W(s, y) &= 0, \\ W(s, 0) &= 0, \quad W_y(s, 0) = 1. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье производной $u_y(x, y)$ равно

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}(s, y) = A(s)V'(s, y) + B(s)W'(s, y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h. \tag{46}$$

Применяя равенство Парсеваля к (46), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_y(x, y)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(s)V'(s, y) + B(s)W'(s, y)|^2 ds.$$

Согласно граничному условию (7), в котором следует положить $\chi = 0$, выполняется равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u_y(x, y)|^2 dx = 0,$$

следовательно, для любых чисел $a < b$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b |A(s)V'(s, y) + B(s)W'(s, y)|^2 ds = 0.$$

В силу условия (34) $V'(s, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$, тогда

$$\int_a^b |B(s)W'(s, y)|^2 ds \leq \int_a^b |A(s)V'(s, y) + B(s)W'(s, y)|^2 ds + \int_a^b |A(s)V'(s, y)|^2 ds \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0.$$

С другой стороны, $W'(s, y) \rightarrow 1$ при $y \rightarrow 0$, поэтому

$$\int_a^b |B(s)|^2 ds = \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b |B(s)W'(s, y)|^2 ds = 0.$$

Отсюда получаем, что $B(s) \equiv 0$. Следовательно, равенство (45) принимает вид

$$\widehat{u}(s, y) = A(s)V(s, y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h.$$

Далее в соответствии с граничным условием (6) мы можем, применяя равенство Парсеваля, записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s) - A(s)V(s, y)|^2 ds = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x) - u(x, y)|^2 dx \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

откуда, как и выше, следует $\widehat{\phi}(s) - A(s)V(s, 0) = 0$. Принимая во внимание условие $V(s, 0) = 1$, получаем требуемое равенство (38). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Существование решения предельной задачи Коши следует из лемм 5–7. Действительно, пусть $\phi \in A_\sigma$. Тогда функция u , определённая равенством (39), согласно лемме 5 является два раза непрерывно дифференцируемой в полосе S_σ^+ , а прямое вычисление показывает, что она удовлетворяет уравнению (8) и граничным условиям (9).

Согласно лемме 6 функция u является решением задачи (8), (9) в смысле выполнения условий i)–iii). Что же касается условия (10), то существование функции ψ и выполнение соответствующего равенства гарантируется леммой 7.

Единственность решения следует непосредственно из леммы 8.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x, y)$ — решение предельной задачи Коши (8), (9). Это означает, что функция u удовлетворяет условиям i)–iii) и существует функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что выполняется равенство (10).

Согласно лемме 8 функция u имеет вид (39). В таком случае равенство (10) для неё может быть записано как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)V(s, y) - \widehat{\psi}(s)|^2 ds \rightarrow 0, \quad y \rightarrow h.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)V(s, h)|^2 ds = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Из этого равенства и из (40) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 e^{2h|s|} ds \leq C \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Данная оценка, согласно следствию из теоремы 3, означает, что функция ϕ принадлежит классу A_σ при $\sigma = h$.

Пример. Функция

$$\phi(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(p + \cos x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad p > 1,$$

бесконечно дифференцируема и аналитична в каждой точке вещественной прямой, но принадлежит A_σ только при $\sigma < \mu$, где

$$\mu = \min\{a, \ln(p + \sqrt{p^2 - 1})\}.$$

Следовательно, предельная задача Коши с такой граничной функцией имеет решение в любой полосе ширины $h < \mu$, но не имеет решения при $h \geq \mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.
2. Hadamard, J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations / J. Hadamard / New Haven : Yale University Press; London : Humphrey Milford; Oxford : University Press, 1923. — 316 p.
3. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations / G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella. — arXiv:0907.2882v1[math.AP] 16 Jul 2009.
4. Лаврентьев, М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. — Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1956. — Т. 20, № 6. — С. 819–842.
5. Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата ; пер. с яп. Ю.В. Егорова ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1977. — 504 с.
6. Кальменов, Т.Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 10. — С. 1460–1466.
7. Kabanikhin, S.I. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications / S.I. Kabanikhin. — Berlin; Boston : Springer, 2010. — 254 p.
8. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola. — Kluwer Academic Publishers, 1995. — 254 p.
9. Alimov, Sh.A. Determination of temperature at the outer boundary of a body / Sh.A. Alimov, A.K. Qudaybergenov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 274, № 2. — P. 159–171.
10. Ильин, В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы / В.А. Ильин. — М. : Наука, 1991. — 366 с.
11. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
12. Садовничий, В.А. Теория операторов. 5-е изд. / В.А. Садовничий. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2004. — 384 с.

ON THE DETERMINATION OF THE STATIONARY TEMPERATURE IN AN UNLIMITED STRIP

Sh. A. Alimov¹, A. K. Kudaybergenov²

¹Branch of Lomonosov Moscow State University, Tashkent, Uzbekistan

^{1,2}National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: ¹sh_alimov@mail.ru, ²khudaybergenovallambergen@mail.ru

The problem of determining the stationary temperature at the upper boundary of the strip under known conditions at the lower boundary is considered. The existence and uniqueness of the solution to this problem are proved.

Keywords: elliptic equation, Cauchy problem, analytic function.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N. and Samarsky, A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1966.
2. Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, New Haven: Yale University Press; London: Humphrey Milford; Oxford: University Press, 1923.
3. Alessandrini, G., Rondi, L., Rosset, E., and Vessella, S., *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, arXiv:0907.2882v1[math.AP] 16 Jul 2009.
4. Lavrentyev, M.M., On the Cauchy problem for Laplace equation, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1956, vol. 20, no. 6, pp. 819–842.
5. Mizohata, S., *The Theory of Partial Differential Equations*, London: Cambridge University Press, 1973.
6. Kal'menov, T.Sh. and Iskakova, U.A., Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1460–1466.
7. Kabanikhin, S.I., *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Berlin; Boston: Springer, 2010.
8. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., and Yagola, A.G., *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
9. Alimov, Sh.A. and Qudaybergenov, A.K., Determination of temperature at the outer boundary of a body, *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 274, no. 2, pp. 159–171.
10. П'ин, В.А., *Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы* (Spectral Theory of Differential Operators, Self-Adjoint Differential Operators), Moscow: Nauka, 1991.
11. Нaimark, М.А., *Линейные дифференциальные операторы* (Linear Differential Operators), 2nd ed., Moscow: Nauka, 1969.
12. Sadvonichiy, V.A., *Teoriya operatorov* (Operator Theory), 5th ed., Moscow: MSU Press, 2004.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА–ЛИНДЕЛЁФА

© У. Ю. Жураева

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан
e-mail: utida_9202@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2022 г., после доработки 17.04.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Доказаны теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для бигармонических функций.

Ключевые слова: теорема типа Фрагмена–Линделёфа, функция Карлемана, бигармоническая функция.

DOI: 10.31857/S0374064124080059, EDN: KDBSIQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — бесконечная область двумерного пространства и $u(P)$ — бигармоническая в ней функция, непрерывная вплоть до границы со своими производными до третьего порядка включительно. Требуется показать, что если функция $u(P)$ и её нормальная производная, лапласиан этой функции и его нормальная производная ограничены на границе области D и функция $u(P)$ неограничена внутри неё, то при $P \rightarrow \infty$ она должна расти внутри D со скоростью не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Сформулированная задача исследовалась многими авторами (см., например, работы [1–8]).

Справедлива

Теорема 1 [1]. Пусть $u(r, \phi, x)$ — гармоническая функция в цилиндре $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < x < +\infty$. Если выполнены условия

$$u(a, \phi, x) = 0, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial r}(a, \phi, x) \right| < C, \quad \max_{(r, \phi)} |u(r, \phi, x)| < C \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)} \right\} \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

то $u(r, \phi, x) \equiv 0$.

В теореме 1 и далее C — постоянная величина. Аналогичная теорема установлена в работе [2] для цилиндра с прямоугольным основанием.

Имеет место следующая

Теорема 2 [3]. Пусть $u(r, \phi, x)$ — гармоническая функция в цилиндре $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < x < +\infty$. Если выполнены условия

$$u(a, \phi, x) = 0, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial r}(a, \phi, x) \right| < C \exp\{\mu|x|\}, \quad \max_{(r, \phi)} |u(r, \phi, x)| < C \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)} \right\} \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

причём $\mu < \lambda_{01}/a$, λ_{01} — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_0(x)$, то $u(r, \phi, x) \equiv 0$.

Е.М. Ландис в книге [9] поставил следующую задачу. Пусть в цилиндре $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 < 1$ пространства \mathbb{R}^n расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в обе стороны), со сколь угодно гладкой границей G . Пусть в этой области определено решение u уравнения

$\Delta\Delta u = 0$ (произвольной гладкости вплоть до границы) и $u|_G = 0, \partial u/\partial n|_G = 0$. Следует ли отсюда, что функция u неограничена (экспоненциально растёт при уходе на бесконечность)? Сформулированные ниже результаты в некотором смысле дают ответ на этот вопрос.

В работе [10] впервые предложен метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа, получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В [11] исследованы вопросы регуляризации и разрешимости задачи Коши для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях пространства \mathbb{R}^m при произвольных нечётных m , а также при чётных m таких, что $2n < m$; случай произвольных чётных m , когда $2n \geq m$, рассмотрен в [12, 13]. Следует отметить, что аналогичные результаты можно найти в работах [14, 15].

Пусть D — лежащая в полупространстве $y = \{(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_m > 0\}$ неограниченная область с границей ∂D , любая конечная часть этой области удовлетворяет условию Ляпунова, и, кроме того, предположим, что граница ∂D задана уравнением $y_m = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1})$, где f — непрерывная функция, имеющая ограниченные частные производные первого порядка.

Теорема 3 [6]. Пусть гармоническая функция $u(y)$ удовлетворяет условиям

$$|u(y)| + |\text{grad } u(y)| \leq C \exp\{|y|^\rho\}, \quad \rho < 1, \quad y \in D,$$

$$u(y') = 0, \quad \frac{\partial u(y')}{\partial n} \rightarrow 0, \quad y' \rightarrow \infty, \quad y' \in \partial D,$$

тогда $u(y) \equiv 0$.

Если D — неограниченная область, лежащая внутри слоя наименьшей ширины, определяемого неравенством $0 \leq y_m \leq \pi/\rho, \rho > 0$, то имеет место

Теорема 4 [6]. Пусть гармоническая функция $u(y)$ удовлетворяет условиям

$$|u(y)| + |\text{grad } u(y)| \leq C \exp\{\exp\{\rho|y|\}\}, \quad \rho < 1, \quad y \in D,$$

$$u(y') = 0, \quad \left| \frac{\partial u(y')}{\partial n} \right| \leq C|y|^\mu, \quad \mu = \text{const}, \quad y' \in \partial D,$$

тогда $u(y) \equiv 0$.

Пусть бигармоническая функция $u(y)$ определена в области $D = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5 [16]. Если выполнены условия

$$\sum_{k=0}^1 (|\Delta^k u(y)| + |\text{grad } \Delta^{(1-k)} u(y)|) \leq C \exp\{|y|^\rho\}, \quad \rho < 1, \quad y \in D, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^1 \left(|\Delta^k u(y_1, 0)| + \left| \frac{\partial \Delta^k u(y_1, 0)}{\partial n} \right| \right) < C,$$

то $u(y) \equiv 0$.

Теорема 6 [16]. Если выполнены условия (1) и

$$u(y_1, 0) = 0, \quad \sum_{k=0}^1 \left(|\Delta^k u(y_1, 0)| + \left| \frac{\partial \Delta^k u(y_1, 0)}{\partial n} \right| \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } y_1 \rightarrow \infty,$$

то $u(y) \equiv 0$.

Цель настоящей статьи — доказать подобный результат для бигармонических функций (доказать теорему типа Фрагмена–Линделёфа для бигармонических функций с помощью формул карлемановского типа для решений задачи Коши для билапласиана).

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введём функцию Карлемана $\Phi_\sigma(y, x)$ для бигармонических функций, определённых в области $D = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \in \mathbb{R}, 0 < y_2 < h, h = \pi/\rho, 0 < \rho < 1\}$:

$$\Phi_\sigma(y, x) = C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\}}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $s = |x' - y'|$, $x' = (x_1, 0)$, $y' = (y_1, 0)$, $\alpha^2 = s$, $\omega = iu + y_2$, $s > 0$, $\sigma \geq 0$, $a \geq 0$, $\rho_1 < \rho$.

Теорема 7. *Функция $\Phi_\sigma(y, x)$, определённая формулой (2), имеет вид*

$$\Phi_\sigma(y, x) = C(r^2 \ln r + G_\sigma(y, x)), \quad r = |y - x|,$$

и является бигармонической функцией, где $G_\sigma(y, x)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ по переменной y .

Доказательство. Учитывая, что

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\}}{\omega - x_2} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\} - 1}{\omega - x_2} \right] + \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega - x_2} \right],$$

преобразуем функцию $\Phi_\sigma(y, x)$:

$$\Phi_\sigma(y, x) = C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\} - 1}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du + C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{u(u^2 - s)}{u^2 + (y_2 - x_2)^2} du.$$

Разбивая интервал интегрирования и используя подстановку $u^2 + (y_2 - x_2)^2 = t$, $u^2 - s = t - r^2$, перепишем второе слагаемое в виде

$$\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{1+s}} \frac{u(u^2 - s)}{u^2 + (y_2 - x_2)^2} du = 1 + 2r^2 \ln r - r^2 \ln(1 + r^2).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(y, x) = C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\} - 1}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du + \\ + 1 + 2r^2 \ln r - r^2 \ln(1 + r^2) + C \int_{\sqrt{1+s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} G'_\sigma(y, x) = C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{\exp\{\sigma\omega + \omega^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(\omega - h/2))\} - 1}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du + \\ + 1 - r^2 \ln(1 + r^2) + C \int_{\sqrt{1+s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega - x_2} \right] (u^2 - s) du, \end{aligned}$$

получим $\Phi_\sigma(y, x) = C(r^2 \ln r + G_\sigma(y, x))$, где гармоническая функция $G_\sigma(y, x)$ является бигармонической по y при $s > 0$. Теорема доказана.

Введём обозначение

$$A = -\sigma y_2 - y_2^2 + s + a \operatorname{ch}(\rho_1 \alpha) \cos(\rho_1(y_2 - h/2)).$$

Теорема 8. Для функции $\Phi_\sigma(y, x)$ справедливо неравенство

$$|\Phi_\sigma(y, x)| \leq C e^{-A}(\sigma r + 1). \tag{3}$$

Доказательство. С помощью подстановки $u^2 - s = r^2 t$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(y, x) &= C \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{\exp\{\sigma(iu + y_2) + (iu + y_2)^2 - a \operatorname{ch}(i\rho_1(iu + y_2 - h/2))\}}{(iu + y_2) - x_2} (u^2 - s) du = \\ &= C \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{\exp\{\sigma(i\sqrt{r^2 t + s} + y_2) + (i\sqrt{r^2 t + s} + y_2)^2\}}{\exp\{a \cos(\rho_1(i\sqrt{r^2 t + s} + y_2 - h/2))\} (i\sqrt{r^2 t + s} + y_2 - x_2)} \frac{r^4 t dt}{\sqrt{r^2 t + s}}. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma y_2 + y_2^2 - r^2 t - s - a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2)), \\ A_2 &= (\sigma + 2y_2) \sqrt{r^2 t + s} - a \operatorname{sh}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \sin(\rho_1(y_2 - h/2)), \\ Q &= \exp\{\sigma y_2 + y_2^2\}. \end{aligned}$$

Тогда функцию $\Phi_\sigma(y, x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(y, x) &= r^2 \int_0^{+\infty} \frac{Q((y_2 - x_2) \sin A_2 - \sqrt{r^2 t + s} \cos A_2)}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t + 1) \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{\sqrt{r^2 t + s}} = \\ &= r^2 \int_0^{+\infty} \frac{Q(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t + 1) \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{\sqrt{r^2 t + s}} - \\ &\quad - r^2 \int_0^{+\infty} \frac{Q \cos A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t + 1) \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{\sqrt{r^2 t + s}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{Q(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t + 1) \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{\sqrt{r^2 t + s}}, \\ J_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{Q \cos A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t + 1) \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{\sqrt{r^2 t + s}}, \end{aligned} \tag{4}$$

тогда $\Phi_\sigma(y, x) = r^2 J_1 - r^2 J_2$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} |\sin A_2| &\leq \left| \sin(\sigma \sqrt{r^2 t + s}) \cos(2y_2 \sqrt{r^2 t + s} + \operatorname{sh}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s})) \sin(\rho_1 \beta_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(2t\alpha y_2 + \operatorname{sh}(\rho_1 \alpha t) \sin(\rho_1 \beta_2)) \cos(\sigma \alpha t) \right| \leq C \sigma \sqrt{r^2 t + s}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1/2} dt}{\exp\{at\}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+1/2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\exp\{r^2 t\}} = \frac{C}{r^2},$$

оценим J_1 :

$$|J_1| \leq C \left| \int_0^{+\infty} \frac{(y_2 - x_2) \sin A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} \exp\{r^2 t + s\} \sqrt{r^2 t + s}} \frac{t dt}{(t+1)} \right| \leq \\ \leq C \int_0^{+\infty} \frac{|y_2 - x_2|}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{\sigma \sqrt{r^2 t + s}}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} \exp\{r^2 t + s\}} dt \leq C \frac{\sigma e^{-A}}{r}.$$

Теперь учитывая, что

$$\left| \frac{\cos A_2}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} (t+1)} \right| \leq C e^{-A},$$

оценим выражение J_2 :

$$|J_2| \leq \left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{\exp\{a \operatorname{ch}(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}) \cos(\rho_1(y_2 - h/2))\} \exp\{r^2 t + s\}} \frac{t dt}{r^2} \right| \leq \frac{C e^{-A}}{r^2}.$$

Таким образом,

$$|\Phi_\sigma(y, x)| \leq C e^{-A} r^2 \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = C e^{-A} (\sigma r + 1).$$

Теорема доказана.

Теорема 9. Для нормальной производной функции $\Phi_\sigma(y, x)$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \leq C e^{-A} \left((1 + \sigma + \sigma^2) \left(1 + \frac{1}{r} \right) + \sigma(r + r^2) + \sigma^2 r + r \right).$$

Доказательство. Вычислив частную производную от функции (4), оценим следующие интегралы:

$$C r^2 \int_0^{+\infty} \sin A_2 \frac{\partial A_2}{\partial y_j} e^{-A_1} \frac{t dt}{t+1}, \quad C r^2 \int_0^{+\infty} \cos A_2 e^{-A_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \frac{t dt}{t+1}.$$

С учётом равенства

$$\frac{\partial A_1}{\partial y_j} = -2(y_j - x_j)(t+1) + (\sigma + 1)\rho_1 \operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s})) \cos(\rho_1(y_2 - h/2)) \frac{(y_j - x_j)(t+1)}{\sqrt{r^2 t + s}}, \quad j = 1, 2,$$

будем иметь

$$\left| \frac{\partial A_1}{\partial y_j} \right| \leq r(t+1) + \frac{\sigma r(t+1)}{\sqrt{r^2 t + s}} \operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s})), \quad j = 1, 2.$$

Аналогичным образом можно получить оценку

$$\left| \frac{\partial A_2}{\partial y_j} \right| \leq \frac{r(t+1)(\sigma + 2y_2)}{\sqrt{r^2 t + s}} + \operatorname{ch}(\rho_1(\rho_1 \sqrt{r^2 t + s})) \frac{r(t+1)}{\sqrt{r^2 t + s}}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & Cr^2 \int_0^{+\infty} e^{-A_1} \sin A_2 \frac{r(t+1)(\sigma+2y_2)}{\sqrt{r^2t+s}} \frac{t dt}{t+1} + Cr^2 \int_0^{+\infty} e^{-A_1} \sin A_2 \frac{r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}} \operatorname{ch}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s})) \frac{t dt}{t+1} + \\
 & + Cr^2 \int_0^{+\infty} e^{-A_1} \cos A_2 r(t+1) \frac{t dt}{t+1} + Cr^2 \int_0^{+\infty} e^{-A_1} \cos A_2 \frac{\sigma r(t+1)}{\sqrt{r^2t+s}} \operatorname{sh}(\rho_1(\rho_1\sqrt{r^2t+s})) \frac{t dt}{t+1} = \\
 & = Cr^2 \int_0^{+\infty} r\sigma(\sigma+2y_2)e^{-A_1}t dt + Cr^2 \int_0^{+\infty} \sigma r \rho_1 \sin(\rho_1(y_2-h/2)) \operatorname{ch}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})e^{-A_1}t dt + \\
 & \quad + Cr^2 \int_0^{+\infty} r e^{-A_1}t dt + Cr^2 \sigma \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(\rho_1\sqrt{r^2t+s})e^{-A_1}t^{-1/2} dt,
 \end{aligned}$$

отсюда получим

$$\left| \frac{\partial J_1}{\partial y_1} \right| < Ce^{-A} \left(\frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^2} \right), \quad \left| \frac{\partial J_1}{\partial y_2} \right| < Ce^{-A} \left(\sigma + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \right). \tag{5}$$

Аналогичным образом вычислим оценку для частных производных J_2 :

$$\left| \frac{\partial J_2}{\partial y_1} \right| < Ce^{-A} \left(\frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right), \quad \left| \frac{\partial J_2}{\partial y_2} \right| < Ce^{-A} \left(\frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2} \right). \tag{6}$$

Используя приведённые выше оценки и формулы

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_j} = (J_1 - J_2) \frac{\partial r^2}{\partial y_j} + r^2 \frac{\partial (J_1 - J_2)}{\partial y_j}, \quad j = 1, 2,$$

находим

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} \right| & \leq Ce^{-A} \left(\sigma + \sigma^2 + \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r} \right), \\
 \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} \right| & \leq Ce^{-A} \left(1 + \sigma + \sigma r + \sigma r^2 + \sigma^2 r + r + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{1}{r} \right).
 \end{aligned}$$

В итоге, используя выражение для производной по направлению, получаем неравенство

$$\left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| = \left| r(J_1 - J_2) + r^2 \frac{\partial (J_1 - J_2)}{\partial n} \right| \leq Ce^{-A} \left((1 + \sigma + \sigma^2) \left(1 + \frac{1}{r} \right) + \sigma(r + r^2) + \sigma^2 r + r \right).$$

Теорема доказана.

Теорема 10. Для лапласиана функции $\Phi_\sigma(y, x)$ справедлива оценка

$$|\Delta \Phi_\sigma(y, x)| \leq Ce^{-A} \left(\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (1 + \sigma + \sigma^2) + \sigma + \sigma^2 + \sigma r \right).$$

Доказательство. С учётом формул

$$\frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_j^2} = \frac{\partial^2 r^2}{\partial y_j^2} (J_1 - J_2) + 2 \frac{\partial r^2}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} (J_1 - J_2) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} (J_1 - J_2), \quad j = 1, 2,$$

и гармоничности функции $J_1 - J_2$ будем иметь

$$\Delta\Phi_\sigma(y, x) = 4(J_1 - J_2) + 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial r^2}{\partial y_j} \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_j}.$$

Учитывая оценки (3), (5), (6), получаем

$$|\Delta\Phi_\sigma(y, x)| \leq \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + (y_1 - x_1) \left(\frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{1}{r^3}\right) + \\ + Ce^{-A}(y_2 - x_2) \left(\sigma + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right).$$

Отсюда вытекает неравенство утверждения теоремы.

Теорема 11. *Для нормальной производной лапласиана функции $\Phi_\sigma(y, x)$ имеет место оценка*

$$\left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \leq Ce^{-A} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + (\sigma + \sigma^2) \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \frac{\sigma^3}{r^2} \right). \tag{7}$$

Доказательство. Сначала докажем следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} \right| \leq Ce^{-A} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \sigma \left(1 + r + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{\sigma}{r^2} \right) \right), \tag{8}$$

$$\left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} \right| \leq Ce^{-A} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r^2} \right). \tag{9}$$

Пусть $\psi(y, x)$ — гармоническая функция в пространстве \mathbb{R}^2 , тогда справедливо равенство $\Delta r^2 \psi(y, x) = \psi_1(y, x)$, где

$$\psi_1(y, x) = 4\psi(y, x) + 4(y_1 - x_1) \frac{\partial \psi(y, x)}{\partial y_1} + (y_2 - x_2) \frac{\partial \psi(y, x)}{\partial y_2}.$$

Так как функция $\Phi_\sigma(y, x)$ тоже является гармонической в \mathbb{R}^2 по переменной y (включая и точку x), можно записать

$$\Delta \Phi_\sigma(y, x) = C \left(J_1 - J_2 + (y_1 - x_1) \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_1} + (y_2 - x_2) \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_2} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} = 2 \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_1} + (y_1 - x_1) \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_1^2} + (y_2 - x_2) \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_1 \partial y_2},$$

$$\frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} = 2 \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_2} + (y_1 - x_1) \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_1 \partial y_2} + (y_2 - x_2) \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_2^2}.$$

Тогда, чтобы оценить $|\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x) / \partial n|$, нам нужны оценки $|\partial^2(J_1 - J_2) / \partial y_j^2|$, $|\partial^2(J_1 - J_2) / \partial y_j \partial y_k|$, $j, k = 1, 2$. Заметив, что

$$\left| \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_1} \right| \leq Ce^{-A} \left(\frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right),$$

$$\left| \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_1^2} \right| \leq Ce^{-A} \left(\sigma + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^4} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right),$$

$$\left| \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \right| \leq Ce^{-A} \left(\frac{\sigma^2}{r^4} + \frac{\sigma^3}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right),$$

получим неравенство (8).

С помощью оценок

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(J_1 - J_2)}{\partial y_2} \right| &\leq C e^{-A} \left(\sigma + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right), \\ \left| \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial y_2^2} \right| &\leq C e^{-A} \left(\frac{\sigma}{r^3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right) \end{aligned}$$

получим неравенство (9). Из (8) и (9) вытекает оценка (7) теоремы.

Теорема 12. Функция $\Phi_\sigma(y, x)$ при $\sigma > 0$ и $y \neq x$ является функцией Карлемана в области D .

Доказательство. На основании теорем 7–11 имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D} \left(|\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| + |\Delta \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq \\ &\leq C e^{-A} \left(1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma r + \sigma r^2 + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r^2} + \frac{\sigma}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r^3} + \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \frac{\sigma^3}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$L = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left(|\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) ds, \tag{10}$$

$$L_1 = \{y = (y_1, y_2) : y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0\}, \quad L_2 = \{y = (y_1, y_2) : y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = \pi/\rho\}, \quad \partial D = L_1 \cup L_2.$$

Выполняя преобразование $y_1 - x_1 = t$, $dy_1 = dt$ и учитывая, что $0 \leq x_2 \leq \pi/\rho$, оценим (10):

$$\begin{aligned} L &\leq C e^{-A} \left(1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma \sqrt{t^2 + x_2^2} + \sigma(t^2 + x_2^2) + \frac{\sigma}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{\sigma}{t^2 + x_2^2} + \frac{\sigma}{(t^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) + \\ &+ C e^{-A} \left(\frac{\sigma^2}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{\sigma^2}{t^2 + x_2^2} + \frac{\sigma^2}{(t^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{\sigma^3}{t^2 + x_2^2} + \frac{1}{t^2 + x_2^2} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} + \frac{1}{(t^2 + x_2^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

На границе L_1 $A = a \operatorname{ch}(\rho_1 t) \cos(\rho_1(-h/2)) + s$, кроме того, $\cos(\rho_1(-h/2)) \neq 0$. Подбирая $a = 1 + \sigma$, получаем

$$\sum_{k=0}^1 \int_{L_1} \left(|\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq C e^{-A} c_\sigma^1,$$

где c_σ^1 — многочлен, зависящий от σ .

На границе L_2 аналогично показывается, что

$$\sum_{k=0}^1 \int_{L_2} \left(|\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq C e^{-A} c_\sigma^2,$$

где c_σ^2 — многочлен, зависящий от σ . Обозначив $\varepsilon(\sigma) = e^{-A}(c_\sigma^1 + c_\sigma^2)$, имеем $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Окончательно можем утверждать, что $L \leq C\varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Обозначим через $A_{\rho_2}(D)$ пространство бигармонических функций, определённых в области D , имеющих непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^1 (|\Delta^k u(y)| + |\text{grad } \Delta^{(1-k)} u(y)|) \leq C \exp\{\exp\{\rho_2 |y|\}\}, \quad \rho_2 < \rho_1, \quad y \in D.$$

Теорема 13. Пусть для функции $u \in A_{\rho_2}(D)$ выполняются условия

$$u(y)|_{\partial D} = 0, \quad \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left(|\Delta^k u(y)| + \left| \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial n} \right| \right) ds < C,$$

тогда $u(y) \equiv 0$.

Доказательство. Через $K(R, 0)$ обозначим круг радиуса R с центром в нуле, $D \cap K(R, 0) = D_R^+$, $D \cap CK(R, 0) = D_R^-$, $CK(R, 0)$ — дополнение этого круга.

Допустим, что утверждение теоремы не имеет места: существует точка $x_0 \in D$ такая, что $u(x_0) = a > 0$. Возьмём положительное число R_1 такое, что $R_1 \geq |x_0| + 1$.

Из свойств функции $u(y)$ и теорем 7–12 следует, что для каждого положительного ε существует такое положительное число R_2 , что для всех $R > R_2$ справедливо

$$\sum_{k=0}^1 \int_{\partial D_R^-} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{(1-k)} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds < \varepsilon,$$

$\partial D_R^- = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $L_1 = \{y = (y_1, 0) : |y_1| > R\}$, $L_2 = \{y = (y_1, \pi/\rho) : |y_1| > R\}$, $L_3 = D \cap \{y : |y| = R\}$.

Пусть $\max\{R_1, R_2, \pi/\rho\} = R_3$, $\rho(x_0, \partial D)$ — расстояние от точки x_0 до границы области D , $\rho(x_0, \partial D) = \mu$. Рассмотрим те значения ε , для которых $\varepsilon < \mu$. Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \left| \sum_{k=0}^1 \int_{L_1 \cup L_2} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{(1-k)} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^1 \int_{L_1 \cup L_2} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y) \right| |ds| \leq \\ &\leq C \int_{L_1 \cup L_2} \left(|\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} \right| + |\Delta^{1-k} u(y)| \right) |ds|. \end{aligned}$$

Поэтому для упомянутого ε существует R_4 такое, что для произвольного $R > R_4$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^1 \int_{L_1 \cup L_2} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y) \right| |ds| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее оценим интеграл J_2 по L_3 (учитывая рост функции внутри области):

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \left| \sum_{k=0}^1 \int_{L_3} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^1 \int_{L_3} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y) \right| |ds| \leq \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \exp\{\exp\{\rho_2|y|\}\} \sum_{k=0}^1 \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| dt. \end{aligned}$$

При выполнении условия $\rho_2 < \rho_1$ подбираем σ так, чтобы $\exp\{\exp\{\rho_2|y|\}\} / \exp\{\sigma A\} < 1$. Тогда для того же положительного ε существует R_5 такое, что при $R > R_5$

$$|J_2| \leq \sum_{k=0}^1 \int_{L_3} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) + \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| \left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} + \Delta^{1-k} u(y) \right| |ds| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если обозначим $R_6 = \max\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$, то получим

$$\sum_{k=0}^1 \int_{\partial(D \cap K(R_2, 0))} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds < \varepsilon.$$

Рассмотрим в области $D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0)$, где $R > R_5$, бигармонические функции $u(y)$ и $\Phi_\sigma(y, x)$, для которых применим формулу Гутцмера:

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial(D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0))} (u(y) \Delta^2 \Phi_\sigma(y, x_0) - \Phi_\sigma(y, x_0) \Delta^2 u(y)) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^1 \int_{\partial(D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0))} \left(\Delta^k u(y) \frac{\partial \Delta^{1-k} \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} - \Delta^{1-k} \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

Так как $\Delta^2 u(y) = 0$, получаем, что $\Delta^2 \Phi_\sigma(y, x) = 0$, $y \in D_R^+ \setminus K(\varepsilon, x_0)$, и

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^1 \int_{\partial D_R^+} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds = \\ &= \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) &= \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} ds - \\ &- \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

$$A^1(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} ds,$$

$$A^2(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} ds.$$

Можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $A(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) \rightarrow u(x_0)$. Действительно, на основании теоремы о среднем значении существует ξ такое, что

$$A^1(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) = C\varepsilon \sum_{k=0}^1 \Delta^k \Phi_\sigma \frac{\partial \Delta^{1-k} u(\xi)}{\partial r}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $A^1(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) \rightarrow 0$. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} A^2(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) &= \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} ds = \\ &= \sum_{k=0}^1 \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k (r^2 \ln(1/r) + r^2 G(y, x))}{\partial r} ds = \\ &= \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \Delta u(y) \frac{\partial (r^2 \ln(1/r) + r^2 G(y, x))}{\partial r} ds + \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} u(y) \frac{\partial \Delta (r^2 \ln(1/r) + r^2 G(y, x))}{\partial r} ds. \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении существуют $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \partial K(\varepsilon, x_0)$ такие, что

$$\begin{aligned} A^2(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) &= C\varepsilon [\Delta u](\mu_1) + [u](\nu) \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} \frac{\partial \ln(1/r)}{\partial r} ds + \int_{\partial K(\varepsilon, x_0)} u(y) \frac{\partial \Delta (r^2 G(y, x))}{\partial r} ds = \\ &= C \left(\varepsilon [\Delta u](\mu_1) + [u](\nu) + \varepsilon \frac{\partial G_1}{\partial r}(\mu_2) \right). \end{aligned}$$

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\nu \rightarrow x_0$, то окончательно имеем

$$A^2(K(\varepsilon, x_0), u, \Phi_\sigma(y, x_0)) \rightarrow u(x_0),$$

т.е.

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left(\Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right) ds.$$

С учётом неравенства $ac + bd \leq (a + b)(c + d)$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$) получим

$$\begin{aligned} |u(x_0)| &\leq \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| |ds| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left(\left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0) \right| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x_0)}{\partial n} \right| \right) \left(\left| \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n} \right| + \left| \Delta^{1-k} u(y) \right| \right) |ds|. \end{aligned}$$

На основании теоремы 12 имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^1 \int_{\partial D} \left(|\Delta^k \Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) |ds| \leq C\varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Следовательно, $u(y) \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 14. Пусть для функции $u \in A_{\rho_2}(D)$ выполнено условие роста

$$\Delta^k u(y)|_{\partial D} = 0; \quad \frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial n} \Big|_{y \in \partial D} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1,$$

тогда $u(y) \equiv 0$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов, М.А. Обобщение теоремы типа Фрагмена–Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве / М.А. Евграфов, И.А. Чегис // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 2. — С. 259–262.
2. Чегис, И.А. Теорема типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре / И.А. Чегис // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 136, № 3. — С. 556–559.
3. Леонтьев, А.Ф. Теорема типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре / А.Ф. Леонтьев // Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1963. — Т. 27. — С. 661–676.
4. Аршон, И.С. О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной / И.С. Аршон, М.А. Евграфов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 142, № 4. — С. 762–765.
5. Ярмухамедов, Ш.Я. Задача Коши для полигармонического уравнения / Ш.Я. Ярмухамедов // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 2. — С. 162–165.
6. Ашурова, З.Р. Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций многих переменных / З.Р. Ашурова // Докл. АН УзССР. — 1990. — Т. 5. — С. 6–8.
7. Ашурова, З.Р. О некоторых свойствах ядра Ярмухамедова / З.Р. Ашурова, Н.Ю. Жураева, У.Ю. Жураева // Int. J. of Innovative Research. — 2021. — V. 10. — P. 84–90.
8. Ashurova, Z.R. Growing polyharmonic functions and Cauchy problem / Z.R. Ashurova, N.Y. Juraeva, U.Y. Juraeva // J. of Critical Reviews. — 2020. — V. 7. — P. 371–378.
9. Ландис, Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е.М. Ландис. — М.: Наука, 1971. — 57 с.
10. Ярмухамедов, Ш.Я. Формула Грина в бесконечной области и её применение / Ш.Я. Ярмухамедов // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 2. — С. 305–308.
11. Жураева, Н.Ю. Об интегральном представлении полигармонических функций / Н.Ю. Жураева // Докл. АН РУз. — 2008. — Т. 3. — С. 18–20.
12. Жураева, Н.Ю. Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей, лежащих в m -мерном четном евклидовом пространстве / Н.Ю. Жураева, У.Ю. Жураева, У.М. Саидов // Uzbek. Math. J. — 2011. — V. 3. — P. 64–68.
13. Jurayeva, U.Yu. The Phragmen–Lindelof type theorems / U.Yu. Jurayeva // Uzbek. Math. J. — 2022. — V. 66. — P. 54–61.
14. Хасанов, А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимск. мат. журн. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 92–106.

15. Khasanov, A.B. On the Cauchy problem for the three-dimensional Laplace equation / A.B. Khasanov, F.R. Tursunov // *Russ. Math.* — 2021. — V. 65. — P. 49–64.
16. Жураева, У.Ю. Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций / У.Ю. Жураева // *Изв. вузов. Математика.* — 2022. — № 10. — С. 42–65.

PHRAGMEN–LINDELOF TYPE THEOREMS

U. Yu. Juraeva

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Uzbekistan
e-mail: umida_9202@mail.ru

In this paper the Phragmen–Lindelof type theorems for biharmonic functions are proved.

Keywords: Phragmen–Lindelof type theorem, biharmonic function, Carleman function.

REFERENCES

1. Evgrafov, M.A., Chegis, I.A., Generalization of the Phragmen–Lindelof theorem on analytic functions to harmonic functions in space, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 134, no. 2, pp. 259–262.
2. Chegis, I.A., Phragmen–Lindelof type theorem for harmonic functions in a rectangular cylinder, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1961, vol. 136, no. 3, pp. 556–559.
3. Leontev, A.F., Phragmen–Lindelof type theorem for harmonic functions in a rectangular cylinder, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, 1963, vol. 27, pp. 661–676.
4. Arshon, I.S., Evgrafov, M.A., On the growth of functions, harmonic in a cylinder and bounded on its surface together with the normal derivative, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, vol. 142, no. 4, pp. 762–765.
5. Yarmukhammedov, Sh.Ya., Cauchy problem for a polyharmonic equation, *Dokl. RAN*, 2003, vol. 388, no. 2, pp. 162–165.
6. Ashurova, Z.R., Phragmen–Lindelof type theorems for harmonic functions of several variables, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1990, vol. 5, pp. 6–8.
7. Ashurova, Z.R., Juraeva, N.Y., and Juraeva, U.Y., On some properties of the Yarmukhamedov kernel, *Int. J. of Innovative Research*, 2021, vol. 10, pp. 84–90.
8. Ashurova, Z.R., Juraeva, N.Y., and Juraeva, U.Y., Growing polyharmonic functions and Cauchy problem, *J. of Critical Reviews*, 2020, vol. 7, pp. 371–378.
9. Landis, E.M., *Uravneniya vtorogo poriyatka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* (Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Types), Moscow: Nauka, 1971.
10. Yarmukhammedov, Sh.Ya., Green’s formula in the infinite region and its application, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, vol. 285, no. 2, pp. 305–308.
11. Juraeva, N.Yu., On the integral representation of polyharmonic functions, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbek.*, 2008, vol. 3, pp. 18–20.
12. Juraeva, N.Yu., Juraeva, U.Yu., and Saidov, U.M., Carleman function for polyharmonic functions for some domains lying in m -dimensional even Euclidean space, *Uzbek. Math. J.*, 2011, vol. 3, pp. 64–68.
13. Juraeva, U.Yu., The Phragmen–Lindelof type theorems, *Uzbek. Math. J.*, 2022, vol. 66, pp. 54–61.
14. Khasanov, A.B., Tursunov, F.R., Of Cauchy problem for Laplace equation, *Ufa Math. J.*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 91–107.
15. Khasanov, A.B., Tursunov, F.R., On the Cauchy problem for the three-dimensional Laplace equation, *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, pp. 49–64.
16. Juraeva, U.Yu., Theorems of the Phragmen–Lindelof type for biharmonic functions, *Russ. Math.*, 2022, no. 66, pp. 33–55.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО
МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА© А. А. Замышляева¹, Е. В. Бычков²Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), г. Челябинск
e-mail: ¹zamyshliaevaaa@susu.ru, ²bychkovev@susu.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024 г., после доработки 15.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

В пространствах Соболева исследована задача для модифицированного уравнения Буссинеска с однородным краевым условием Неймана и с классическими начальными условиями. На основе метода компактности показано, что приближённое аналитическое решение, построенное в виде суммы Галёркина по системе собственных функций однородной задачи Неймана, *-слабо сходится к точному решению.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Буссинеска, краевое условие Неймана, задача Коши, задача Шоуолтера–Сидорова, метод компактности, уравнение соболевского типа.

DOI: 10.31857/S0374064124080067, EDN: KCSFTM

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей $\partial\Omega$ из класса C^∞ , $Q = \Omega \times (0, T) = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T), T > 0\}$. Рассмотрим задачу для модифицированного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2 \Delta u + u^3 = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с однородным краевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $\partial u / \partial n$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Уравнением (1) описывается, например, процесс колебаний поверхности на “мелкой воде” [1], тогда функция $u = u(x, t)$ определяет высоту волны, а параметр λ характеризует капиллярные эффекты. В работе [2] доказывается существование единственного глобального решения задачи Коши для обобщённого модифицированного уравнения Буссинеска в невырожденном случае (с параметрами $\lambda = 1$, $\alpha = 1$). В статье [3] на основе другой модификации уравнения Буссинеска описывается распространение уединённых продольных волн деформации в тонком упругом стержне. Уравнение (1) находит применение и в релятивистской квантовой механике — в [4] оно рассматривается как полевое уравнение нелинейной классической мезонной теории. Уравнение (1) относится к классу нелинейных уравнений соболевского типа [5] или, в другой терминологии, к уравнениям, неразрешённым относительно старшей производной по времени [6].

В данной работе используется метод, хорошо зарекомендовавший себя при исследовании нелинейных уравнений соболевского типа первого порядка [7].

1. МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

На основе теории относительно спектрально ограниченных операторов, разработанной Г.А. Свиридюком и его учениками [8, 9], в работе [10] показано, что, задав операторы $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha^2 \Delta$, $N(u) = u^3$ в специально подобранных банаховых пространствах, можно представить задачу (1)–(3) как задачу Коши с условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \tag{4}$$

для операторно-дифференциального уравнения [11] вида

$$L\ddot{u} + Mu + N(u) = 0, \tag{5}$$

где \dot{u} , \ddot{u} — первая и вторая производные по переменной t .

Затем, используя метод фазового пространства [12], доказана теорема о существовании единственного локального решения этой задачи [11]. Пусть \mathfrak{U} , \mathfrak{F} — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейный и непрерывный), а оператор $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определённый). Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M относительно оператора L (или *L -резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M относительно оператора L (или *L -спектром* оператора M).

Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, *резольвентой*, *правой резольвентой*, *левой резольвентой* оператора M относительно оператора L (или *L -резольвентой*, *правой L -резольвентой*, *левой L -резольвентой* оператора M).

Оператор M называется *(L, σ) -ограниченным*, если существует такое $a > 0$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$, что при $|\mu| > a$ выполняется $\mu \in \rho^L(M)$.

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) d\lambda \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\lambda^L(M) d\lambda$$

являются проекторами, соответственно, в пространствах \mathfrak{U} и \mathfrak{F} [12]. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$.

Определение. Множество \mathfrak{P} называется *фазовым пространством* уравнения (5), если:

- 1) для любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ (касательного расслоения \mathfrak{P}) существует единственное решение задачи (4), (5);
- 2) любое решение $u = u(t)$ уравнения (5) лежит в \mathfrak{P} как траектория.

Запись $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ следует понимать как $u_0 \in \mathfrak{P}$ и $(u_0, u_1) \in T_{u_0}\mathfrak{P}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и оператор M $(L, 0)$ -ограничен, тогда в силу теоремы о расщеплении [12] уравнение (5) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u), \\ \ddot{u}^1 = L_1^{-1}Q(M + N)(u), \end{cases}$$

где $u^1 = Pu$. Тогда фазовым пространством \mathfrak{P} уравнения (5) является множество

$$\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u) = 0\}.$$

Таким образом, в работе [10] было доказано существование единственного локального решения (4), (5).

Лемма [13, § 1.2]. Если $f \in L^p(0, T; X)$ и $\dot{f} \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, X — банахово пространство, то f (после, быть может, изменения на множестве меры нуль из интервала $(0, T)$) будет непрерывным отображением $[0, T] \rightarrow X$.

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В работе [14] подробно изучен случай с условиями Дирихле. Для начала рассмотрим абстрактную задачу (4), (5). Для решения нам понадобятся несколько функциональных пространств. Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Зададим дуальные пары рефлексивных банаховых пространств $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и (L^p, L^q) относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такие, что имеет место цепочка плотных и непрерывных вложений

$$\mathfrak{U} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow H \hookrightarrow L^q \hookrightarrow \mathfrak{U}^*. \tag{6}$$

Зададим пространства распределений $L^\infty(0, T; \mathfrak{U})$ и $L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$. Сопряжённые им пространства строятся по теореме Данфорда–Петтиса

$$(L^\infty(0, T; \mathfrak{U}))^* \simeq L^1(0, T; \mathfrak{U}^*) \quad \text{и} \quad (L^\infty(0, T; L^q(\Omega)))^* \simeq L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

В заданных пространствах определим операторы L, M, N , удовлетворяющие условиям:

(C1) $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ — самосопряжённый, неотрицательно определённый, фредгольмов;

(C2) $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ — самосопряжённый, неотрицательно определённый;

(C3) $N \in C^r(L^p, L^q)$, $r \geq 1$, — s -монотонный, p -коэрцитивный, однородный порядка $p-1$ с симметричной производной Фреше.

В силу условия (C3) оператор N удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt} \langle N(x), x \rangle = p \langle N(x), \dot{x} \rangle.$$

Пусть λ_k — собственные значения задачи с условием (2) для оператора $-\Delta$, занумерованные по невозрастанию с учётом кратности, а φ_k — соответствующие им собственные функции. Кроме того, линейная оболочка $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ при $m \rightarrow \infty$ плотна в \mathfrak{U} и ортонормирована (в смысле скалярного произведения в H).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (C1)–(C3), $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{F}$, $u_0 \in \mathfrak{U} \cap L^p$, $u_1 \in \mathfrak{U} \cap \text{coim } L$. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) такое, что $u \in L^\infty(0, T; \mathfrak{U} \cap L^p(\Omega))$ и $\dot{u} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{U} \cap \text{coim } L)$.

Доказательство. Символом C будем обозначать, вообще говоря, разные константы. Решение задачи (4), (5) будем искать в виде приближения Галёркина [13, § 1.4]

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t) \varphi_k. \tag{7}$$

Коэффициенты $a_k^m(t)$ найдём из системы алгебро-дифференциальных уравнений

$$\langle L\ddot{u}^m, \varphi_k \rangle + \langle Mu^m, \varphi_k \rangle + \langle N(u^m), \varphi_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{8}$$

$$\langle u^m(0), \varphi_k \rangle = \langle u_0, \varphi_k \rangle = \beta_k^m, \quad \langle \dot{u}^m(0), \varphi_k \rangle = \langle u_1, \varphi_k \rangle = \gamma_k^m, \quad k = \overline{1, m}, \tag{9}$$

причём $u_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \rightarrow u_0$ в \mathfrak{U} при $m \rightarrow \infty$ и $u_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \rightarrow u_1$ в \mathfrak{U} при $m \rightarrow \infty$.

В силу классических результатов существует единственное локальное решение $u^m = u^m(s, t)$, $t \in [0, t^m]$.

Получим априорные оценки. Умножение уравнения (8) на $\dot{u}_k^m(t)$ ($k = \overline{1, m}$) и суммирование по k от 1 до m даёт

$$\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m \rangle + \langle Mu^m, \dot{u}^m \rangle + \langle N(u^m), \dot{u}^m \rangle = 0. \tag{10}$$

Введём в пространстве $\text{coim } L \cap \mathfrak{U}$ норму $|\dot{u}|^2 = \langle L\dot{u}, \dot{u} \rangle$; в силу принципа Куранта она эквивалентна норме в пространстве \mathfrak{U} .

Используя самосопряжённость операторов L, M , получаем

$$2\langle L\dot{u}^m, \dot{u}^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle L\dot{u}^m, \dot{u}^m \rangle, \quad 2\langle Mu^m, \dot{u}^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle Mu^m, u^m \rangle.$$

В силу условия (С3)

$$p\langle N(u^m), \dot{u}^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle N(u^m), u^m \rangle.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m \rangle + \frac{2}{p} \langle N(u^m), u^m \rangle \right] = 0.$$

Проинтегрируем его левую часть на отрезке $[0, t]$, $t \leq t_m$:

$$|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m \rangle + \frac{2}{p} \langle N(u^m), u^m \rangle = |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m \rangle + \frac{2}{p} \langle N(u_0^m), u_0^m \rangle, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m \rangle + C_N \frac{2}{p} \|u^m\|_{L^p}^p &\leq |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m \rangle + C_N \frac{2}{p} \|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1} \leq \\ &\leq |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m \rangle + C_N \frac{2}{p} \|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует

$$|\dot{u}^m|^2 \leq C.$$

Так как правая часть неравенства (12) ограничена, то имеет место неравенство

$$|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m \rangle + C_N \frac{2}{p} \|u^m\|_{L^p}^p \leq C.$$

Константа C не зависит от t_m и, следовательно, $t_m = T$.

Замечание. Последовательности u^m и \dot{u}^m ограничены, соответственно, в пространствах $L^\infty(0, T; \mathfrak{U} \cap L^p)$ и $L^\infty(0, T; \text{coim } L)$, являющихся сопряжёнными пространствами для сепарабельных банаховых пространств $L^1(0, T; \mathfrak{U}^* \cup L^q)$ и $L^1(0, T; \mathfrak{U}^*)$. Поэтому из них можно выбрать *-слабо сходящиеся подпоследовательности u^{m_i} и \dot{u}^{m_i} такие, что

$$u^{m_i} \rightarrow u \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; \mathfrak{U} \cap L^p), \quad \dot{u}^{m_i} \rightarrow \dot{u} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; \text{coim } L).$$

При этом \dot{u}^{m_i} понимается как обобщённая производная в пространстве распределений.

Поскольку оператор N p -коэрцитивен, т.е.

$$\langle N(u^m), u^m \rangle \leq \|N(u^m)\|_{L^q} \|u^m\|_{L^p} \leq C^N \|u^m\|_{L^p}^{p-1} \|u^m\|_{L^p} = C^N \|u^m\|_{L^p}^p,$$

и, следовательно, $N(u^m)$ ограничены в пространстве $L^q(0, T; \mathfrak{U}^* \cup L^q)$, то $N(u^{m_i}) \rightarrow g$ слабо в $L^q(0, T; \mathfrak{U}^* \cup L^q)$.

Покажем, что $N(u) = g$. Из монотонности оператора N следует, что

$$U^{m_i} = \langle N(u^{m_i}) - N(z), u^{m_i} - z \rangle \geq 0, \quad z \in L^p(0, T; \mathfrak{U} \cap L^p).$$

Из формулы (11) имеем

$$U^{m_l} = |u_1^{m_l}|^2 - |\dot{u}^{m_l}|^2 + \langle Mu_0^{m_l}, u_0^{m_l} \rangle - \langle Mu^{m_l}, u^{m_l} \rangle + \frac{2}{p} \langle N(u_0^{m_l}), u_0^{m_l} \rangle - \frac{2}{p} \langle N(u^{m_l}), z \rangle - \langle N(z), u^{m_l} - z \rangle.$$

В силу свойств слабо сходящихся последовательностей $\liminf |u^{m_l}(t)|^2 \geq |u(t)|^2$, поэтому

$$\limsup U^{m_l} \leq \langle g, u \rangle - \langle g, z \rangle - \langle N(z), u - z \rangle,$$

откуда

$$\langle g, u \rangle - \langle g, z \rangle - \langle N(z), u - z \rangle \geq 0.$$

Положим $z = u - hw$, $h > 0$, $w \in L^p(0, T; B)$, тогда

$$\langle g - N(u - hw), hw \rangle \geq 0, \quad \langle g - N(u - hw), w \rangle \geq 0.$$

Устремив $h \rightarrow 0$, в силу непрерывности N и теоремы Лебега о мажорирующей последовательности, получим

$$\langle g - N(u), w \rangle \geq 0.$$

В силу произвольности выбора w заключаем, что $g = N(u)$.

Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (8), устремляя m_l к бесконечности. Для фиксированного k и $m_l > k$ получим

$$\langle L\ddot{u}^{m_l}, \varphi_k \rangle + \langle Mu^{m_l}, \varphi_k \rangle + \langle N(u^{m_l}), \varphi_k \rangle = 0,$$

отсюда выводим

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lu, \varphi_k \rangle + \langle Mu, \varphi_k \rangle + \langle N(u), \varphi_k \rangle = 0.$$

Ввиду плотности системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве \mathfrak{U} при $m \rightarrow \infty$ и произвольности выбора φ_k для произвольного $v \in \mathfrak{U}$ имеет место равенство

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lu, v \rangle + \langle Mu, v \rangle + \langle N(u), v \rangle = 0.$$

В силу разложения начальных функций в ряд заключаем, что $u^{m_l}(0) = u_l^0 \rightarrow u_0$ слабо в \mathfrak{U} , в силу сформулированного замечания — $u^{m_l}(0) \rightarrow u(0)$ в \mathfrak{U} , следовательно, $u(0) = u_0$. В силу замечания также имеем

$$\langle \ddot{u}^{m_l}, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \ddot{u}, \varphi_k \rangle \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T)$$

и, следовательно, с учётом леммы получим

$$\langle \dot{u}^{m_l}(0), \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \dot{u}(t), \varphi_k \rangle|_{t=0} = \langle \dot{u}(0), \varphi_k \rangle.$$

С другой стороны, в силу разложения начальных функций в ряд имеет место сходимость

$$\langle \dot{u}^{m_l}(0), \varphi_k \rangle \rightarrow \langle u_1, \varphi_k \rangle,$$

откуда для любого k

$$\langle \dot{u}(0), \varphi_k \rangle = \langle u_1, \varphi_k \rangle.$$

Таким образом, функция $u = u(s, t)$ удовлетворяет уравнению (5) и начальным условиям (4). Теорема доказана.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Приведём задачу (1)–(3) к задаче (4), (5), выбрав в качестве гильбертова пространства

$$H_0(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}(x) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

со скалярным произведением в $L^2(\Omega)$. Положим $\mathfrak{U} = H^1(\Omega)$, $\mathfrak{U}^* = H^{-1}(\Omega)$. Тогда цепочка плотных и непрерывных вложений (6) из п. 2 имеет место.

Определим оператор $L: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ формулой

$$\langle Lu, v \rangle = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \nabla v) dx.$$

Условие (C1) будет выполняться при $\lambda \geq \lambda_1$.

Условие (C2) будет выполняться, если оператор $M: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ определить как

$$\langle Mu, v \rangle = \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Определим оператор $N(u): L^4 \rightarrow L^{4/3}$ следующим образом:

$$\langle N(u), v \rangle = \int_{\Omega} u^3 v dx.$$

Его производная Фреше

$$|\langle N'_u v, w \rangle| = 3 \left| \int_{\Omega} u^2 v w dx \right| \geq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \|w\|_{L^4}$$

симметрична, однородна (порядка 3) и ограничена в силу неравенства Гёльдера.

Оператор N s -монотонен:

$$\langle N'_u(v), v \rangle = 3 \int_{\Omega} u^2 v^2 dx \geq 0$$

и 4-коэрцитивен:

$$\langle N(u), u \rangle = \int_{\Omega} u^3 u dx = \|u\|_{L^4}^4, \quad \langle N(u), v \rangle = \int_{\Omega} u^3 v dx = \|u\|_{L^4}^3 \|v\|_{L^4}.$$

Таким образом, условие (C3) выполняется. Справедлива

Теорема 2. Пусть $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$, $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{F}$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega) \cap \text{coim } L$. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) такое, что

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \quad u \quad \dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap \text{coim } L). \quad (13)$$

Кроме того, имеет место

Теорема 3. Пусть $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$, $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{F}$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega) \cap \text{coim } L$. Тогда решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям (13), единственно.

Доказательство. Пусть u и v — два различных решения задачи (1)–(3), обозначим $w = u - v$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Lw_{tt} + Mw = v^3 - u^3,$$

а начальные условия станут однородными:

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad w \in \Omega. \tag{14}$$

Вместо стандартных норм пространств $L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ будем применять им эквивалентные, определённые по формулам

$$|\dot{w}|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle L\dot{w}, \dot{w} \rangle, \quad |w|_{H_0^1}^2 = \langle \alpha^{-2}\nabla w, \nabla w \rangle, \quad \frac{d}{dt} \left[|\dot{w}|_{L^2}^2 + |w|_{H_0^1}^2 \right] = 2\langle (v)^3 - (u)^3, \dot{w}^m \rangle. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$2\langle v^3 - u^3, \dot{w}^m \rangle \leq 6 \int_{\Omega} \sup(|u|^2, |v|^2) |w| |\dot{w}| dx.$$

Оценим правую часть этого неравенства, используя неравенство Гёльдера:

$$\int_{\Omega} \sup(|u|^2, |v|^2) |w| |\dot{w}| dx \leq C(\| |u|^2 \|_{L^4} + \| |v|^2 \|_{L^4}) \|w\|_{L^4} \|\dot{w}\|_{L^2},$$

и далее используя теоремы вложения и свойства нормы:

$$C(\| |u|^2 \|_{L^4} + \| |v|^2 \|_{L^4}) \|w\|_{L^4} \|\dot{w}\|_{L^2} \leq C(|u|_{L^4}^2 + |v|_{L^4}^2) |w|_{H_0^1} |\dot{w}|_{L^2} \leq C|w|_{H^1} |\dot{w}|_{L^2} \leq 2C(|w|_{H_0^1}^2 + |\dot{w}|_{L^2}^2).$$

С учётом (15) получим

$$\left[|\dot{w}|_{L^2}^2 + |w|_{H_0^1}^2 \right] \leq 2C \int_0^t \left(|w|_{H_0^1}^2 + |\dot{w}|_{L^2}^2 \right) ds,$$

откуда в силу неравенства Беллмана–Гронуолла имеем равенство $|\dot{w}|_{L^2}^2 + |w|_{H_0^1}^2 = 0$. Принимая во внимание нулевые начальные условия (14), заключаем, что $w(s, t) = 0$, т.е. $u \equiv v$. Теорема доказана.

Вместо условий (3) в задаче (1)–(3) можно рассмотреть условия Шоултера–Сидорова

$$P(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad P(u_t(x, 0) - u_1(x)) = 0, \tag{16}$$

которые являются их естественным обобщением для уравнений соболевского типа [15] и не требуют проверки принадлежности начальных функций касательному расслоению фазового пространства уравнения.

Повторяя рассуждения изложенного выше доказательства, нетрудно доказать теорему о существовании единственного решения задачи Шоултера–Сидорова.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$. Тогда для любых $u_0 \in \mathfrak{U} \cap L^p$, $u_1 \in \text{coim } L$ существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), (16) такое, что

$$u \in L^\infty(0, T; \mathfrak{U} \cap L^p) \quad \text{и} \quad \dot{u} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{U}).$$

4. СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

В рамках описанной теории можно рассмотреть и неоднородное модифицированное уравнение Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2 \Delta u + u^3 = y(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (17)$$

с условием Неймана (2) и начальными условиями (3).

Теорема 5. Пусть выполнены условия (C1)–(C3) и $y \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (2), (3), (17), удовлетворяющее условиям (13).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1, однако вместо неравенства (12) получится

$$\begin{aligned} |\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m \rangle + C_N \frac{2}{p} \|u^m\|_{L^p}^p &\leq 2 \int_0^t \|y\|_{L^2} \|\dot{u}^m\|_{L^2} ds + |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m \rangle + C^N \frac{2}{p} \|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1} \leq \\ &\leq \int_0^t \|y\|_{L^2}^2 ds + \int_0^t \|\dot{u}^m\|_{L^2}^2 ds + |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m \rangle + C^N \frac{2}{p} \|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1}, \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует

$$|\dot{u}^m|^2 \leq C + \int_0^t \|\dot{u}^m\|_{L^2}^2 ds \leq C + \int_0^t |\dot{u}^m| ds,$$

а в силу неравенства Беллмана–Грунцулла выполняется

$$|\dot{u}^m|^2 \leq Ce^t \leq C, \quad t \in [0, T].$$

Отметим, что количество базисных функций для приближения Галёркина следует выбирать так, чтобы их линейная оболочка покрывала ядро оператора L (для учёта эффекта вырожденности уравнения).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-20037).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Д.Г. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах / Д.Г. Архипов, Г.А. Хабахпашев // Письма в ЖЭТФ. — 2011. — Т. 93, № 8. — С. 469–472.
2. Wang, S. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / S. Wang, G. Chen // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — V. 274. — P. 846–866.
3. Clarkson, P.A. Solitary wave interactions in elastic rods / P.A. Clarkson, R.J. LeVeque, R. Saxton // Stud. Appl. Math. — 1986. — V. 75, № 1. — P. 95–122.
4. Jorgens, K. Das anfangswertproblem in grossen fur eine klasse nichtlinearer wellengleichungen / K. Jorgens // Math. Zeitschr. — 1961. — Bd. 77. — S. 295–308.
5. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, неразрешённые относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 436 с.
6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

7. Манакова, Н.А. Полулинейные модели соболевского типа. Неединственность решения задачи Шоултера–Сидорова / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова, К.В. Перевозчикова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2022. — Т. 15, № 1. — С. 84–100.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 250–258.
9. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 252–260.
10. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — № 18 (277). — С. 13–19.
11. Sidorov, N. Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models / N. Sidorov, D. Sidorov, A. Sinitsyn. — Singapore : World Scientific, 2020. — 400 p.
12. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4 (298). — С. 47–74.
13. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс ; пер. с фр. Л.Р. Волевича ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1972. — 588 с.
14. Bychkov, E.V. Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method / E.V. Bychkov // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2021. — Т. 14, № 1. — С. 26–38.
15. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — Р. 104–125.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONLINEAR MODIFIED BOUSSINESQ EQUATION

A. A. Zamyshlyeva¹, E. V. Bychkov²

South Ural State University (National Research University), Chelaybinsk, Russia

e-mail: ¹zamyshliaevaaa@susu.ru, ²bychkovev@susu.ru

The problem in Sobolev spaces is investigated for a modified Boussinesq equation with a homogeneous Neumann boundary condition and with classical initial conditions. Based on the compactness method, it is shown that the approximate analytical solution, constructed in the form of Galerkin's sum over the system of eigenfunctions of the Neumann boundary value problem, $*$ -weakly converges to the exact solution.

Keywords: modified Boussinesq equation, Neumann boundary condition, Cauchy problem, Showalter-Sidorov problem, compactness method, equation of Sobolev type.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-11-20037).

REFERENCES

1. Arkhipov, D.G. and Khabakhpashev, G.A., New equation for the description of inelastic interaction of on linear localized waves in dispersive media, *J. Exp. and Theor. Phys. Letters*, 2011, vol. 93, no. 8, pp. 423–426.
2. Wang, S. and Chen, G., Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 274, pp. 846–866.

3. Clarkson, P.A., LeVeque, R.J., and Saxton, R., Solitary wave interactions in elastic rods, *Stud. Appl. Math.*, 1986, vol. 75, no. 1. pp. 95–122.
4. Jorgens, K., Das anfangswert problem in grossen fur eine klasse nicht linearer wellengleichungen, *Math. Zeitschr.*, 1961, bd. 77, s. 295–308.
5. Demidenko, G.V. and Uspenskii, S.V., *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative*, New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 2003.
6. Sveshnikov, A.G., Al'shin, A.B., Korpusov, M.O., and Pletner, Yu.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya Sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Sobolev Type Equation), Moscow: Fizmatlit, 2007.
7. Manakova, N.A., Gavrilova, O.V., and Perevozchikova, K.V., Semilinear models of Sobolev type. Non-uniqueness of solution to the Showalter–Sidorov problem, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 84–100.
8. Sviridyuk, G.A. and Sukacheva, T.G., Phase spaces of a class of operator equation, *Differ. Equat.*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250–258.
9. Sviridyuk, G.A. and Zamyshlyayeva, A.A., The phase spaces of a class of linear higher order Sobolev type equations, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 269–278.
10. Zamyshlyayeva, A.A. and Bychkov, E.V., The phase space of the modified Boussinesq equation, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 18, pp. 13–19.
11. Sidorov, N., Sidorov, D., and Sinitsyn, A., *Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models*, Singapore: World Scientific, 2020.
12. Sviridyuk, G.A., On the general theory of operator semigroups, *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74.
13. Lions, J.L., *Sur quelques methods de resolution des problemes aux limites non linears*, Paris–Dunod: Gauthier Villars, 1969.
14. Bychkov, E.V., Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method, *Bull. of the South Ural State Univ. Series: Math. Modelling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 26–38.
15. Sviridyuk, G.A. and Zagrebina, S.A., The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations, *The Bull. of Irkutsk State Univ. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© М. Мирсабуров¹, Р. Н. Тураев²

Термезский государственный университет, Узбекистан

e-mail: ¹mirsaburov@mail.ru, ²rasul.turaev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 18.12.2023 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследован вопрос однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с условиями типа Бицадзе–Самарского и Франкля для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, условие Бицадзе–Самарского, условие Франкля, сингулярное интегральное уравнение, нефредгольмов оператор, интегральное уравнение Винера–Хопфа, уравнение Фредгольма второго рода.

DOI: 10.31857/S0374064124080079, EDN: KCOOME

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ — область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$. Через C_0 и C_1 , соответственно, обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $E(c, 0)$, где $c \in (-1, 1)$. Действительные параметры m , α_0 и β_0 уравнения (1) удовлетворяют условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Отметим, что многие свойства решений уравнения (1) существенно зависят от числовых параметров α_0 и β_0 при его младших членах. На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$, ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^*: \beta_0 + \alpha_0 = -m/2, \quad B_0^* C_0^*: \beta_0 - \alpha_0 = -m/2, \quad A_0^* B_0^*: \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от положения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta E_0^* C_0^* B_0^* \cup E_0^* C_0^*$, где $E_0^* = E_0^*(0, 1)$.

В работе [1] в конечной области была исследована задача с условием Бицадзе–Самарского [2] на граничной характеристике AC и на параллельной ей внутренней характеристике EC_0 . В настоящей статье исследуется задача, в которой условие Бицадзе–Самарского задаётся на части AC_0 граничной характеристики AC и на параллельной ей внутренней характеристике EC_1 , т.е. часть C_0C граничной характеристики AC освобождена от условия Бицадзе–Самарского, и это недостающее нелокальное условие заменено условием Франкля [3–7] на отрезке вырождения AB .

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от полуплоскости D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0)$, $B_R = B_R(R, 0)$:

$$\sigma_R: x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2, \quad -R \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введём обозначения: $I = \{(x, y): -1 < x < 1, y = 0\}$, $\bar{I} = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $\bar{I}_1 = \{(x, y): -\infty < x \leq -1, y = 0\}$, $\bar{I}_2 = \{(x, y): 1 \leq x < +\infty, y = 0\}$.

Введём линейные функции $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$, отображающие отрезок $[-1, 1]$ на отрезки $[-1, c]$ и $[c, 1]$ соответственно, причём $p(-1) = -1$, $p(1) = c$, $q(-1) = 1$, $q(1) = c$, $a = (1+c)/2$, $b = (1-c)/2$ [8].

Задача. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}_R) \cap C^2(D^+)$, удовлетворяющую уравнению (1) в D_R и следующим условиям:

- 1) $u(x, y)$ является обобщённым решением из класса $R_1(D^-)$ [9, с. 104; 10, с. 35];
- 2) имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I, \tag{2}$$

причём пределы в (2) при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = (m+2(\beta_0 + \alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta = (m+2(\beta_0 - \alpha_0))/(2(m+2))$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$;

- 3) выполняется равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \tag{3}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

- 4) справедливы краевые условия

$$u(x, y)|_{y=0} = \varphi_i(x), \quad x \in \bar{I}_i, \quad i = 1, 2; \tag{4}$$

$$\mu_0(1+x)^\alpha D_{-1,x}^{1-\beta} u[\theta(p(x))] = \mu_1(1-x)^\alpha D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta^*(q(x))] + \psi(x), \quad x \in \bar{I}; \tag{5}$$

$$u(p(x), 0) - u(q(x), 0) = f(x), \quad x \in \bar{I}, \tag{6}$$

где μ_0, μ_1 — некоторые постоянные, причём $\mu_0^2 + \mu_1^2 \neq 0$; $D_{-1,x}^{1-\beta}, D_{x,1}^{1-\beta}$ — операторы дифференцирования дробного порядка [9, с. 16];

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left[\frac{m+2}{4} (1+x_0) \right]^{2/(m+2)}, \quad x_0 \in [-1, c],$$

— аффикс точки пересечения характеристики AC_0 с характеристикой, исходящей из точки $M_0(x_0, 0)$, $x_0 \in [-1, c]$;

$$\theta^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i \left[\frac{m+2}{4} (x_0 - c) \right]^{2/(m+2)}, \quad x_0 \in [c, 1],$$

— аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, исходящей из точки $M_0(x_0, 0)$, $x_0 \in [c, 1]$; $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi(x), f(x)$ — заданные функции, причём $\varphi_1(-1) = 0$, $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_1(-\infty) = 0$, $\varphi_2(+\infty) = 0$, $f(1) = 0$, $\psi(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, $f(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, функции $\varphi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на любых отрезках $[-N, -1]$, $[1, N]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-\delta_0}$, где δ_0 — положительная постоянная.

Заметим, что условие Бицадзе–Самарского (5) задаётся на части AC_0 (где $\theta(p(x)) \in AC_0$) граничной характеристики AC и на внутренней характеристике EC_1 (где $\theta^*(q(x)) \in EC_1$), а (6) (где $-1 \leq p(x) \leq c$, $c \leq q(x) \leq 1$) является условием типа Франкля на промежутках $[-1, c]$ и $[c, 1]$ отрезка вырождения AB . Обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in I. \quad (7)$$

Решение уравнения (1) в области D^- , удовлетворяющее начальным условиям типа Коши

$$u(x, -0) = \tau(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

определяется формулой Дарбу [10, с. 34]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \gamma_1 \int_{-1}^1 \tau \left[x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right] (1-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} dt + \\ & + \gamma_2 (-y)^{1-\beta_0} \int_{-1}^1 \nu \left[x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right] (1-t)^{-\beta} (1+t)^{-\alpha} dt, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{\alpha+\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} u[\theta(p(x))] = & \gamma_1 \left(\frac{1+x}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha) D_{-1,x}^{-\alpha} (1+x)^{\beta-1} \tau(p(x)) + \\ & + \gamma_2 \left(\frac{m+2}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} a^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) D_{-1,x}^{\beta-1} (1+x)^{-\alpha} \nu(p(x)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u[\theta^*(q(x))] = & \gamma_1 \left(\frac{1-x}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha) D_{x,1}^{-\alpha} (1-x)^{\beta-1} \tau(q(x)) + \\ & + \gamma_2 \left(\frac{m+2}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} b^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) D_{x,1}^{\beta-1} (1-x)^{-\alpha} \nu(q(x)). \end{aligned} \quad (9)$$

С учётом (8) и (9) найдём производные дробного порядка

$$\begin{aligned} D_{-1,x}^{1-\beta} u[\theta(p(x))] = & \gamma_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha) (1+x)^{-\alpha} D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta} \tau(p(x)) + \\ & + \gamma_2 \left(\frac{m+2}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} a^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) (1+x)^{-\alpha} \nu(p(x)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta^*(q(x))] = & \gamma_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha) (1-x)^{-\alpha} D_{x,1}^{1-\alpha-\beta} \tau(q(x)) + \\ & + \gamma_2 \left(\frac{m+2}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} b^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) (1-x)^{-\alpha} \nu(q(x)). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь в силу (10) и (11) из условия (5) получим

$$\begin{aligned} & a^{1-\alpha-\beta}\nu(p(x)) - b^{1-\alpha-\beta}\nu(q(x)) = \\ & = \gamma[\mu_0 D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x)) - \mu_1 D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(q(x))] + \Psi_1(x), \quad x \in I, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\Psi_1(x) = (1-x^2)^\alpha \psi(x) / \gamma_2 ((m+2)/2)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta)$.

Равенство (12) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённым на интервал I оси $y=0$ из области D^- .

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$,

$$\mu_0 > 0, \quad \mu_1 < 0, \tag{13}$$

тогда решение $u(x, y)$ задачи достигает своих наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области \bar{D}_R^+ на кривой σ_R .

Доказательство. В силу принципа Хопфа [11, с. 25] решение $u(x, y)$ своих НПЗ и НОЗ во внутренних точках (x_0, y_0) области D_R^+ не достигает.

Допустим, что функция $u(x, y)$ достигает своего НПЗ в области \bar{D}_R^+ в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка AB . Здесь рассмотрим два случая возможного расположения точки x_0 .

1. Пусть $x_0 \in (-1, c]$, $x_0 = p(\xi_0)$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (7) ($f(x) \equiv 0$) решение $u(x, y)$ достигает своего НПЗ в двух точках: $(p(\xi_0), 0)$ и $(q(\xi_0), 0)$. Следовательно, в этих точках $\nu(p(\xi_0)) < 0$, $\nu(q(\xi_0)) < 0$ [10, с. 74]. Отсюда с учётом (13) имеем

$$\mu_0 a^{1-\alpha-\beta}\nu(p(\xi_0)) - \mu_1 b^{1-\alpha-\beta}\nu(q(\xi_0)) < 0, \quad \xi_0 \in I. \tag{14}$$

С другой стороны, хорошо известно, что для операторов дробного дифференцирования в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ имеют место неравенства $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x))|_{x=x_0} > 0$, $D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(q(x))|_{x=x_0} > 0$, тогда в силу (13)

$$\mu_0 D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x))|_{x=\xi_0} - \mu_1 D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(q(x))|_{x=\xi_0} > 0.$$

Отсюда заключаем, что левая часть соответствующего однородного соотношения (12) ($\Psi_1(x) \equiv 0$) строго положительна, что противоречит неравенству (14), следовательно, $x_0 = p(\xi_0) \notin (-1, c]$.

2. Пусть $x_0 \in [c, 1)$, $x_0 = q(\eta_0)$. Рассуждая аналогично случаю 1, заключаем, что $x_0 = q(\eta_0) \notin [c, 1)$.

Таким образом, решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям теоремы, своего НПЗ во внутренних точках интервала I не достигает. В силу соответствующих однородных краевых условий (4) ($\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \equiv 0$) функция $u(x, y)$ своего НПЗ не достигает и в точках из $[-R, -1] \cup [1, R]$. Следовательно, $(x_0, y_0) \in \sigma_R$.

Также можно показать, что точка (x_0, y_0) , в которой решение $u(x, y)$ достигает своего НОЗ в области D_R^+ , принадлежит σ_R , т.е. $(x_0, y_0) \in \sigma_R$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, в области D^+ тождественно равно нулю.

Доказательство. Решение задачи при выполнении условий теоремы 1 в области \overline{D}_R^+ достигает своих НПЗ и НОЗ в точках нормальной кривой σ_R . В силу (3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R_0 = R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|u(x, y)| < \varepsilon$, $(x, y) \in \sigma_R$, следовательно, в силу теоремы 1 $|u(x, y)| < \varepsilon$ для любых $(x, y) \in \overline{D}_R^+$. Отсюда, в силу произвольности ε , при $R \rightarrow +\infty$ заключаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $D^+ \cup I_1 \cup I_2$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Задача при выполнении условий теоремы 1 имеет не более одного решения.*

Доказательство. В силу следствия 1 с учётом условия сопряжения (2) имеем

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) \equiv 0, \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad x \in I. \tag{15}$$

Теперь в области D^- , записав решение $u(x, y)$ с помощью формулы Дарбу с нулевыми данными (15), получим, что $u(x, y) \equiv 0$ и в области \overline{D}^- . Следствие доказано.

Таким образом, доказана единственность решения задачи.

Теорема 2. *Задача при выполнении условий (13) и*

$$\frac{-\lambda\pi^2\sqrt{b}}{\lambda_0\sqrt{a}\sin(\delta\pi)} \left[\mu_0 \frac{a^{2-4a_0}}{b^{1+\delta}e^{b_0\pi}} - \mu_1 \frac{b^{1-4a_0}}{a^\delta e^{-b_0\pi}} \right] < 1, \tag{16}$$

$$\lambda_0 = \mu_0 [\pi e^{-b_0\pi} \operatorname{ctg}(2a_0\pi) - e^{b_0\pi} \Gamma(2a_0)\Gamma(1-2a_0) - \gamma_0 \Gamma(1-2a_0)] + \\ + \mu_1 [\pi e^{b_0\pi} \operatorname{ctg}(2a_0\pi) - e^{-b_0\pi} \Gamma(2a_0)\Gamma(1-2a_0) + \gamma_0 \Gamma(1-2a_0) \cos(2a_0\pi)] \neq 0,$$

где $\lambda = -(\mu_0 e^{-b_0\pi} - \mu_1 e^{b_0\pi} + \mu_1 \gamma_0 (\Gamma(2a_0))^{-1})/\lambda_0$, однозначно разрешима.

Покажем, что множество числовых параметров задачи, удовлетворяющее неравенству (16), не пусто. Действительно, положив в (16) $\mu_1 = -a^{2-4a_0+\delta}$, имеем

$$-\frac{\lambda\pi^2\sqrt{b}a^{2-4a_0-0,5}}{\lambda_0\sin(\delta\pi)} \left[\mu_0 \frac{e^{-b_0\pi}}{b^{1+\delta}} + b^{1-4a_0} e^{b_0\pi} \right] < 1, \tag{17}$$

если $2-4a_0-1/2 > 0$ (т.е. $\beta_0 < 6-m/8$). Тогда для значений числового параметра c , достаточно близких к -1 , множитель $a^{2-4a_0-1/2} = ((1+c)/2)^{2-4a_0-1/2}$ в (17) будет достаточно малым и неравенство (17) (а значит и (16)) при таких значениях c будет выполняться.

2.1. ВЫВОД СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ $\tau_1(x)$

Решение задачи Дирихле в полуплоскости $y \geq 0$, удовлетворяющее условию

$$u(x, +0) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

даётся формулой [7]

$$u(x, y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0, \tag{19}$$

где

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{1-2a_0} \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\bar{\delta})}{\Gamma(2-\delta-\bar{\delta})}, \quad r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \\ 2a_0 = \alpha + \beta, \quad \delta = a_0 + ib_0, \quad b_0 = -\frac{\alpha_0}{m+2}.$$

В (18) значения $\tau(x)$ при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ в силу условий (4) известны, с учётом этого формулу (19) преобразуем к виду

$$u(x, y) = k_2(1 - \beta_0)y^{1-\beta_0} \int_{-1}^1 \tau(t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} dt + F(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0, \quad (20)$$

где

$$F(x, y) = k_2(1 - \beta_0)y^{1-\beta_0} \left(\int_{-\infty}^{-1} \varphi_1(t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} dt + \int_1^{+\infty} \varphi_2(t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} dt \right)$$

— известная функция.

Продифференцировав (20) по y с учётом тождества

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y^{1-\beta_0} (r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} \right) = \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \frac{\partial}{\partial t} \left((x-t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} \right),$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \int_{-1}^1 \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[(x-t)(r_0^2)^{a_0-1} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right\} \right] dt + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \quad (21)$$

Умножим обе части равенства (21) на y^{β_0} , затем перейдём к пределу при $y \rightarrow +0$, далее выполнив операцию интегрирования по частям, приходим к соотношению

$$\nu(x) = -k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} \int_{-1}^1 \tau'(t) \left[\frac{x-t}{|x-t|^{2-2a_0}} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-x}{|t-x|}\right\} \right] dt + \Phi(x), \quad x \in I, \quad (22)$$

где

$$\Phi(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} \left(e^{b_0\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\tau'_1(t) dt}{(x-t)^{1-2a_0}} - e^{-b_0\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\tau'_2(t) dt}{(t-x)^{1-2a_0}} \right).$$

Заметим, что соотношение (22) справедливо для всего промежутка I .

В силу (22), исключив $\nu(p(x))$ и $\nu(q(x))$ из соотношения (12), имеем

$$\begin{aligned} & -\mu_0 k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} a^{1-2a_0} \int_{-1}^1 \tau'(t) \left[\frac{p(x)-t}{|p(x)-t|^{2-2a_0}} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-p(x)}{|t-p(x)|}\right\} \right] dt + \\ & + \mu_1 k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} b^{1-2a_0} \int_{-1}^1 \tau'(t) \left[\frac{q(x)-t}{|q(x)-t|^{2-2a_0}} \exp\left\{-2b_0 \arcsin \frac{t-q(x)}{|t-q(x)|}\right\} \right] dt = \\ & = \gamma [\mu_0 D_{-1,x}^{1-2a_0} \tau(p(x)) - \mu_1 D_{x,1}^{1-2a_0} \tau(q(x))] + \Psi_2(x), \quad x \in I, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) - \mu_0 a^{1-2a_0} \Phi(p(x)) + \mu_1 b^{1-2a_0} \Phi(q(x)).$$

С учётом неравенств $-1 \leq p(x) \leq c$ и $c \leq q(x) \leq 1$ запишем интегро-дифференциальное уравнение (23) в виде

$$\begin{aligned}
 & -\mu_0 a^{1-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_{-1}^{p(x)} \frac{\tau'(t) dt}{(p(x)-t)^{1-2a_0}} + \mu_0 a^{1-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_{p(x)}^c \frac{\tau'(t) dt}{(t-p(x))^{1-2a_0}} + \\
 & + \mu_0 a^{1-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_c^1 \frac{\tau'(t) dt}{(t-p(x))^{1-2a_0}} + \mu_1 b^{1-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_{-1}^c \frac{\tau'(t) dt}{(q(x)-t)^{1-2a_0}} + \\
 & + \mu_1 b^{1-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_c^{q(x)} \frac{\tau'(t) dt}{(q(x)-t)^{1-2a_0}} - \mu_1 b^{1-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_{q(x)}^1 \frac{\tau'(t) dt}{(t-q(x))^{1-2a_0}} = \\
 & = \gamma_0 [\mu_0 D_{-1,x}^{1-2a_0} \tau(p(x)) + \mu_1 D_{x,1}^{1-2a_0} \tau(q(x))] + \Psi_3(x), \quad x \in I, \tag{24}
 \end{aligned}$$

где $\gamma_0 = 2\gamma/k_2(1-\beta_0)(m+2)$, $\Psi_3(x) = 2\Psi_2(x)/k_2(1-\beta_0)(m+2)$.

В интегралах (24) с промежутками интегрирования $(-1, p(x))$, $(p(x), c)$, $(-1, c)$ сделаем замену переменной интегрирования $t = p(s)$, а в интегралах с промежутками $(c, q(x))$, $(q(x), 1)$ и $(c, 1)$ — замену $t = q(s)$. Получим

$$\begin{aligned}
 & -\mu_0 a^{2-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_{-1}^x \frac{\tau'(p(s)) ds}{(p(x)-p(s))^{1-2a_0}} + \mu_0 a^{2-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_x^1 \frac{\tau'(p(s)) ds}{(p(s)-p(x))^{1-2a_0}} + \\
 & + \mu_0 b a^{1-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau'(q(s)) ds}{(q(s)-p(x))^{1-2a_0}} + \mu_1 a b^{1-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau'(p(s)) ds}{(q(x)-p(s))^{1-2a_0}} + \\
 & + \mu_1 b^{2-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_x^1 \frac{\tau'(q(s)) ds}{(q(x)-q(s))^{1-2a_0}} - \mu_1 b^{2-2a_0} e^{-b_0 \pi} \int_{-1}^x \frac{\tau'(q(s)) ds}{(q(s)-q(x))^{1-2a_0}} = \\
 & = \gamma_0 [\mu_0 D_{-1,x}^{1-2a_0} \tau(p(x)) + \mu_1 D_{x,1}^{1-2a_0} \tau(q(x))] + \Psi_3(x), \quad x \in I. \tag{25}
 \end{aligned}$$

С учётом тождеств $p(x) - p(s) = a(x - s)$, $q(x) - p(s) = 1 - bx - as$, $q(x) - q(s) = b(s - x)$ и равенства $a\tau'(p(x)) = -b\tau'(q(x)) + f'(x)$ из (7) уравнение (25) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \mu_0 e^{b_0 \pi} \int_{-1}^x \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(x-s)^{1-2a_0}} - \mu_0 e^{-b_0 \pi} \int_x^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(s-x)^{1-2a_0}} + \mu_0 a^{1-2\beta} e^{-b_0 \pi} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-ax-bs)^{1-2a_0}} - \\
 & - \mu_1 b^{1-2a_0} e^{b_0 \pi} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-bx-as)^{1-2a_0}} + \mu_1 e^{b_0 \pi} \int_x^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(s-x)^{1-2a_0}} - \mu_1 e^{-b_0 \pi} \int_{-1}^x \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(x-s)^{1-2a_0}} = \\
 & = \gamma_0 [\mu_0 D_{-1,x}^{1-2a_0} \tau(q(x)) + \mu_1 D_{x,1}^{1-2a_0} \tau(q(x))] + \Psi_4(x), \quad x \in I, \tag{26}
 \end{aligned}$$

где

$$\Psi_4(x) = \Psi_3(x) + \mu_0 e^{b_0 \pi} \int_{-1}^x \frac{f'(s) ds}{(x-s)^{1-2a_0}} - \mu_0 e^{-b_0 \pi} \int_x^1 \frac{f'(s) ds}{(x-s)^{1-2a_0}} -$$

$$-\mu_1 b^{2-2a_0} e^{b_0\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(s) ds}{(1-bx-as)^{1-2a_0}} + \gamma_0 \mu_0 D_{-1,x}^{1-2a_0} f(x).$$

К уравнению (26) применим оператор интегрирования дробного порядка $\Gamma(1-2a_0)D_{-1,x}^{2a_0-1}$:

$$\begin{aligned} & (\mu_0 e^{b_0\pi} - \mu_1 e^{-b_0\pi}) \left(\int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^t \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(t-s)^{1-2a_0}} \right) - (\mu_0 e^{-b_0\pi} - \mu_1 e^{b_0\pi}) \left(\int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_t^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(s-t)^{1-2a_0}} \right) + \\ & + \mu_0 a^{1-2a_0} e^{-b_0\pi} \left(\int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-at-bs)^{1-2a_0}} \right) - \\ & - \mu_1 b^{1-2a_0} e^{b_0\pi} \left(\int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-bt-as)^{1-2a_0}} \right) = \\ & = \gamma_0 \Gamma(1-2a_0) [\mu_0 D_{-1,x}^{2a_0-1} D_{-1,x}^{1-2a_0} \tau(q(x)) - \mu_1 D_{-1,x}^{2a_0-1} D_{x,1}^{1-2a_0} \tau(q(x))] + \Psi_4(x), \quad x \in I. \end{aligned} \tag{27}$$

В силу легко проверяемых тождеств

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^t \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(t-s)^{1-2a_0}} = -\Gamma(2a_0)\Gamma(1-2a_0)\tau(q(x)), \\ & \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_t^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(s-x)^{1-2a_0}} = -\pi \operatorname{ctg}(2a_0\pi)\tau(q(x)) - \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1-2a_0} \frac{\tau(q(t)) dt}{t-x}, \\ & \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-at-bs)^{1-2a_0}} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+a-bs} \right)^{1-2a_0} \frac{b\tau(q(s)) ds}{1-ax-bs}, \\ & \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{2a_0}} \int_{-1}^1 \frac{b\tau'(q(s)) ds}{(1-bt-as)^{1-2a_0}} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+b-as} \right)^{1-2a_0} \frac{a\tau(q(s)) ds}{1-bx-as} \end{aligned}$$

запишем уравнение (27) в виде

$$\tau_1(x) - \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1-2a_0} \frac{\tau_1(t) dt}{t-x} = \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} + \lambda_2 \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as} + R_1[\tau_1] + \Psi_5(x), \quad x \in I, \tag{28}$$

где $\tau_1(x) = \tau(q(x))$, $\lambda_1 = -\mu_0 a^{1-2a_0} e^{-b_0\pi} / \lambda_0$, $\lambda_2 = \mu_1 b^{1-2a_0} e^{b_0\pi} / \lambda_0$,

$$R_1[\tau_1] = \lambda_1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+x}{1+a-bs} \right)^{1-2a_0} - 1 \right] \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} + \lambda_2 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+x}{1+b-as} \right)^{1-2a_0} - 1 \right] \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as}$$

— регулярный оператор, $\Psi_5(x) = \Psi_4(x) / \lambda_0$ — известная функция.

Уравнение (28) является сингулярным интегральным уравнением с нефредгольмовым оператором в правой части, так как в силу равенства $a+b=1$ ядра в точке $(x, s) = (1, 1)$ имеют изолированные особенности первого порядка (они выделены отдельно).

2.2. ВЫВОД И ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА

Запишем уравнение (28), считая пока его правую часть известной функцией, в виде

$$\tau_1(x) - \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau_1(t) dt}{t-x} = g(x), \quad x \in I, \tag{29}$$

где

$$g(x) = \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} + \lambda_2 \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as} + R_1[\tau_1] + \Psi_5(x), \quad x \in I. \tag{30}$$

Теорема 3. Если функция $g(x) \in L_p(I)$, $p > 1$, удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in I$, то для решения $\tau_1(x)$ уравнения (29) в классе функций $H(I)$ справедлива формула

$$\tau_1(x) = \frac{g(x)}{1+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^\delta \frac{g(t) dt}{t-x}, \tag{31}$$

где $\delta = \arctg(\lambda\pi)/\pi$.

Схему доказательства теоремы 3 см. в [9, с. 41].

Подстановка (30) в (31) даёт

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = & \frac{\lambda_1}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as} + \\ & + \frac{\lambda(1+x)^{1-2a_0-\delta}(1-x)^\delta}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \tau_1(s) ds \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\delta+2a_0-1}}{(1-t)^\delta} \left(\frac{\lambda_1}{1-at-bs} + \frac{\lambda_2}{1-bt-as} \right) \frac{dt}{t-x} + \\ & + R_2[\tau_1] + \Psi_6(x), \quad x \in I, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$R_2[\tau_1] = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2} R_1[\tau_1] + \frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^\delta \frac{R_1[\tau_1]}{t-x} dt$$

— регулярный оператор,

$$\Psi_6(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2} \Psi_5(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^\delta \frac{\Psi_5(t) dt}{t-x}$$

— известная функция.

Вычислим внутренний интеграл $A(x, s)$ в (32):

$$A(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\delta+2a_0-1}}{(1-t)^\delta} \left(\frac{\lambda_1}{1-bs-at} + \frac{\lambda_2}{1-as-bt} \right) \frac{dt}{t-x}. \tag{33}$$

В (33) рациональную часть подынтегрального выражения разложим на простые дроби и запишем его в виде

$$A(x, s) = \frac{\lambda_1}{1 - bs - ax} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\delta+2a_0-1}}{(1-t)^\delta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{a}{1-bs-at} \right) dt + \frac{\lambda_2}{1 - as - bx} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\delta+2a_0-1}}{(1-t)^\delta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{b}{1-as-bt} \right) dt. \tag{34}$$

Вычислим несобственные интегралы в (34). Имеют место формулы [12]

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{t-x} dt = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\beta\pi)}{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} - \frac{2^{\beta-1}B(\alpha, \beta-1)}{(1+x)^{1-\alpha}} F\left(\alpha, 1-\beta, 2-\beta; \frac{1-x}{2}\right),$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{1-bs-at} dt = \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} \frac{b^{\beta-1}a^{1-\alpha-\beta}}{(1+a+bs)^{1-\alpha}} \frac{1}{(1-s)^{1-\beta}} + \frac{B(\alpha, \beta-1)}{2^{2-\alpha-\beta}a} F\left(2-\alpha-\beta, 1, 2-\beta; -\frac{b(1-s)}{2a}\right), \tag{35}$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция Эйлера.

В силу (35) формулу (34) запишем как

$$A(x, s) = \frac{\lambda_1}{1 - bs - ax} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}(\delta\pi)}{(1+x)^{1-2a_0-\delta}(1-x)^\delta} + \frac{\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{b^{-\delta}a^{1-2a_0}}{(1+a+bs)^{1-2a_0-\delta}} \frac{1}{(1-s)^\delta} + R(b, a; x, s) \right] + \frac{\lambda_2}{1 - as - bx} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}(\delta\pi)}{(1+x)^{1-2a_0-\delta}(1-x)^\delta} + \frac{\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{a^{-\delta}b^{1-2a_0}}{(1+b+as)^{1-2a_0-\delta}} \frac{1}{(1-s)^\delta} + R(a, b; x, s) \right], \tag{36}$$

где

$$R(a, b; x, s) = \frac{B(\delta+2a_0, -\delta)}{2^{1-2a_0}} \left[F\left(1-2a_0, 1, 1+\delta; \frac{1-x}{2}\right) - F\left(1-2a_0, 1, 1+\delta; \frac{-a(1-s)}{2b}\right) \right],$$

$R(b, a; x, s)/(1 - bs - ax)$, $R(a, b; x, s)/(1 - as - bx)$ — регулярные ядра.

В силу (36) уравнение (32) примет вид

$$\tau_1(x) = \frac{\lambda_1(1 - \lambda\pi \operatorname{ctg}(\delta\pi))}{1 + \lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1 - ax - bs} + \frac{\lambda_2(1 - \lambda\pi \operatorname{ctg}(\delta\pi))}{1 + \lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\tau_1(s) ds}{1 - bx - as} + \frac{\lambda\lambda_1\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{a^{1-2a_0}}{b^\delta} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+a+bs}\right)^{1-2a_0-\delta} \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\delta \frac{\tau_1(s) ds}{1 - ax - bs} + \frac{\lambda\lambda_2\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{b^{1-2a_0}}{a^\delta} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+b+as}\right)^{1-2a_0-\delta} \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\delta \frac{\tau_1(s) ds}{1 - bx - as} + R_2[\tau_1] + \Psi_6(x), \quad x \in I, \tag{37}$$

где

$$R_2[\tau_1] = R_1[\tau_1] + \frac{\lambda\lambda_1(1+x)^{1-2a_0-\delta}(1-x)^\delta}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{R(b, a; x, s)\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} +$$

$$+ \frac{\lambda\lambda_2(1+x)^{1-2a_0-\delta}(1-x)^\delta}{1+\lambda^2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{R(a, b; x, s)\tau_1(s) ds}{1-bx-as}$$

— регулярный оператор.

Уравнение (37) с учётом равенства $1 - \lambda\pi \operatorname{ctg}(\delta\pi) = 0$ запишем в виде

$$\tau_1(x) = \frac{\lambda\lambda_1\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{a^{1-2a_0}}{b^\delta} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\delta \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} +$$

$$+ \frac{\lambda\lambda_2\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{b^{1-2a_0}}{a^\delta} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\delta \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as} + R_3[\tau_1] + \Psi_6(x), \quad x \in I, \tag{38}$$

где

$$R_3[\tau_1] = R_2[\tau_1] + \frac{\lambda\lambda_1}{\sin(\delta\pi)} \frac{a^{1-2a_0}}{b^\delta} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+x}{1+a+bs}\right)^{1-2a_0-\delta} - 1 \right] \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\delta \frac{\tau_1(s) ds}{1-ax-bs} +$$

$$+ \frac{\lambda\lambda_2}{\sin(\delta\pi)} \frac{b^{1-2a_0}}{a^\delta} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+x}{1+a+bs}\right)^{1-2a_0-\delta} - 1 \right] \frac{\tau_1(s) ds}{1-bx-as}$$

— регулярный оператор.

Уравнение (38) относительно неизвестной функции $\tau_1(x)$ не является фредгольмовым, так как ядра этого уравнения имеют изолированные особенности первого порядка в точке $(x, s) = (1, 1)$. С учётом равенств $1 - bx - as = b(1 - x) + a(1 - s)$, $1 - ax - bs = a(1 - x) + b(1 - s)$ в (38) сделаем замену переменных $x = 1 - 2e^{-y}$, $s = 1 - 2e^{-t}$ и введём обозначения [8]

$$\rho(y) = e^{-(1/2-\delta)y} \tau_1(1 - 2e^{-y}),$$

$$K_0(x) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{\lambda_1^*}{ke^{-x/2} + e^{x/2}} + \frac{\lambda_2^*}{e^{-x/2} + ke^{x/2}} \right), \quad k = \frac{a}{b},$$

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda\lambda_1\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{a^{1-2a_0}}{b^{1+\delta}}, \quad \lambda_2^* = \frac{\lambda\lambda_2\pi}{\sin(\delta\pi)} \frac{b^{-2a_0}}{a^\delta},$$

тогда оно примет вид

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} K_0(y-t)\rho(t) dt = R_5[\rho] + \Psi_7(y), \quad y \in [0, +\infty), \tag{39}$$

где $R_5[\rho] = e^{-(1/2-\delta)y} R_4[\rho]$ — регулярный оператор, $\Psi_7(y) = e^{-(1/2-\delta)y} \Psi_6(y)$ — известная функция. Уравнение (39) является интегральным уравнением Винера–Хопфа [13, с. 56]. Функция $K_0(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности, причём $K_0'(x) \in C[0, +\infty)$. Следовательно, $K_0(x) \in L_2 \cap H_\alpha$ [13, с. 12].

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки применимы лишь в случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Индексом уравнения (39) будет индекс выражения $1 - K^\wedge(x)$, взятый с обратным знаком: $\chi = -\text{Ind}(1 - K^\wedge(x))$ [13, с. 56], где

$$K^\wedge(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} K_0(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1^*}{et/2 + ke^{-t/2}} + \frac{\lambda_2^*}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} \right) e^{-ixt} dt. \quad (40)$$

Хорошо известно [10, с. 212], что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt} dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} = \frac{\pi e^{ix \ln k}}{\sqrt{k} \text{ch}(\pi x)}. \quad (41)$$

В силу равенства (41) из представления (40) легко получить

$$K^\wedge(x) = \frac{\pi(\lambda_1^* + \lambda_2^*) \cos(x \ln k)}{\sqrt{k} \text{ch}(\pi x)} - i \frac{\pi(\lambda_1^* - \lambda_2^*) \sin(x \ln k)}{\sqrt{k} \text{ch}(\pi x)}. \quad (42)$$

Из (42) в силу условия (16) получим

$$\frac{\pi(\lambda_1^* + \lambda_2^*)}{\sqrt{k}} = \frac{\lambda \pi^2}{\sqrt{k} \sin(\delta \pi)} \left(\lambda_1 \frac{a^{1-2a_0}}{b^{1+\delta}} + \lambda_2 \frac{b^{-2a_0}}{a^\delta} \right) = \frac{-\lambda \pi^2 \sqrt{b}}{\lambda_0 \sqrt{a} \sin(\delta \pi)} \left[\mu_0 \frac{a^{2-4a_0}}{b^{1+\delta} e^{b_0 \pi}} - \mu_1 \frac{b^{1-4a_0}}{a^\delta e^{-b_0 \pi}} \right] < 1. \quad (43)$$

В силу неравенства (43) из (42) следует неравенство $\text{Re}(1 - K^\wedge(x)) > 0$, причём $\text{Re} K^\wedge(x) = O(1/\text{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$.

Заметим, что аргумент комплексной переменной $z = x + iy$ равен $\arg z = \text{arctg}(y/x)$, если $\text{Re} z = x > 0$. Таким образом [13, с. 28], с учётом $\text{Re} K^\wedge(\pm\infty) = 0$, $\text{Im} K^\wedge(\pm\infty) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \chi &= -\text{Ind}(1 - K^\wedge(x)) = -\frac{1}{2\pi} [\arg(1 - K^\wedge(x))] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\text{arctg} \frac{\text{Im}(1 - K^\wedge(x))}{\text{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{2\pi} \left[\text{arctg} \frac{0}{1} - \text{arctg} \frac{0}{1} \right] = 0, \end{aligned}$$

т.е. изменение аргумента выражения $1 - K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю, индекс $\chi = 0$. Следовательно, уравнение (39) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое однозначно разрешимо.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект ФЗ-202009211).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирсабуров, М. Задача с условием Франкля и Бицадзе–Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом / М. Мирсабуров, У. Бобомуродов // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 730–737.

2. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739–740.
3. Франкль, Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения / Ф.И. Франкль // Прикл. математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 196–202.
4. Цзянь-бин, Л. О некоторых задачах Франкля / Л. Цзянь-бин // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. — 1961. — Т. 3, № 13. — С. 28–39.
5. Девингталь, Ю.В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля / Ю.В. Девингталь // Изв. вузов. Математика. — 1958. — № 2. — С. 39–51.
6. Капустин, Н.Ю. О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа / Н.Ю. Капустин, К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 60–68.
7. Рузиев, М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами / М.Х. Рузиев // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 7. — С. 18–29.
8. Мирсабуров, М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках / М. Мирсабуров // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 9. — С. 1281–1284.
9. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1985. — 304 с.
10. Салахитдинов, М.С. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами / М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. — Ташкент : Университет, 2005. — 224 с.
11. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
12. Мирсабуров, М. Об одном обобщении задачи Трикоми / М. Мирсабуров, О. Бегалиев, Н.Х. Хуррамов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 8. — С. 1117–1126.
13. Гахов, Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов. — М. : Наука, 1978. — 295 с.

ON A NON-LOCAL PROBLEM FOR THE GELLERSTEDT EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

M. Mirsaburov¹, R. N. Turaev²

Termez State University, Uzbekistan
e-mail: ¹*mirsaburov@mail.ru*, ²*rasul.turaev@mail.ru*

The question of the unambiguous solvability of a non-local boundary value problem with conditions of the Bitsadze–Samarskii and Frankl type for a mixed type equation with singular coefficients is investigated.

Keywords: mixed type equation, singular coefficient, Bitsadze–Samarsky condition, Frankl condition, singular integral equation, non-Fredholm operator, Wiener–Hopf integral equation, Fredholm equation of the second kind.

FUNDING

This work was carried out with the support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan (project no. FZ-202009211).

REFERENCES

1. Mirsaburov, M. and Bobomurodov, U.E., Problem with Frank and Bitsadze–Samarskii conditions on the degeneration line and on parallel characteristics for the gellerstedt equation with a singular coefficient, *Differ. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 737–744.
2. Bitsadze, A.V. and Samarskii, A.A., О некоторих prosteyshix obobsheniyax lineynix ellipticheskix krayevix zadach (Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems), *Dokl. Akademii Nauk*, 1969, vol. 185, no. 4, pp. 739–740.

3. Frankl, F.I., Obtekaniye profily gazom s mestnoy sverkhzvukovoy zonoй, okanchivayusheysya pryamim skachkom uplotneniya (Subsonic flow about a profile with a supersonic zone), *Prikl. Mat. Mekh.*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 196–202.
4. Jianbing, L., O nekotorykh zadachax Franklya (On some Frankl' problems), *Vestn. Leningr. Univ. Mat.*, 1961, vol. 3, no. 13, pp. 28–39.
5. Devingtal, Yu.V., O sushestvovanii i yedinstvennosti resheniya odnoy zadachi (On the existence and uniqueness of the solution to the Frankl problem), *Izv. vuzov. Math.*, 1958, no. 2, pp. 39–41.
6. Kapustin, N.Yu., On the solution of one problem in the theory of the Frankl problem for equations of mixed type, *Differ. Equat.*, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 60–68.
7. Ruziev, M.X., Boundary value problem for a mixed-type equation with singular coefficients, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 7, pp. 14–24.
8. Mirsaburov, M., A boundary value problem for a class of mixed equations with the Bitsadze–Samarskii condition on parallel characteristics, *Differ. Equat.*, 2001, vol. 37, no. 6, pp. 1349–1353.
9. Smirnov, M.M., *Uravneniye smeshannogo tipa* (Equations of Mixed Type), Moscow: Nauka, 1981.
10. Salakhitdinov, M.S. and Mirsaburov, M., *Nelokalniye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa s singulyarnimi koeffitsientami* (Nonlocal Problems for Equations of Mixed Type with Singular Coefficients), Tashkent: Universitet, 2005.
11. Bitsadze, A.V., *Nekotoriye klassi uravneniy v chastnix proizvodnix* (Some Classes of Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
12. Mirsaburov, M., Begaliev, O., and Khurramov, N.K., Generalization of the Tricomi problem, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1084–1093.
13. Gahov, F.D., *Uravneniya tipa svertki* (Equations of Convolution Type), Moscow: Nauka, 1978.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ МАКСВЕЛЛА С МЕЗОСКОПИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© Ю. А. Еремин¹, В. В. Лопушенко²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**e-mail: ¹eremin@cs.msu.ru, ²lopushnk@cs.msu.ru**Поступила в редакцию 29.02.2024 г., после доработки 03.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.*

Разработан, обоснован и реализован численный метод решения граничной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла с мезоскопическими граничными условиями, в основе которого лежит метод дискретных источников. Проведён численный анализ влияния поверхностных квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц. Установлено, что поверхностные эффекты оказывают значимое влияние на характеристики полей, при этом результаты для них существенно отличаются от полученных для случая объёмных эффектов.

Ключевые слова: метод дискретных источников, мезоскопическое граничное условие, плазмонный резонанс.

DOI: 10.31857/S0374064124080083, EDN: KCOIAJ

ВВЕДЕНИЕ

Наноплазмонные структуры находят широкое применение в различных практических приложениях, например, в медицине, биологии, солнечной энергетике, при разработке плазмонного нанолазера и др. В их основе лежит явление плазмонного резонанса (ПР), который заключается в возрастании амплитуды поля вблизи структуры на несколько порядков при определённой частоте внешнего возбуждения. Кроме того, плазмонные поля обладают уникальным свойством, существенно отличающим их от фотонных: они концентрируются вблизи структуры на расстояниях, намного превышающих рэлеевский предел. Именно эти особенности в основном используются на практике.

Современные технологии позволяют синтезировать структуры заданных формы и состава с размерами металлических элементов менее 10 нм [1]. В этом случае в металле начинают проявляться квантовые эффекты, такие как пространственная нелокальность, выброс электронов за поверхность металла, затухание Ландау и туннельный эффект [2]. Классическая теория Максвелла не позволяет строго описывать оптические свойства подобных структур. Учёт подобных квантовых эффектов необходим для правильного понимания принципов функционирования современных наноплазмонных устройств.

С целью описания объёмного эффекта пространственной нелокальности были разработаны гидродинамическая теория Друде и её обобщение — теория обобщённого нелокального оптического отклика (GNOR) [3]. Она объясняет возникающие новые оптические эффекты, которые могут существенно искажать картину, предсказанную классической теорией Максвелла, например, такие как снижение амплитуды ПР и его сдвиг в область коротких длин волн. Вместе с тем теория GNOR не допускает возможности выхода электронов за

пределы металла. Это обстоятельство в значительной степени стимулировало поиск новой теории, описывающей квантовые эффекты, оставаясь в рамках классической теории Максвелла. Она появилась в последние годы и получила название *мезоскопической теории* (МТ) [4, 5]. МТ ориентирована на анализ поверхностных квантовых эффектов, для чего используются функции поверхностного отклика — параметры Фейбельмана, и позволяет описать такие квантовые эффекты как выброс электронов за пределы металла и затухание Ландау. Считается, что МТ является неким синтезом между чисто квантовым и классическим описаниями происходящих явлений в наноплазмонике.

Нами разработан и реализован подход, позволяющий проводить анализ влияния поверхностных квантовых эффектов на оптические характеристики рассеяния. В основу численного метода положен метод дискретных источников (МДИ) [6, 7].

1. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим математическую постановку граничной задачи дифракции поля электромагнитной плоской волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на однородной осесимметричной плазмонной наночастице. Пусть частица занимает область D_i с гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\alpha)}$, а неограниченную внешнюю область обозначим D_e . Будем предполагать, что все среды внутри и вне этой поверхности являются немагнитными, а зависимость от времени выбрана в виде $\exp\{j\omega t\}$. В этом случае математическая постановка задачи дифракции для полного поля $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ внутри D_i и рассеянного поля $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ во внешней области D_e может быть записана как [7]

$$\nabla \times \mathbf{H}_{i,e} = -jk\varepsilon_{i,e}\mathbf{E}_{i,e}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{i,e} = -jk\mathbf{H}_{i,e} \quad \text{в } D_{e,i}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) &= -d_{\perp} \mathbf{n}_i \times \nabla \{\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P))\}, \quad P \in \partial D_i, \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) &= -j\omega d_{\parallel} \{\mathbf{n}_i \times [\mathbf{D}_i(P) - \mathbf{D}_e(P) - \mathbf{D}_0(P)]\} \times \mathbf{n}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0, \quad r = |\mathbf{M}|. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{i,e}$ — диэлектрические проницаемости сред в областях $D_{i,e}$, при этом $\text{Im } \varepsilon_e = 0$, $\text{Im } \varepsilon_i \leq 0$, $k = \omega/c$, d_{\perp} , d_{\parallel} — параметры Фейбельмана, \mathbf{n}_i — единичная нормаль к поверхности ∂D_i , $\mathbf{D}_{i,e,0}$ — векторы электрического смещения. Параметры d_{\perp} , d_{\parallel} представляют собой комплексные функции, зависящие от длины падающей волны; для плоского интерфейса $y = \text{const}$ они определяются как

$$d_{\perp}(\omega) = \frac{\int \rho(x, \omega) x dx}{\int \rho(x, \omega) dx}, \quad d_{\parallel}(\omega) = \frac{\int \partial_x J_y(x, \omega) x dx}{\int \partial_x J_y(x, \omega) dx},$$

где $\rho(x, \omega)$ — плотность индуцированных поверхностных зарядов, $J_y(x, \omega)$ — плотность поверхностных токов. Отметим, что для случая границы раздела сред металл–диэлектрик параметр Фейбельмана $d_{\parallel} = 0$ [2]. Будем полагать, что граничная задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение. Для случая сферы это установлено в работе [8].

2. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Метод дискретных источников является численно-аналитическим методом, в рамках которого приближённое решение строится на основе полей дискретных источников, удовлетворяющих в аналитическом виде системе Максвелла (1) и условиям излучения (3) [6]. Соответствующие амплитуды дискретных источников (ДИ) определяются из мезоскопических граничных условий (2). Следует подчеркнуть, что МДИ весьма удобен для решения задачи рассеяния с мезоскопическими граничными условиями, так как поля вблизи поверх-

ности частицы представляют собой аналитические функции и, следовательно, допускают вычисление производных любого типа и порядка на её поверхности.

Прежде чем переходить к построению приближённого решения граничной задачи (1)–(3), остановимся на некоторых фундаментальных результатах МДИ.

Теорема 1. Пусть задан рассеиватель D с гладкой замкнутой поверхностью $S \in C^{(2,\alpha)}$, внутри D выбраны начало координат и множество точек $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, расположенных на отрезке оси Oz , при этом данное множество имеет хотя бы одну точку сгущения z_0 (внутри D). Тогда системы “электрических” $\nabla \times \nabla \times \{Y_{mn}(M)\mathbf{e}_\zeta\}$ и “магнитных” $\nabla \times \{Y_{mn}(M)\mathbf{e}_\zeta\}$ векторных мультиполей полны и замкнуты в пространстве $L_2^T(S)$.

Здесь $Y_{mn}(M) = h_m^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) P_m^m(\cos \theta_{z_n}) \exp\{jm\varphi\}$ — мультиполи низшего порядка, рас­пределённые по отрезку оси; \mathbf{e}_ζ — орты декартова базиса, $\zeta = x, y, z$; $L_2^T(S) = L_2(S) \times L_2(S)$ — пространство функций, определённых в касательной плоскости.

Доказательство см. в работе [9, с. 948].

Следствие. Линейная комбинация полей электрических и магнитных мультиполей полна и замкнута в пространстве $L_2^T(S)$ на поверхности S .

Доказательство этого утверждения очевидно: достаточно выписать уравнения замкнутости [10].

При рассмотрении осесимметричных структур в вычислительной схеме МДИ источники как для внешнего $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$, так и для внутреннего $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ полей располагаются на оси симметрии, а приближённое решение $\{\mathbf{E}_e^N, \mathbf{H}_e^N\}$ представляет собой конечную сумму ряда Фурье по азимутальной переменной φ [11]. С помощью разложения поля плоской волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ в ряд Фурье по φ процедура удовлетворения граничным условиям (2) на поверхности ∂D_i сводится к последовательным сшиваниям гармоник фурье-полей на образующей поверхности вращения [6].

Будем рассматривать возбуждение осесимметричного рассеивателя D_i с гладкой поверхностью ∂D_i линейно-поляризованной плоской волной, распространяющейся под углом $\pi - \theta_0$ к оси Oz . Как известно, поле плоской волны можно построить на основе двух базовых поляризаций P и S :

$$\mathbf{E}_0^P = (\mathbf{E}_x \cos \theta_0 + \mathbf{E}_z \sin \theta_0)\chi(x, z), \quad \mathbf{H}_0^P = -\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_y \chi(x, z), \tag{4}$$

$$\mathbf{E}_0^S = \mathbf{E}_y \chi(x, z), \quad \mathbf{H}_0^S = \sqrt{\varepsilon_e} (\mathbf{E}_x \cos \theta_0 + \mathbf{E}_z \sin \theta_0)\chi(x, z), \tag{5}$$

где $\chi(x, z) = \exp\{-jk_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}$, $k_e = k\sqrt{\varepsilon_e}$, $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z)$ — декартов базис.

Очевидно, что эти поля ортогональны на поверхности вращения ∂D_i . В этом легко убедиться, используя разложение плоской волны в ряд Фурье вида

$$\exp\{-jk_e x \sin \theta_0\} = \sum_{m=0}^\infty (2 - \delta_{0m}) (-j)^m J_m(k_e \rho \sin \theta_0) \cos(m\varphi). \tag{6}$$

Поскольку поверхность ∂D_i обладает осевой симметрией, то при распределении мультиполей на оси симметрии Oz их линейная комбинация будет представлять конечную сумму ряда Фурье по переменной φ .

Введём в рассмотрение векторные потенциалы

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = Y_{mn} \cos(m\varphi) \mathbf{E}_x - Y_{mn} \sin(m\varphi) \mathbf{E}_y, \quad \mathbf{A}_{mn}^{(2)} = Y_{mn} \sin(m\varphi) \mathbf{E}_x + Y_{mn} \cos(m\varphi) \mathbf{E}_y,$$

здесь (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, а

$$Y_{mn}(M) = h_m^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) \left(\frac{\rho}{R_{Mz_n}}\right)^m.$$

Легко видеть, что $\mathbf{A}_{mn}^{(1)}$ и $\mathbf{A}_{mn}^{(2)}$ ортогональны на поверхности ∂D_i .

Утверждение. *Линейная комбинация полей электрических и магнитных мультиполей вида $\mathbf{V}_{mn}^{(1,2)} = c_1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(1)} + c_2 \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(2)}$ ортогональна полю S -поляризованной плоской волны на поверхности ∂D_i , т.е. $\int_{\partial D_i} \mathbf{V}_{mn}^{1,2} \mathbf{E}_0^S d\sigma = 0$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно подставить разложение плоской волны (6) в выражение для поля (5), а векторные потенциалы $\mathbf{A}_{mn}^{(1,2)}$ записать в виде

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = Y_{mn} \cos((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\rho - Y_{mn} \sin((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\varphi, \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)} = Y_{mn} \sin((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\rho + Y_{mn} \cos((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\varphi, \tag{8}$$

где $(\mathbf{E}_\rho, \mathbf{E}_\varphi, \mathbf{E}_z)$ — базис цилиндрической системы координат. Утверждение доказано.

Аналогично может быть установлена ортогональность $\mathbf{V}_{mn}^{(2,1)}$ полю \mathbf{E}_0^P .

Будем строить представления для полей в виде линейной комбинации электрических и магнитных мультиполей отдельно для P - и S -поляризаций на основе потенциалов (7), (8). Представление для электрического поля в случае P -поляризации примет вид

$$\mathbf{E}_e^N = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \left\{ p_{mn}^e \frac{j}{k\varepsilon_e} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(1)} + q_{mn}^e \frac{j}{\varepsilon_e} \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(2)} \right\} + \sum_{n=1}^N r_n^e \frac{j}{k\varepsilon_e} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_n^{(3)},$$

где $\mathbf{A}_n^{(3)} = Y_{0n}(M, z_n) \mathbf{E}_z$. Появление последнего члена обусловлено независимой от φ составляющей по оси Oz .

Покажем полноту и замкнутость системы вертикальных электрических диполей, располагающихся на оси, в классе полей, не зависящих от φ . В этом случае задача сводится к скалярной задаче в полуплоскости [12, с. 27–29].

Лемма. *Система $\{Y_{0n}(M)\}_{n=1}^\infty$ замкнута в пространстве $L_2(\gamma)$, где γ — образующая поверхности вращения ∂D_i .*

Доказательство. Предположим, что существует функция $f(\eta)$, не равная тождественно нулю, для которой имеет место формула

$$\Phi(M) = \int_{\zeta} h_0^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) f(\eta) dl = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Напомним, что $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ имеет точку сгущения z_0 внутри D_i , выберем в ней начало координат. Тогда существует такая окрестность g этой точки z_0 , которая целиком лежит внутри D_i . В окрестности g функция $\Phi(M)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и имеет место представление

$$\Phi(M) = \sum_{l=0}^\infty a_l j_l(k_e r) P_l(\cos \theta).$$

Опустим точку M на ось z , полагая при этом $\cos \theta = 1$. Тогда

$$\Phi(M) = \sum_{l=0}^\infty a_l j_l(k_e z).$$

Устремляя z к нулю, будем иметь $a_0 = 0$. Далее, поделив оставшийся ряд на z и устремив z к нулю, последовательно получим, что все $a_l = 0$, $l = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\Phi(M) \equiv 0$ на всём отрезке оси z . Доказательство завершается использованием результатов теоремы 2 из [11].

Суммируя изложенное выше, сформулируем следующий основной результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда поле P поляризованной плоской волны (4) для любого угла падения θ_0 на поверхности вращения ∂D_i может быть приближено с любой точностью полями мультиполей в пространстве $L_2^-(\partial D_i)$, т.е. для любого $\delta > 0$ существуют N и такие коэффициенты $\{p_{mn}^e, q_{mn}^e, r_n^e\}$, что

$$\|\mathbf{e}_e^N - \mathbf{e}_0^P\|_{L_2^-(\partial D_i)} \leq \delta.$$

Замечание. Аналогично строится представление для внутреннего поля в D_i [11].

Таким образом, приближённое решение в рамках МДИ может быть записано в виде [7]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\xi^N \\ \mathbf{H}_\xi^N \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_m^\xi} \left\{ p_{mn}^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(1)\xi} + q_{mn}^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_2^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(2)\xi} \right\} + \sum_{n=1}^{N_m^\xi} r_n^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(3)\xi}, \quad \xi = e, i. \quad (9)$$

Здесь

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi = \begin{pmatrix} \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \nabla \times \nabla \times \\ -\frac{1}{\varepsilon_\xi} \nabla \times \end{pmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_2^\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_\xi} \nabla \times \\ \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \nabla \times \nabla \times \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)\xi} = \{Y_m^\xi(\eta, z') \cos((m+1)\varphi), -Y_m^\xi(\eta, z') \sin((m+1)\varphi), 0\},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)\xi} = \{Y_m^\xi(\eta, z') \sin((m+1)\varphi), Y_m^\xi(\eta, z') \cos((m+1)\varphi), 0\},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(3)\xi} = \{0, 0, Y_0^\xi(\eta, z')\}, \quad \eta = (\rho, z),$$

$$Y_m^e(\eta, z') = h_m^{(2)}(k_e R_{\eta z'}) \left(\frac{\rho}{R_{\eta z'}}\right)^m, \quad Y_m^i(\eta, z') = j_m(k_i R_{\eta z'}) \left(\frac{\rho}{R_{\eta z'}}\right)^m,$$

(ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, z' — точка источника, располагающегося на оси вращения Oz внутри D_i , $h_m^{(2)}$ — сферическая функция Ханкеля, удовлетворяющая условиям излучения, j_m — сферическая функция Бесселя. Легко видеть, что приближённое решение (9) удовлетворяет системе уравнений Максвелла (1) и условиям излучения (3).

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Рассмотрим сначала локальный случай ($d_\perp = 0$). Отметим, что векторные потенциалы $\mathbf{A}_{mn}^{(2,3)\xi}$ выбраны таким образом, чтобы согласовать их зависимость от азимутальной переменной φ с зависимостью фурье-гармоник плоской волны (6) после разложения поля в ряд Фурье. Это обстоятельство позволяет свести задачу аппроксимации поля плоской волны на поверхности вращения к задаче аппроксимации фурье-гармоник полей на образующей поверхности вращения [6]. Таким образом, соответствие между гармониками Фурье на образующей поверхности вращения может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} W_m^i & X_m^i & -W_m^e & -X_m^e \\ U_m^i & V_m^i & -U_m^e & -V_m^e \\ -X_m^i & W_m^i & X_m^e & -W_m^e \\ -V_m^i & U_m^i & V_m^e & -U_m^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m^i \\ q_m^i \\ p_m^e \\ q_m^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}_m^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_m^0 \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Строки матрицы соответствуют компонентам полей $E_\tau, E_\varphi, H_\tau, H_\varphi$, где $\boldsymbol{\tau} = (\alpha, 0, \beta)$ — единичный касательный вектор к образующей поверхности ∂D_i . Соответствующие матричные элементы определяются по формулам

$$W_m^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[\alpha k_\xi^2 (Y_{m+2}^\xi + Y_m^\xi) - \alpha k_\xi \frac{m+1}{\rho} Y_{m+1}^\xi + \beta k_\xi^2 \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+2}^\xi \right], \quad X_m^\xi = \frac{k_\xi}{\varepsilon_\xi} Y_{m+1}^\xi \left[\alpha \frac{z-z'}{\rho} - \beta \right],$$

$$U_m^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[\frac{m+1}{\rho} k_\xi Y_{m+1}^\xi - k_\xi^2 Y_m^\xi \right], \quad V_m^\xi = \frac{k_\xi}{\varepsilon_\xi} \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+1}^\xi.$$

Компоненты в правой части (10) записываются как

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0 = e_m \{ \alpha \cos \theta_0 S_m^- - 2j\beta \sin \theta_0 J_{m+1}(\kappa) \},$$

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0 = e_m \cos \theta_0 S_m^+, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}_m^0 = -e_m \alpha n_e S_m^+, \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_m^0 = -e_m n_e S_m^-,$$

где

$$S_m^\pm = J_m(\kappa) \pm J_{m+2}(\kappa), \quad \kappa = k_e \rho \sin \theta_0, \quad e_m = (-j)^m \exp\{jk_e \rho \cos \theta_0\}, \quad n_e = \sqrt{\varepsilon_e}.$$

Рассмотрим независящую от φ гармонику, соответствующую последнему слагаемому в представлении для полей (9). Отметим, что она вносит основной вклад в поле дифракции для угла падения плоской волны $\theta_0 = 90^\circ$. В данном случае матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} W^i & -W^e \\ U^i & -U^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^i \\ r^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

соответствующие элементы матрицы

$$W^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[\alpha k_\xi^2 \frac{z-z'}{\rho} Y_2^\xi - \beta \left(\frac{1}{\rho} k_\xi^2 Y_1^\xi + \left(\frac{z-z'}{\rho} \right)^2 k_\xi^2 Y_2^\xi + k_\xi^2 Y_0^\xi \right) \right], \quad U^\xi = k_\xi Y_1^\xi,$$

а

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}^0 = e_0 [j\alpha \cos \theta_0 J_1(\kappa) - \beta \sin \theta_0 J_0(\kappa)], \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}^0 = -je_0 J_1(\kappa).$$

Перейдём теперь к анализу мезоскопического граничного условия

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0^P(P)) = -d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0^P(P)) \}, \quad P \in \partial D_i.$$

Перепишем его в виде

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{B} + d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B} \} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e - \mathbf{E}_0^P.$$

Оно также может быть записано в виде двух скалярных уравнений:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} + d_\perp \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{B} + d_\perp \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (12)$$

Учитывая специфическую зависимость поля \mathbf{E} от переменной φ для гармоник $m = 0, 1, 2, \dots$, последнее соотношение принимает вид

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{B} - d_\perp \frac{m+1}{\rho} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (13)$$

Из сказанного выше ясно, что добавки за счёт параметра Фейбельмана возникают только в первой и второй строках матрицы (10).

Вычисления организуем следующим образом.

1. В (13) необходимо найти $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_\xi$. Для этого в представлении W_m^ξ достаточно выполнить замену $\boldsymbol{\tau} = (\alpha, 0, \beta)$, $\mathbf{n} = (\beta, 0, -\alpha)$ и умножить на $d_\perp(m+1)/\rho$. Аналогично поступаем с добавкой к правой части $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0$.

2. В первом соотношении (12) используем выражение для W_m^ξ , полученное на предыдущем этапе. При вычислении касательной производной $\partial/\partial\tau$ следует учесть, что для элементов матрицы имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\rho} Y_m^\xi = \frac{m}{\rho} Y_m^\xi - k_\xi Y_{m+1}^\xi, \quad \frac{\partial}{\partial z} Y_m^\xi = -k_\xi \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+1}^\xi.$$

Аналогично вычисляется добавка к правой части $\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0$.

3. Такие же преобразования проводятся со второй строкой матрицы (11).

Для определения неизвестных амплитуд дискретных источников $\mathbf{p} = \{p_m^i, q_m^i, p_m^e, q_m^e\}$ используем обобщённый метод коллокаций [13], поточечно сшивая гармоники Фурье-полей на образующей поверхности вращения. При этом количество точек коллокации L остаётся одинаковым для всех гармоник Фурье, а число дискретных источников N_m^ξ может быть разным для внутреннего и внешнего полей и зависит от номера гармоники m . Как правило, выполняется соотношение $N_m^i + N_m^e < L$, т.е. системы (10), (11) оказываются переопределёнными. Вектор амплитуд ДИ вычисляется с помощью факторизации матрицы с последующим вычислением псевдорешения [14, с. 78–80]. Определив амплитуду ДИ, можно проверить точность полученного приближённого решения посредством вычисления невязки полей на поверхности рассеивателя. Невязка, вычисляемая в точках, промежуточных по отношению к точкам коллокации, служит надёжным критерием сходимости приближённого решения [13].

При проведении расчётов нас будет интересовать сечение экстинкции, которое показывает, какая часть энергии плоской волны уходит на рассеяние и поглощение частицей. Сечение экстинкции вычисляется по диаграмме направленности рассеянного поля [15, с. 130–131], компоненты которой применительно к решению (9) принимают вид

$$\begin{aligned} F_\theta(\theta, \varphi) &= jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \cos((m+1)\varphi) \sum_{n=1}^{N_m^e} (p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e) \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\} - \\ &\quad - jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^e} r_n^e \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}, \\ F_\varphi(\theta, \varphi) &= -jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \sin((m+1)\varphi) \sum_{n=1}^{N_m^e} (p_{mn}^e + q_{mn}^e \cos \theta) \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}. \end{aligned}$$

Сечение экстинкции в этом случае находится как

$$\sigma_{\text{ext}}(\theta_0) = -\frac{4\pi}{k_e} \text{Im} F_\theta(\pi - \theta_0, \pi). \quad (14)$$

Отметим, что согласно результатам [16] сечение рассеяния, входящее в сечение экстинкции, также может быть представлено в аналитическом виде.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем рассматривать частицы сфероидальной формы (“нанорисинки”), расположенные во внешней прозрачной среде — стекле с показателем преломления $n_e = 1.52$. В качестве веществ

выберем плазмонные металлы — золото (Au) и серебро (Ag). Для того чтобы определить значение параметра Фейбельмана, будем использовать аналитическое выражение [17]

$$d_{\perp}(\omega) = -j \frac{\varepsilon_i \varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_e} \frac{\beta}{\omega_p \sqrt{\varepsilon_b}} \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_i} - 1 \right)^{3/2}.$$

Здесь $\varepsilon_b = \varepsilon_i + \omega_p^2 / (\omega^2 - j\gamma\omega)$, ω_p — плазменная частота металла, $\beta^2 = 3v_F^2/5$, v_F — скорость Ферми, γ — скорость затухания Друде. Результаты расчёта по этой формуле хорошо коррелируют с экспериментальными значениями, полученными для случая интерфейса “золото” или “серебро-вакуум” [18].

Квантовые параметры для золота и серебра выберем в соответствии с [19]:

Au: $\hbar\omega_p = 9.02$ эВ, $\hbar\gamma = 0.071$ эВ, $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}$ мкм/с.

Ag: $\hbar\omega_p = 8.99$ эВ, $\hbar\gamma = 0.025$ эВ, $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}$ мкм/с.

Кроме сечения экстинкции (14) нас будет интересовать интегральный коэффициент усиления (КУ) поля на поверхности частицы $F(\lambda)$, наиболее ярко демонстрирующий различия во влиянии поверхностных и объёмных эффектов на характеристики рассеяния [7]:

$$F(\lambda) = \frac{\int_{\partial D_i} |\mathbf{E}_N^e + \mathbf{E}^0|^2 d\sigma}{\int_{\partial D_i} |\mathbf{E}^0|^2 d\sigma}. \quad (15)$$

На рис. 1 приведены значения сечения экстинкции для золотой сферы диаметром $D = 10$ нм со значениями параметра Фейбельмана $d_{\perp} = \pm 0.5$ нм. Кривые демонстрируют результаты, полученные с помощью МДИ, а точки — результаты теории Ми [8] с использованием граничных условий МТ. Отметим полное соответствие результатов МДИ и теории Ми. Для сравнения приведены также результаты, соответствующие локальному случаю (LRA) $d_{\perp} = 0$ (кривая 3). В то же время наблюдается существенное различие между графиками, соответствующими ненулевым значениям параметра Фейбельмана: при $d_{\perp} = +0.5$ нм максимальное значение функции кривой оказывается почти вдвое больше, чем у функции кривой LRA, при этом максимум смещается в сторону длинных волн; при $d_{\perp} = -0.5$ нм график, наоборот, имеет сниженное значение максимума, который при этом сдвигается в сторону коротких волн. Подобная ситуация не является неожиданной, так как при положительных значениях d_{\perp} электронное облако “выходит” за поверхность частицы, увеличивая её объём, в то время как отрицательные значения d_{\perp} означают “вдавливание” облака внутрь частицы, что как бы уменьшает её размер. Следует отметить, что благородные металлы (Au, Ag, Pt) характеризуются отрицательными значениями действительной части параметров Фейбельмана [18].

На рис. 2 приведены результаты расчётов для сечения экстинкции (14) золотых вытянутых сфероидов эквиобъёмного диаметра $D = 10$ нм с соотношением осей $r = 2, 3$ при угле падения волны $\theta_0 = 90^\circ$. Видно, что при увеличении вытянутости частицы с сохранением её объёма растёт соотношение между площадью поверхности и объёмом. Сравнение влияния объёмных (GNOR) и поверхностных (МТ) эффектов показывает существенные различия в амплитудах ПР — в более чем два раза, причём если сдвиг в область коротких волн для МТ составляет 10 нм, то для GNOR он близок к 20 нм.

Ещё большее различие в проявлениях поверхностных и объёмных эффектов можно наблюдать при анализе КУ ближнего поля (15) на рис. 3, а для таких же сфероидов — в амплитудах достигает пяти раз при тех же сдвигах в спектральной области, что на рис. 2. Это обстоятельство не является неожиданным, так как представленные результаты относятся непосредственно к ближнему полю. Значительное влияние поверхностных эффектов

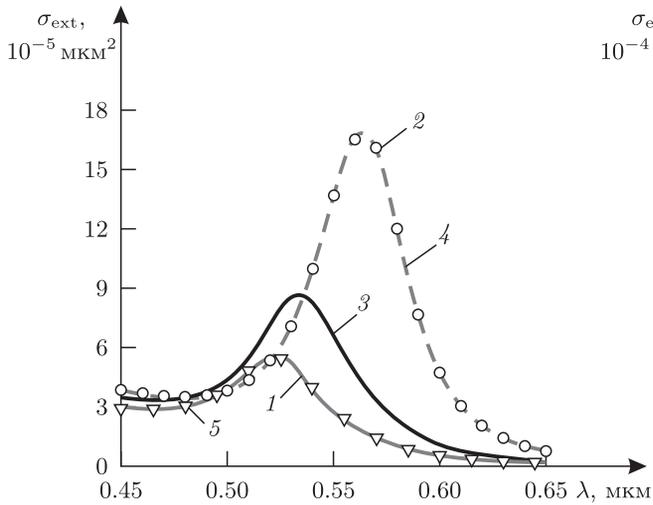


Рис. 1. Сечение экстинкции золотой сферы: 1, 2 — $d = -0.5$ нм; 3 — $d = 0$ нм; 4, 5 — $d = +0.5$ нм.

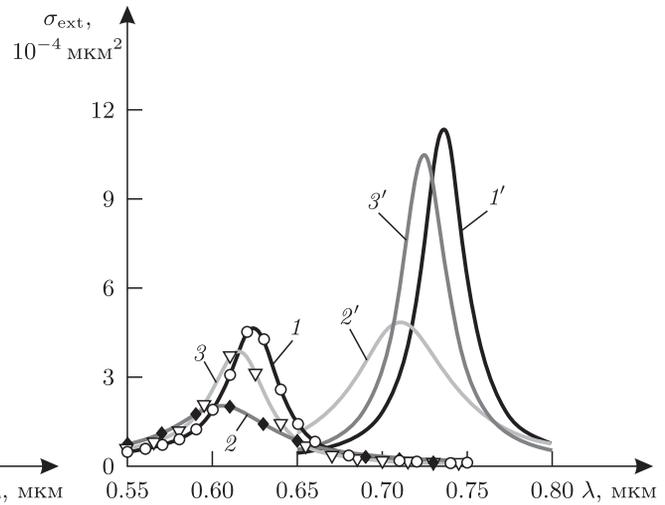


Рис. 2. Сечение экстинкции вытянутых золотых сфероидов: 1–3 — $r = 2$; 1'–3' — $r = 3$; 1, 1' — LRA; 2, 2' — GNOR; 3, 3' — МТ.

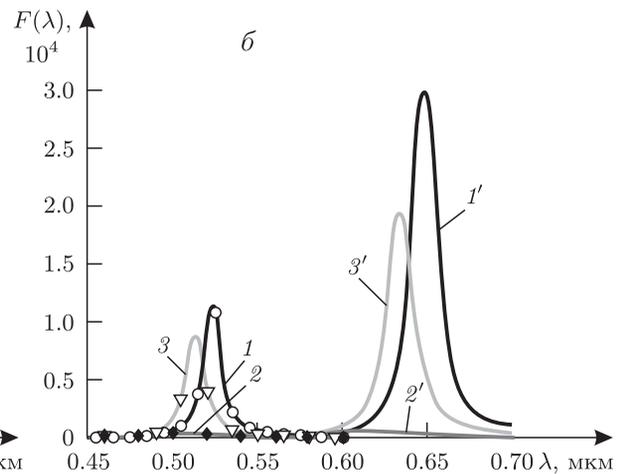
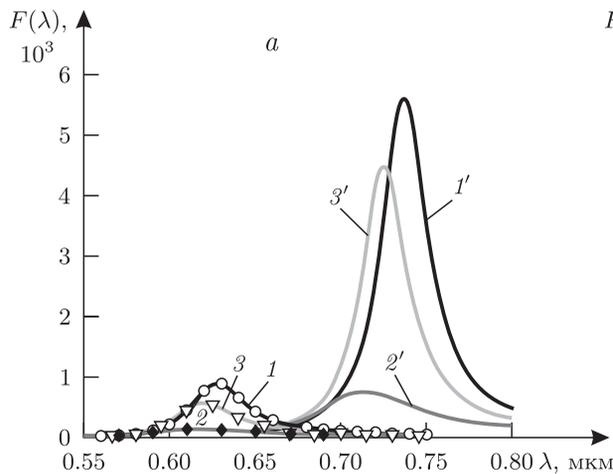


Рис. 3. Коэффициент усиления поля на поверхности вытянутых золотых (а) и серебряных (б) сфероидов: 1–3 — $r = 2$; 1'–3' — $r = 3$; 1, 1' — LRA; 2, 2' — GNOR; 3, 3' — МТ.

можно также наблюдать на рис. 3, б, где построены кривые КУ для аналогичных серебряных частиц. В этом случае различие в амплитудах GNOR и МТ становится ещё больше и достигает 30 раз при сдвиге в спектральной области — около 10 нм для МТ и 35 нм для GNOR.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку МТ появилась недавно, авторы имеющихся публикаций рассматривают лишь частицы сферической формы, для которых существует аналитическое решение на основе теории Ми [8]. Вместе с тем в наноплазмонике зачастую применяются и общие подходы, связанные с использованием поверхностных интегральных уравнений [20]. В методе поверхностных интегральных уравнений применительно к граничной задаче (1)–(3) возможно, за счёт поверхностной дивергенции, получение уравнения с более сильной, чем в классическом локальном случае [21], особенностью в ядре.

Сформулируем основные результаты работы.

1. На основе обобщения метода дискретных источников разработан и реализован численный метод решения задач дифракции плоской волны на плазмонных наночастицах, расположенных в плотной внешней среде, в котором используются мезоскопические граничные условия, позволяющие моделировать поверхностные квантовые эффекты в наночастицах. Представлено обоснование метода, подробно описана его вычислительная схема.

2. Обобщённый метод применён к анализу плазмонных “нанорисинков”. Проведён сравнительный анализ влияния объёмных и поверхностных эффектов на рассеивающие свойства наночастиц. Установлено существенное (в десятки раз по амплитуде) различие в проявлениях объёмных и поверхностных эффектов, особенно заметное в случае вытянутых сфероидальных частиц при анализе полей вблизи их поверхностей. Обнаружен значительный сдвиг в спектральной области.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications / H. Shi, X. Zhu, S. Zhang [et al.] // *Nanoscale Adv.* — 2021. — V. 3. — P. 4349–4369.
2. Stamatopoulou, P.E. Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited] / P.E. Stamatopoulou, C. Tserkezis // *Optical Materials Express.* — 2022. — V. 12, № 5. — P. 1869–1893.
3. A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures / N.A. Mortensen, S. Raza, M. Wubs [et al.] // *Nat. Commun.* — 2014. — Art. 5:3809.
4. Mortensen, N.A. Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces / N.A. Mortensen // *Nanophotonics.* — 2021. — V. 10. — P. 2563–2616.
5. Yang, F. Transformation optics approach to mesoscopic plasmonics / F. Yang, K. Ding // *Phys. Rev. B.* — 2022. — V. 105. — Art. L121410.
6. Еремин, Ю.А. Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) / Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
7. Еремин, Ю.А. Анализ влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц методом дискретных источников / Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 2023. — Т. 63, № 11. — С. 1911–1921.
8. Plasmon–emitter interactions at the nanoscale / P.A.D. Gonçalves, T. Christensen, N. Rivera [et al.] // *Nat. Commun.* — 2020. — V. 11, № 1. — Art. 366.
9. Еремин, Ю.А. Анализ методом дискретных источников дифракции электромагнитных волн на трехмерных рассеивателях / Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 1999. — Т. 39, № 12. — С. 2050–2063.
10. Купрадзе, В.Д. О приближённом решении задач математической физики / В.Д. Купрадзе // *Успехи мат. наук.* — 1967. — Т. 22, № 2. — С. 58–104.
11. Еремин, Ю.А. Построение интегральных представлений для полей в задачах дифракции на проницаемых телах вращения / Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко // *Дифференц. уравнения.* — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1219–1216.

12. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
13. New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles / Yu.A. Eremin, N.L. Tsitsas, M. Kouroublakis, G. Fikioris // *J. Comput. Appl. Math.* — 2023. — V. 417, № 2. — Art. 114556.
14. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
15. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс ; пер. с англ. Ю.Е. Еремина, Е.В. Захарова ; под ред. А.Г. Свешникова. — М. : Мир, 1987. — 311 с.
16. Еремин, Ю.А. Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода дискретных источников / Ю.А. Еремин, Е.В. Захаров // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1073–1077.
17. Nonlocal effects in atom-plasmon interactions / M.H. Eriksen, C. Tserkezis, N.A. Mortensen, J.D. Cox // *ArXiv.* 2023. arXiv:2308.09134.
18. Optical response of noble metal nanostructures: quantum surface effects in crystallographic facets / A.R. Echarri, P.A.D. Gonçalves, C. Tserkezis [et al.] // *Optica.* — 2021. — V. 8, № 5. — P. 710–721.
19. Nonlocal optical response in metallic nanostructures / S. Raza, S.I. Bozhevolnyi, M. Wubs, N.A. Mortensen // *J. Physics: Condens. Matter.* — 2015. — V. 27, № 18. — Art. 183204.
20. A review on the application of integral equation-based computational methods to scattering problems in plasmonics / X. Zheng, M. Kupresak, V. Verellen [et al.] // *Adv. Theory Simul.* — 2019. — V. 2. — Art. 1900087.
21. Setukha, A.V. Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems / A.V. Setukha // *J. Math. Sci.* — 2021. — V. 257, № 1. — P. 114–126.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING OF THE DIFFRACTION PROBLEM DESCRIBED BY MAXWELL'S EQUATIONS WITH MESOSCOPIC BOUNDARY CONDITIONS

Yu. A. Eremin¹, V. V. Lopushenko²

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: ¹eremin@cs.msu.ru, ²lopushnk@cs.msu.ru

A numerical method for solving the diffraction boundary problem for the system of Maxwell's equations with mesoscopic boundary conditions has been developed and implemented. It is based on the discrete source method. A numerical analysis of the influence of surface quantum effects on the optical characteristics of plasmonic nanoparticles is carried out. It has been established that surface effects have a significant impact on the field characteristics, and the results differ significantly from the case of volumetric effects.

Keywords: discrete source method, mesoscopic boundary condition, plasmon resonance.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Shi, H., Zhu, X., Zhang, S. [et al.], Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications, *Nanoscale Adv.*, 2021, vol. 3, pp. 4349–4369.
2. Stamatopoulou, P.E. and Tserkezis, C., Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited], *Optical Materials Express*, 2022, vol. 12, no. 5, pp. 1869–1893.
3. Mortensen, N.A., Raza, S., Wubs, M. [et al.], A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures, *Nat. Commun.*, 2014, art. 5:3809.

4. Mortensen, N.A., Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces, *Nanophotonics*, 2021, vol. 10, pp. 2563–2616.
5. Yang, F. and Ding, K., Transformation optics approach to mesoscopic plasmonics, *Phys. Rev. B.*, 2022, vol. 105, art. L121410.
6. Eremin, Yu.A. and Sveshnikov, A.G., Semi-classical models of quantum nanoplasmonics based on the discrete source method (review), *Computat. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 4, pp. 564–590.
7. Eremin, Yu.A. and Lopushenko, V.V., Analysis of quantum effects on optical characteristics of plasmonic nanoparticles based on the discrete sources method, *Computat. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 11, pp. 2139–2149.
8. Gonçalves, P.A.D., Christensen, T., Rivera, N. [et al.], Plasmon–emitter interactions at the nanoscale, *Nat. Commun.*, 2020, vol. 11, no. 1, art. 366.
9. Eremin, Yu.A. and Sveshnikov, A.G., Analysis of electromagnetic diffraction by three-dimensional bodies using the discrete-sources method, *Computat. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 36, no. 12, pp. 1967–1980.
10. Kupradze, V.D., On the approximate solution of problems in mathematical physics, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1967, vol. 22, no. 2, pp. 59–107.
11. Eremin, Yu.A. and Lopushenko, V.V., Construction of integral representations of fields in problems of diffraction by penetrative bodies of revolution, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1235–1241.
12. Dmitriev, V.I. and Zakharov, E.V., *Metod integral'nykh uravnenij v vychislitel'noj elektrodinamike* (Integral Equations Method in Computational Electrodynamics), Moscow: MAKS Press, 2008.
13. Eremin, Yu.A., Tsitsas, N.L., Kouroubakis, M., and Fikioris, G., New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles, *J. Comput. Appl. Math.*, 2023, vol. 417, no. 2, art. 114556.
14. Voevodin, V.V. and Kuznetsov, Yu.A., *Matricy i vychisleniya* (Matrices and Calculations), Moscow: Nauka, 1984.
15. Colton, D. and Kress, R., *Integral Equations Methods in Scattering Theory*, New York: J. Wiley and Sons, 1983.
16. Eremin, Yu.A. and Zakharov, E.V., Analytical representation of the integral scattering cross-section in the integrofunctional discrete source method, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1064–1069.
17. Eriksen, M.H., Tserkezis, C., Mortensen, N.A., and Cox, J.D., Nonlocal effects in atom-plasmon interactions, *arXiv:2308.09134*, 2023.
18. Echarri, A.R., Gonçalves, P.A.D., Tserkezis, C. [et al.], Optical response of noble metal nanostructures: quantum surface effects in crystallographic facets, *Optica*, 2021, vol. 8, no. 5, pp. 710–721.
19. Raza, S., Bozhevolnyi, S.I., Wubs, M., and Mortensen, N.A., Nonlocal optical response in metallic nanostructures, *J. Physics: Condens. Matter*, 2015, vol. 27, no. 18, art. 183204.
20. Zheng, X., Kupresak, M., Verellen, V. [et al.], A review on the application of integral equation-based computational methods to scattering problems in plasmonics, *Adv. Theory Simul.*, 2019, vol. 2, art. 1900087.
21. Setukha, A.V., Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 1, pp. 114–126.

УДК 519.63

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© А. А. Самсонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: anton.samsonov.kpfu@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г., после доработки 14.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Исследована параметрическая задача на собственные значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве, возникающая в механике нагруженных тонкостенных конструкций. Установлены асимптотические свойства решений в зависимости от параметров нагружения. Исходная бесконечномерная задача аппроксимируется в конечномерном подпространстве. Получены теоретические оценки погрешности приближённых решений. Предложены эффективные численные методы вычисления основной резонансной частоты и соответствующей резонансной формы колебаний, основанные на асимптотических формулах.

Ключевые слова: собственное значение, собственный элемент, задача на собственные значения, гильбертово пространство, асимптотическая формула, конечномерная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0374064124080093, EDN: KCJMST

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть \mathbb{R} обозначает числовую прямую, $\Lambda = (0, +\infty)$, $\bar{\Lambda} = [0, +\infty)$, V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Определим симметричные билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

1) для любого элемента $v \in V$ и фиксированных положительных констант α_1 и α_2 справедливы соотношения положительной определённости и ограниченности

$$\alpha_1 \|v\|^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2 \|v\|^2;$$

2) для любого ненулевого элемента $v \in V$ выполняется неравенство положительности $b(v, v) > 0$;

3) для слабо сходящейся последовательности v_i в пространстве V при $i \rightarrow \infty$ к некоторому элементу $v \in V$ ($v_i \rightharpoonup v$) имеет место сходимость $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$ при $i \rightarrow \infty$;

4) справедливо представление $c(u, v) = f(u)f(v)$ для любых элементов $u, v \in V$, где $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, такой что $\text{codim } V_0 = 1$, $V_0 = \{v: v \in V, f(v) = 0\}$.

В работе изучается класс математических моделей нагруженных механических систем [1–3], которые формулируются в виде следующей параметрической задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве.

Задача 1. При фиксированных $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ найти $\lambda = \lambda(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $u = u(\xi, \mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) + \xi c(u, v) = \lambda(b(u, v) + \mu c(u, v)), \quad v \in V.$$

Для данного класса математических моделей гильбертово пространство V определяется как прямое произведение пространств Соболева [4, 5]. Физические параметры задачи $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ задают параметры нагружения механической системы конструкция–груз–опора, μ — масса присоединённого груза, ξ — коэффициент упругости опоры присоединённого груза. Собственные значения задачи $\lambda = \lambda(\xi, \mu)$ определяют резонансные частоты колебаний, а собственные элементы задачи $u = u(\xi, \mu)$ — резонансные формы колебаний.

Чтобы исследовать асимптотические свойства решений на границе интервала Λ , введём следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. Найти число $\nu \in \mathbb{R}$ и элемент $w \in V_0 \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w, v) = \nu b(w, v), \quad v \in V_0.$$

Задача 3. При фиксированных значениях $\xi \in \bar{\Lambda}$ и $\mu \in \Lambda$ найти $\nu_0 = \nu_0(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $w_0 = w_0(\xi, \mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w_0, v) + \xi c(w_0, v) = \nu_0 \mu c(w_0, v), \quad v \in V.$$

Задача 4. Найти элемент $v_0 \in V$ такой, что

$$a(v_0, v) = f(v), \quad v \in V. \tag{1}$$

Существуют [6] конечнократные собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, задачи 1, занумерованные в порядке неубывания ($\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$), и соответствующие ортонормированные собственные элементы $u_k = u_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что $a(u_i, u_j) + \xi c(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) + \mu c(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 0, 1, \dots$.

Существуют [6] конечнократные собственные значения ν_k , $k = 1, 2, \dots$, задачи 2, занумерованные в порядке неубывания ($\nu_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$), и соответствующие ортонормированные собственные элементы w_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что $a(w_i, w_j) = \nu_i \delta_{ij}$, $b(w_i, w_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots$.

Единственное простое собственное значение $\nu_0(\xi, \mu)$ и единственный нормированный собственный элемент $w_0(\xi, \mu)$, такой что $f(w_0(\xi, \mu)) = 1/\sqrt{\mu}$, задачи 3 определяются [5] формулами

$$\nu_0(\xi, \mu) = \frac{\xi}{\mu} + \frac{1}{\mu f(v_0)}, \quad w_0(\xi, \mu) = \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)}, \tag{2}$$

где v_0 — единственное решение вариационного уравнения (1).

Для $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ введём следующие обозначения:

$$a(\xi, u, v) = a(u, v) + \xi c(u, v), \quad b(\mu, u, v) = b(u, v) + \mu c(u, v), \quad u, v \in V,$$

$$R(\xi, \mu, v) = \frac{a(\xi, v, v)}{b(\mu, v, v)}, \quad v \in V \setminus \{0\},$$

$$W^\perp(\mu) = \{v: v \in V, b(\mu, v, w) = 0, w \in W\},$$

где W — подпространство пространства V .

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ справедлива сходимость $0 < \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $w_0(\xi, \mu) - u_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ в V при $\mu \rightarrow \infty$, если $f(u_0(\xi, \mu)) > 0$.

Доказательство. Применяя принцип минимума теоремы 2 из работы [6], получаем

$$\lambda_0(\xi, \mu) = R(\xi, \mu, u_0(\xi, \mu)) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \leq R(\xi, \mu, w_0(\xi, 1)) < \frac{1}{\mu} \nu_0(\xi, 1) = \nu_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow \infty$, $f(w_0(\xi, 1)) = 1$. Кроме того, выполняется неравенство $\mu\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, 1)$, а также $\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, \mu)$ и $\lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Полагая $\tilde{u}_0(\xi, \mu) = \sqrt{\mu}u_0(\xi, \mu)$, будем иметь

$$\alpha_1 \|\tilde{u}_0(\xi, \mu)\|^2 \leq a(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) = \mu\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, 1).$$

Поэтому из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$ такую, что $\tilde{u}_0(\xi, \mu) \rightharpoonup \tilde{w}$ в V , $f(\tilde{u}_0(\xi, \mu)) \rightarrow f(\tilde{w})$, $\mu\lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow \tilde{\nu}$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, где $\tilde{w} \in V$. С учётом условия нормировки $b(u_0(\xi, \mu), u_0(\xi, \mu)) + \mu c(u_0(\xi, \mu), u_0(\xi, \mu)) = 1$ получим $\mu^{-1}b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) = 1$. Переходя здесь к пределу при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, выводим $c(\tilde{w}, \tilde{w}) = 1$, следовательно, $f(\tilde{w}) = 1$.

Совершая для любого элемента $v \in V$ предельный переход в вариационном уравнении

$$a(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) = \lambda_0(\xi, \mu)(b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) + \mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v))$$

при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, получаем равенство $a(\tilde{w}, v) + \xi c(\tilde{w}, v) = \tilde{\nu}c(\tilde{w}, v)$ для любого элемента $v \in V$, где $\tilde{w} \in V \setminus \{0\}$. Следовательно, $\tilde{\nu}$ и \tilde{w} являются решениями задачи 3 при $\mu = 1$, $\tilde{\nu} = \nu_0(\xi, 1)$, $\tilde{w} = w_0(\xi, 1)$, $f(w_0(\xi, 1)) = 1$. Установлено также, что $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$.

Пусть для последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ существует положительная константа c такая, что $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \geq c$ при $\mu = \mu' \rightarrow \infty$. Тогда из последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ выделим, как и выше, подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, которая приводит к противоречию $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Теперь для произвольной последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ имеем $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu' \rightarrow \infty$, т.е. $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Обозначим $\varepsilon(\xi, \mu) = \nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu$, тогда $\varepsilon(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Так как $\varepsilon(\xi, \mu)\mu^{-1} = \nu_0(\xi, 1)\mu^{-1} - \lambda_0(\xi, \mu) = \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu)$, выводим $0 < \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu) = \varepsilon(\xi, \mu)\mu^{-1} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Сходимость $\tilde{u}_0(\xi, \mu) \rightarrow \tilde{w}$ в V при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$ ($\tilde{w} = w_0(\xi, 1)$) вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}\|^2 &\leq a(\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}, \tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}, \tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}) = \\ &= \lambda_0(\xi, \mu)b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + \lambda_0(\xi, \mu)\mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) - 2\lambda_0(\xi, \mu)b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{w}) - \\ &\quad - 2\lambda_0(\xi, \mu)\mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{w}) + \nu_0(\xi, 1) \rightarrow \nu_0(\xi, 1) - 2\nu_0(\xi, 1) + \nu_0(\xi, 1) = 0 \end{aligned}$$

при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. В силу простоты $\nu_0(\xi, 1)$ имеем $\|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, 1)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому $\delta(\xi, \mu) = \|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, 1)\| = \sqrt{\mu}\|u_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|u_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| = \delta(\xi, \mu)\mu^{-0.5} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $f(u_0(\xi, \mu)) > 0$, $\mu \in \bar{\Lambda}$. Теорема доказана.

Отметим, что согласно теореме 1 основная собственная частота (основной тон) системы конструкция–груз–опора приближается с ростом массы груза μ к собственной частоте $\omega(\xi, \mu)$ системы опора–груз–опора $\omega(\xi, \mu) = \sqrt{\nu_0(\xi, \mu)} = \sqrt{(\xi + \varkappa)/\mu}$, $\varkappa = (f(v_0))^{-1}$, где \varkappa и ξ — коэффициенты упругости опор [4].

Теорема 2. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \lambda_k(\xi, \mu) - \nu_k \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы $w_k, u_k(\xi, \mu)$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $b(w_k, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Для простого ν_k выполняется сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu \rightarrow \infty$, $b(w_k, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $k = 1$. Для подпространства $E_k(\xi, \mu) = \text{span}\{u_0(\xi, \mu), u_1(\xi, \mu), \dots, u_{k-1}(\xi, \mu)\}$ имеем $(E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) = \text{span}\{u_k(\xi, \mu), u_{k+1}(\xi, \mu), \dots\}$. Из условия ортогональности $b(u_i(\xi, \mu), u_j(\xi, \mu)) + \mu c(u_i(\xi, \mu), u_j(\xi, \mu)) = \delta_{ij}$ для $i, j = 0, 1, \dots, k$ вытекает линейная

независимость системы элементов $u_0(\xi, \mu), u_1(\xi, \mu), \dots, u_k(\xi, \mu)$ из $E_{k+1}(\xi, \mu)$. Введём систему элементов $v_i(\xi, \mu) = u_i(\xi, \mu) - c_i u_0(\xi, \mu)$, $c_i = f(u_i(\xi, \mu))/f(u_0(\xi, \mu))$, $i = 1, 2, \dots, k$, принадлежащую $E_{k+1}(\xi, \mu)$. Так как $f(v_i(\xi, \mu)) = 0$, то элементы $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, принадлежат V_0 . Покажем, что система элементов $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, является линейно независимой системой из подпространства $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$. Действительно, из равенств $\alpha_1 v_1(\xi, \mu) + \alpha_2 v_2(\xi, \mu) + \dots + \alpha_k v_k(\xi, \mu) = \alpha_0 u_0(\xi, \mu) + \alpha_1 u_1(\xi, \mu) + \alpha_2 u_2(\xi, \mu) + \dots + \alpha_k u_k(\xi, \mu) = 0$, где $\alpha_0 = -\alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2 - \dots - \alpha_k c_k$, следует $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, k$. А это означает выполнение требуемого свойства линейной независимости.

Поскольку в подпространстве $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$ содержится линейно независимая система элементов $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, то размерность подпространства $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$ не меньше, чем k . Следовательно, при $\mu \in \Lambda$ согласно теоремам 2 и 3 из работы [6] выводим

$$\lambda_k(\xi, \mu) = \max_{v \in E_{k+1}(\xi, \mu) \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \geq \max_{v \in E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0 \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \geq \nu_k,$$

$$\lambda_k(\xi, \mu) = \min_{v \in (E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \leq R(\xi, \mu, \tilde{w}(\xi, \mu)),$$

где $\tilde{w}(\xi, \mu) = w_k - \sum_{i=0}^{k-1} b(w_k, u_i(\xi, \mu)) u_i(\xi, \mu) \in (E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) \setminus \{0\}$ при $\mu \rightarrow \infty$, $\tilde{w}(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V , $\beta_k(\xi, \mu) = R(\xi, \mu, \tilde{w}(\xi, \mu)) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому получим $\nu_k \leq \lambda_k(\xi, \mu) \leq \beta_k(\xi, \mu) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что $\lambda_k(\xi, \mu) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Поскольку $\alpha_1 \|u_k(\xi, \mu)\|^2 \leq a(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \xi c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) = \lambda_k(\xi, \mu) \leq \lambda_k(\xi, 0)$, то $\|u_k(\xi, \mu)\|^2 \leq \lambda_k(\xi, 0)/\alpha_1$. Следовательно, из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$ такую, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) \rightarrow f(w)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, где $w \in V$. Поэтому из равенства $a(u_k(\xi, \mu), v) + \xi c(u_k(\xi, \mu), v) - \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), v) = \lambda_k(\xi, \mu) \mu f(u_k(\xi, \mu)) f(v)$ для $v \in V$, $f(v) \neq 0$, получим $f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Отсюда $f(w) = 0$ и $w \in V_0$. Из равенства $b(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \mu c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) = 1$ выводим $b(w, w) = 1$ и $w \neq 0$.

Итак, существует элемент $w \in V_0$ такой, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) \rightarrow 0$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Предельный переход в уравнении $a(u_k(\xi, \mu), v) = \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), v)$ для любого элемента $v \in V_0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$ приводит к равенству $a(w, v) = \nu_k b(w, v)$ для любого элемента $v \in V_0$, поэтому ν_k и $w = w_k$ являются решениями задачи 2.

Сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $w = w_k$ вытекает из соотношений

$$\alpha_1 \|u_k(\xi, \mu) - w\|^2 \leq a(u_k(\xi, \mu) - w, (\xi, \mu) - w) + \xi c(u_k(\xi, \mu) - w, u_k(\xi, \mu) - w) =$$

$$= \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \lambda_k(\xi, \mu) \mu c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) - 2\lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), w) + \nu_k \rightarrow 0.$$

Повторив предыдущие рассуждения для номеров $k \geq 2$, получим утверждение теоремы.

Теорема 3. Для фиксированного $\mu \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \nu_{k+1} - \lambda_k(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, $k = 0, 1, \dots$. Из любой последовательности $\xi' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\xi'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы w_k , $k = 1, 2, \dots$, и $u_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi = \xi'' \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Для простого числа ν_{k+1} выполняется сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. При достаточно малых $|\xi - \zeta|$ и $|\mu - \eta|$ ортонормированные собственные элементы $u_k(\xi, \mu)$ и $u_k(\zeta, \eta)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие оценки возмущения:

$$|\lambda_k(\xi, \mu) - \lambda_k(\zeta, \eta)| \leq c(|\xi - \zeta| + |\mu - \eta|), \quad \|u_k(\xi, \mu) - u_k(\zeta, \eta)\| \leq c(|\xi - \zeta| + |\mu - \eta|),$$

где константа c не зависит от величин $|\xi - \zeta|$ и $|\mu - \eta|$, направления собственных элементов выбраны согласно неравенству $b(u_k(\xi, \mu), u_k(\zeta, \eta)) > 0$, $\xi, \mu, \zeta, \eta \in \bar{\Lambda}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам лемм 1 и 2 из работы [7].

Теорема 5. Пусть $M = [\alpha, \beta)$, $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Пусть при фиксированном $\xi \in \bar{\Lambda}$ собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ является простым для всех $\mu \in M$. Тогда $\lambda_k(\xi, \mu)$, $\mu \in M$, будет либо непрерывной убывающей функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $\mu \in M$, либо постоянной функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $\mu \in M$.

Пусть при фиксированном $\mu \in \bar{\Lambda}$ собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ является простым для всех $\xi \in M$. Тогда $\lambda_k(\xi, \mu)$, $\xi \in M$, будет либо непрерывной возрастающей функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $\xi \in M$, либо постоянной функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $\xi \in M$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3 из работы [5].

Результаты теорем 1–5 обобщают результаты работ [4, 5] на случай задачи 1 в абстрактном гильбертовом пространстве V .

Введём конечномерные подпространства V_h гильбертова пространства V размерности $N = N_h$, удовлетворяющие следующему условию:

5) имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и для любого элемента v из пространства V .

Обозначим $E_h(W) = \sup_{w \in W, \|w\|=1} \varepsilon_h(w)$, где W — подпространство пространства V .

Задачи 1–4 будем аппроксимировать следующими конечномерными задачами.

Задача 1_h. При фиксированных $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ найти $\lambda^h = \lambda^h(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $u^h = u^h(\xi, \mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u^h, v^h) + \xi c(u^h, v^h) = \lambda^h (b(u^h, v^h) + \mu c(u^h, v^h)), \quad v^h \in V_h. \tag{3}$$

Задача 2_h. Для $V_{0h} = V_0 \cap V_h$ найти $\nu^h \in \mathbb{R}$ и $w^h \in V_{0h} \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w^h, v^h) = \nu^h b(w^h, v^h), \quad v^h \in V_{0h}. \tag{4}$$

Задача 3_h. Для заданных $\xi \in \bar{\Lambda}$ и $\mu \in \Lambda$ найти $\nu_0^h = \nu_0^h(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $w_0^h = w_0^h(\xi, \mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w_0^h, v^h) + \xi c(w_0^h, v^h) = \nu_0^h \mu c(w_0^h, v^h), \quad v^h \in V_h.$$

Задача 4_h. Найти элемент $v_0^h \in V_h$ такой, что

$$a(v_0^h, v^h) = f(v^h), \quad v^h \in V_h. \tag{5}$$

Существуют [6] собственные значения $\lambda_k^h = \lambda_k^h(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, задачи 1_h, занумерованные в порядке неубывания, и соответствующие собственные элементы $u_k^h = u_k^h(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, такие, что $a(u_i^h, u_j^h) + \xi c(u_i^h, u_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $b(u_i^h, u_j^h) + \mu c(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij}$ при $i, j = 0, 1, \dots, N - 1$.

Существуют [6] собственные значения ν_k^h , $k = 1, 2, \dots, N - 1$, задачи 2_h, занумерованные в порядке неубывания, и соответствующие собственные элементы w_k^h , $k = 1, 2, \dots, N - 1$, такие, что $a(w_i^h, w_j^h) = \nu_i^h \delta_{ij}$, $b(w_i^h, w_j^h) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots, N - 1$.

Единственное простое собственное значение $\nu_0^h(\xi, \mu)$ и единственный нормированный собственный элемент $w_0^h(\xi, \mu)$ ($f(w_0^h(\xi, \mu)) = 1/\sqrt{\mu}$) задачи 3_h определяются [5] формулами

$$\nu_0^h(\xi, \mu) = \frac{\xi}{\mu} + \frac{1}{\mu f(v_0^h)}, \quad w_0^h(\xi, \mu) = \frac{v_0^h}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)}, \tag{6}$$

где v_0^h — единственное решение вариационного уравнения (5). Формулы (6) являются конечномерными аналогами формул (2).

Теорема 6. Для заданного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 < \nu_0^h(\xi, \mu) - \lambda_0^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $w_0^h(\xi, \mu) - u_0^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ в V_h при $\mu \rightarrow \infty$, если $f(u_0^h(\xi, \mu)) > 0$.

Теорема 7. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \lambda_k^h(\xi, \mu) - \nu_k^h \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, N-1}$. Из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы $w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)$, $k = \overline{1, N-1}$, такие, что $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_k^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $b(w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-1}$. Для простого числа ν_k^h выполняется сходимость $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_k^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu \rightarrow \infty$, $b(w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-1}$.

Теорема 8. Для фиксированного $\mu \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \nu_{k+1}^h - \lambda_k^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, N-2}$. Из любой последовательности $\xi' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\xi'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы w_k^h , $k = \overline{1, N-1}$, и $u_k^h(\xi, \mu)$, $k = \overline{1, N-2}$, такие, что $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi = \xi'' \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-2}$. Для простого ν_{k+1}^h выполняется сходимость $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-2}$.

Теоремы 6–8 являются конечномерными аналогами теорем 1–3 и доказываются аналогично.

Через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от h .

Теорема 9. Предположим, что собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ задачи 1 имеет кратность r , т.е. $\lambda_{k-1}(\xi, \mu) < \lambda_k(\xi, \mu) = \lambda_{k+1}(\xi, \mu) = \dots = \lambda_{k+r-1}(\xi, \mu) < \lambda_{k+r}(\xi, \mu)$, $u_i(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, — соответствующие собственные элементы, $\lambda_i^h(\xi, \mu)$, $u_i^h(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, — приближения по конечномерной схеме (3).

Тогда при достаточно малых h ортонормированные собственные элементы $u_i(\xi, \mu)$ и $u_i^h(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, можно выбрать так, чтобы выполнялись оценки погрешности

$$0 \leq \lambda_i^h(\xi, \mu) - \lambda_i(\xi, \mu) \leq cE_h^2(U_k(\xi, \mu)), \quad \|u_i^h(\xi, \mu) - u_i(\xi, \mu)\| \leq cE_h(U_k(\xi, \mu)),$$

где $U_k(\xi, \mu)$ — собственное подпространство, соответствующее $\lambda_k(\xi, \mu)$, $b(u_i^h(\xi, \mu), u_i(\xi, \mu)) > 0$, $i = \overline{k, k+r-1}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам теорем 8 и 9 из работы [8].

Теорема 10. Предположим, что собственное значение ν_k задачи 2 имеет кратность r ($\nu_{k-1} < \nu_k = \nu_{k+1} = \dots = \nu_{k+r-1} < \nu_{k+r}$), w_i , $i = \overline{k, k+r-1}$, — соответствующие собственные элементы, ν_i^h , w_i^h , $i = \overline{k, k+r-1}$, — приближения по конечномерной схеме (4).

Тогда при достаточно малых h ортонормированные собственные элементы w_i и w_i^h , $i = \overline{k, k+r-1}$, можно выбрать так, чтобы выполнялись оценки погрешности

$$0 \leq \nu_i^h - \nu_i \leq cE_h^2(W_k), \quad \|w_i^h - w_i\| \leq cE_h(W_k),$$

где W_k — собственное подпространство, соответствующее ν_k , $b(w_i^h, w_i) > 0$, $i = \overline{k, k+r-1}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам теорем 8 и 9 из работы [8].

Теорема 11. Выполняются оценки погрешности

$$0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) \leq c\varepsilon_h^2(w_0(\xi, \mu)), \quad \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c\varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)),$$

если h достаточно мало.

Доказательство. При фиксированном $\mu \in \bar{\Lambda}$ обозначим $c(\mu, u, v) = \mu c(u, v)$ для любых элементов $u, v \in V$. По теореме 2 из [6] выполняются соотношения

$$\nu_0(\xi, \mu) = \min_{v \in V, f(v) \neq 0} \frac{a(\xi, v, v)}{c(\mu, v, v)} \leq \min_{v^h \in V_h, f(v^h) \neq 0} \frac{a(\xi, v^h, v^h)}{c(\mu, v^h, v^h)} = \nu_0^h(\xi, \mu).$$

Применив формулы (2) и (6), получим

$$0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) = \frac{1}{\mu f(v_0^h)} - \frac{1}{\mu f(v_0)} = \frac{f(v_0) - f(v_0^h)}{\mu f(v_0^h) f(v_0)} \leq c \|v_0^h - v_0\| \leq c \varepsilon_h(v_0) \leq c \varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| &= \left\| \frac{v_0^h}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} - \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)} \right\| \leq \left\| \frac{v_0^h - v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} \right\| + \left\| \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} - \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)} \right\| = \\ &= \left\| \frac{v_0^h - v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} \right\| + \left\| \sqrt{\mu} v_0 \left(\frac{1}{\mu f(v_0^h)} - \frac{1}{\mu f(v_0)} \right) \right\| \leq \\ &\leq c \|v_0^h - v_0\| + c(\nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu)) \leq c \|v_0^h - v_0\| \leq c \varepsilon_h(v_0) \leq c \varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)). \end{aligned}$$

Пусть $P_h: V \rightarrow V_h$ — ортопроектор, задаваемый равенством $a(\xi, u - P_h u, v^h) = 0$ для любого элемента $v^h \in V_h$ при $u \in V$. Тогда справедлива оценка погрешности проектирования $\|u - P_h u\| \leq c \varepsilon_h(u)$ для элемента $u \in V$.

Проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &(\nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu))c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) = \\ &= a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) - \nu_0(\xi, \mu)c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) = \\ &= a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) - \nu_0(\xi, \mu)c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)). \end{aligned}$$

С помощью оценки погрешности проектирования для выражений в правой и левой частях установим оценки

$$\begin{aligned} &|a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu))| \leq \\ &\leq c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c \varepsilon_h^2(v_0), \\ &|c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu))| \leq \\ &\leq c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c \varepsilon_h^2(v_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) &= c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) = \\ &= c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0(\xi, \mu)) \geq \\ &\geq 1 - c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| - c \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \geq 1 - c \varepsilon_h(v_0) \geq c. \end{aligned}$$

В результате получаем, что $0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) \leq c \varepsilon_h^2(v_0) \leq c \varepsilon_h^2(w_0(\xi, \mu))$. Теорема доказана.

Резонансными кривыми для исходной задачи 1 будем называть функции $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, при фиксированном первом или втором аргументе. Теоретические исследования свойств резонансных кривых привели к разбиению класса математических моделей, определяемого задачей 1, на следующие три группы.

Группа 1 характеризуется строго монотонным поведением всех резонансных кривых без точек пересечения. К этой группе относятся задачи, в которых собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, являются простыми, а соответствующие собственные элементы удовлетворяют условию $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

В *группе 2* дополнительно могут возникать отдельные резонансные кривые, описываемые постоянными функциями. К этой группе относятся задачи, в которых собственные значения

$\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, являются простыми, а некоторые соответствующие собственные элементы могут удовлетворять условию $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

В группе 3 различные резонансные кривые могут иметь общие точки пересечения и состоять из участков со строго монотонным поведением и участков с постоянными значениями резонансных частот. К этой группе относятся задачи, в которых некоторые собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, могут быть кратными, а некоторые соответствующие собственные элементы могут удовлетворять условию $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

Типичные представители одномерных и двумерных математических моделей этих трёх групп указаны в работе [4]. Асимптотические формулы (2) и их конечномерные аналоги (6) позволяют строить эффективные численные методы вычисления основной резонансной частоты и основной резонансной формы колебаний нагруженной механической системы. Высокая эффективность в реализации этих численных методов [4] достигается за счёт того, что решение задачи 1 на собственные значения или её конечномерного аналога 1_h заменяется решением краевой задачи 4 или её конечномерного аналога 4_h . При этом время решения конкретных прикладных задач на ЭВМ сокращается в 10–15 раз [4].

3. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера использования полученных теоретических результатов обратимся к задаче механики тонкостенных конструкций. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях изотропной квадратной пластины с жёстко присоединённым грузом на упругой опоре с граничными условиями защемления по контуру пластины.

Пусть $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ — область срединной поверхности пластины с границей Γ , $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $d(x)$ — толщина пластины,

$$D(x) = \frac{E(x)(d(x))^3}{12(1 - (\nu(x))^2)}$$

— цилиндрическая жёсткость, $\rho(x)$ — плотность в точке $x \in \bar{\Omega}$.

В точке $z \in \Omega$ жёстко присоединён груз массой μ , который опирается на опору с коэффициентом упругости ξ . Обозначим через $g(x, t)$ нормальные отклонения точки $x \in \bar{\Omega}$ в момент времени t . Тогда собственные вибрации системы пластина–груз–опора описываются функцией

$$g(x, t) = u(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \tag{7}$$

где ω и φ — постоянные величины. При этом выполняются дифференциальное уравнение

$$Lg(x, t) + \rho(x)d(x)g_{tt}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{8}$$

и краевое условие

$$g(x, t) = \frac{\partial g(x, t)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \tag{9}$$

где $\partial/\partial n$ — производная вдоль внешней нормали к границе Γ квадратной области Ω , L обозначает дифференциальный оператор теории изотропных пластин вида

$$Lg = \partial_{11}D(\partial_{11}g + \nu\partial_{22}g) + \partial_{22}D(\partial_{22}g + \nu\partial_{11}g) + 2\partial_{12}D(1 - \nu)\partial_{12}g,$$

$\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$, $i, j = 1, 2$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $g_{tt}(x, t) = \partial^2 g(x, t)/\partial t^2$, воздействие на пластину груза и упругой опоры моделируется функцией в правой части вида $f(x, t) = -(\xi g(z, t) + \mu g_{tt}(z, t))\delta(x - z)$ с дельта-функцией $\delta(x - z)$, сосредоточенной в точке z [1–3, 9, 10].

Подставляя функцию (7) в уравнение (8) и условие (9), приходим при $\lambda = \omega^2$ к задаче: найти собственные значения λ и собственные функции $u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, такие, что

$$Lu + \xi\delta(x-z)u = \lambda(\rho d + \mu\delta(x-z))u, \quad x \in \Omega; \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Если пластина закреплена в точке z , то для нахождения собственных колебаний формулируем задачу: найти собственные значения ν и собственные функции $w(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, такие, что

$$Lw = \nu \rho dw, \quad x \in \Omega \setminus \{z\}, \quad w(z) = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{11}$$

Для относительно большой массы груза μ будем пренебрегать плотностью пластины $\rho(x)$. В этом случае для нахождения частот и форм собственных колебаний невесомой пластины с жёстко присоединённым грузом на упругой опоре получим следующую задачу: найти собственные значения ν_0 и собственные функции $w_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющие равенствам

$$Lw_0 + \xi\delta(x-z)w_0 = \nu_0\mu\delta(x-z)w_0, \quad x \in \Omega; \quad w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{12}$$

Введём также краевую задачу: найти функцию $v_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющую соотношениям

$$Lv_0 = \delta(x-z), \quad x \in \Omega; \quad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Пусть $L_2(\Omega)$ — вещественное пространство Лебега [11, с. 22] с нормой

$$|v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

$W_2^2(\Omega)$ — вещественное пространство Соболева [11, с. 44] с нормой

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=0}^2 |v|_i^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_1 = \left(\sum_{i=1}^2 |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{ij} v|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Введём [11, с. 45] пространство $\dot{W}_2^2(\Omega)$, включающее все функции u из пространства $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие граничным условиям $u(x) = \partial u(x)/\partial n = 0$, $x \in \Gamma$. Через $W_2^\alpha(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 4]$ будем обозначать пространства Соболева дробного порядка с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ [11, с. 214]. Для краткости обозначим $H = L_2(\Omega)$, $V = \dot{W}_2^2(\Omega)$, $V_0 = \{v : v \in \dot{W}_2^2(\Omega), v(z) = 0\}$. Известно [11, с. 144], что пространство V компактно вложено в пространство H , любая функция из пространства V обладает свойством непрерывности на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$. В пространстве V введём норму $|\cdot|_2$, эквивалентную [11, с. 158] исходной норме $\|\cdot\|_2$.

Множество существенно ограниченных на Ω функций u образует [11, с. 24] пространство $L_\infty(\Omega)$ с нормой $|u|_{0,\infty} = \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$. Известно [11, с. 144], что существует постоянная c_0 , для которой выполнено соотношение $|v|_{0,\infty} \leq c_0 |v|_2$ при любых $v \in \dot{W}_2^2(\Omega)$.

Функции ρ , d , E и ν будем считать заданными функциями из пространства $L_\infty(\Omega)$. Предположим, что для некоторых положительных постоянных $\rho_1, \rho_2, d_1, d_2, E_1, E_2$ выполнены соотношения $\rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2, d_1 \leq d(x) \leq d_2, E_1 \leq E(x) \leq E_2, 0 < \nu(x) < 1/2$ при почти всех $x \in \Omega$. Введём линейный ограниченный функционал $f(v) = v(z)$ для $v \in V$. Определим симметричные билинейные формы $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}, c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$a(u, v) = \int_{\Omega} D(\partial_{11}u + \partial_{22}u)(\partial_{11}v + \partial_{22}v) dx + \int_{\Omega} D(1-\nu)(2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v) dx, \quad u, v \in V,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \rho du v dx, \quad u, v \in H; \quad c(u, v) = u(z)v(z), \quad u, v \in V.$$

Для заданных симметричных билинейных форм выполняются [10, с. 211; 12, с. 196] следующие свойства:

$$\alpha_1|v|_2^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2|v|_2^2, \quad v \in V,$$

$$\beta_1|v|_0^2 \leq b(v, v) \leq \beta_2|v|_0^2, \quad v \in H,$$

$$0 \leq c(v, v) \leq \gamma_2|v|_2^2, \quad v \in V,$$

при $\alpha_k = D_k$, $\beta_k = \rho_k d_k$, $k = 1, 2$, $D_1 = E_1 d_1^3/12$, $D_2 = E_2 d_2^3/6$, $\gamma_2 = c_0^2$.

Дифференциальным задачам (10)–(13) соответствуют эквивалентные вариационные задачи 1–4. Так как заданные симметричные билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям 1)–4), то для вариационной постановки задачи (10) справедливы результаты теорем 1–5.

На замкнутом квадрате $\bar{\Omega}$ определим равномерную сетку узлов $x_{ij} = (t_i, t_j)$, $t_i = ih$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = 1/n$, с квадратными ячейками $e_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через V_h пространство конечных элементов Богнера–Фокса–Шмита [13, с. 82], построенное на заданном разбиении квадрата $\bar{\Omega}$. Размерность подпространства V_h равна $2(n-1)$. Известно [13, с. 83], что V_h является подпространством исходного гильбертова пространства V . Предположим, что точка z совпадает с одним из внутренних узлов конечно-элементной сетки, т.е. $z = x_{k_1 k_2}$, $0 < k_1 < n$, $0 < k_2 < n$. Задачи (10)–(13) будем аппроксимировать конечномерными задачами 1_h – 4_h .

Поскольку свойство 5) выполнено [13, с. 137], то справедливы результаты теорем 6–11 при $E_h(U_k(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$, $E_h(W_k) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(u_k(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(w_k) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$ [14, с. 379], если собственные функции принадлежат пространству $W_2^{2+\alpha}(\Omega)$ при некотором $\alpha \in (0, 2]$ [15, 16]. Теоретические результаты настоящей статьи обобщают и развивают результаты работ [4, 5, 17–20]. Результаты численных экспериментов для задачи (10) приведены в работе [4].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации Программы стратегического академического лидерства “Приоритет–2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.
2. Базаров, М.Б. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем / М.Б. Базаров, И.И. Сафаров, Ю.И. Шокин. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, Студия Дизайн ИНФОЛИО, 1996. — 189 с.
3. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко — М. : Издательство МАИ, 2012. — 214 с.
4. Samsonov, A.A. Mathematical modeling of the eigenvibrations for the loaded shallow shell / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // E3S Web of Conferences. — 2023. — V. 431. — Art. 05013.
5. Investigation of the problem on eigenvibrations of a bar with mechanical resonator / D.M. Korosteleva, A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2021. — V. 42, № 7. — P. 1697–1705.
6. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.

7. Соловьев, С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
8. Соловьев, С.И. Аппроксимация знаконеопределённых спектральных задач / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 1042–1055.
9. Жигалко, Ю.П. К вопросу о колебаниях тонких пластин и оболочек, несущих сосредоточенные массы / Ю.П. Жигалко, А.К. Шалабанов // Исследования по теории пластин и оболочек. — Казань : КГУ, 1970. — Вып. 6–7. — С. 511–530.
10. Литвинов, В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике / В.Г. Литвинов. — М. : Наука, 1987. — 368 с.
11. Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. — New York : Academic Press, 1975. — 268 p.
12. Соловьёв, С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
13. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле ; пер. с англ. Б.И. Квасова ; под ред. Н.Н. Яненко. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
14. Brenner, S.C. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S.C. Brenner, L.R. Scott. — New York : Springer, 2008. — 398 p.
15. Blum, H. On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners / H. Blum, R. Rannacher // Math. Meth. Appl. Sci. — 1980. — V. 2. — P. 556–581.
16. Bacuta, C. Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem / C. Bacuta, J.H. Bramble, J.E. Pasciak // Recent Progress in Computational and Applied PDEs / eds. T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang [et al.]. Zhangjiajie, 2001. — New York : Kluwer/Plenum, 2002. — P. 1–26.
17. Samsonov, A.A. Eigenvibrations of a beam with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2017. — V. 38, № 5. — P. 849–855.
18. Samsonov, A.A. Eigenvibrations of a bar with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — V. 129. — Art. 06013.
19. Samsonov, A.A. Investigation of eigenvibrations of a loaded bar / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // MATEC Web of Conferences. — 2018. — V. 224. — Art. 04013.
20. Approximation of the problem on eigenvibrations of a string with attached load / D.M. Korosteleva, L.N. Koronova, A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2022. — V. 43, № 4. — P. 996–1005.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PARAMETRIC EIGENVALUE PROBLEMS IN THE HILBERT SPACE

A. A. Samsonov

*Kazan (Volga region) Federal University, Russia
e-mail: anton.samsonov.kpfu@mail.ru*

The parametric eigenvalue problem in infinite-dimensional Hilbert space arising in the mechanics of loaded thin-walled structures is investigated. Asymptotic properties of solutions depending on loading parameters are established. The initial infinite-dimensional problem is approximated in a finite-dimensional subspace. Theoretical error estimates of approximate solutions are obtained. Effective numerical methods for calculating the main resonance frequency and the corresponding resonance form of vibrations based on asymptotic formulas are proposed.

Keywords: eigenvalue, eigenelement, eigenvalue problem, Hilbert space, asymptotic formula, finite-dimensional approximation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from Kazan (Volga region) Federal University within the framework of the strategic academic leadership program “Priority—2030”.

REFERENCES

1. Andreev, L.V., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* (Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses), Moscow: Mashinostroenie, 1988.
2. Bazarov, M.B., Safarov, I.I., and Shokin, Yu.I., *Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* (Numerical Modelling of Vibrations of Dissipative Homogeneous and Nonhomogeneous Mechanical Systems), Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, Studio Design INFOLIO, 1996.
3. Andreev, L.V., Stankevich, A.I., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika tonkostennykh konstruksiy s pris-oedinennymi massami* (Dynamics of Thin-Walled Constructions with Attached Masses), Moscow: Izdatel'stvo MAI, 2012.
4. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Mathematical modeling of the eigenvibrations for the loaded shallow shell, *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 431, art. 05013.
5. Korosteleva, D.M., Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., Investigation of the problem on eigenvibrations of a bar with mechanical resonator, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 7, pp. 1697–1705.
6. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
7. Solov'ev, S.I., Approximation of nonlinear spectral problems in the Hilbert space, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 934–947.
8. Solov'ev, S.I., Approximation of sign-indefinite spectral problems, *Differ. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 1028–1041.
9. Zhigalko, Yu.P. and Shalabanov, A.K., К вопросу о колебаниях тонких пластин и оболочек, несущих сосредоточенные массы (To the question of vibrations of thin plates and shells carrying concentrated masses), *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* (Studies on the Theory of Plates and Shells), Kazan: KSU, 1970, no. 6–7, pp. 511–530.
10. Litvinov, V.G., *Optimizatsiya v ellipticheskikh granichnykh zadachakh s prilozheniyami k mekhanike* (Optimisation in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics), Moscow: Nauka, 1987.
11. Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
12. Solov'ev, S.I., *Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennyye metody* (Nonlinear Eigenvalue Problems. Approximate Methods), Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011.
13. Ciarlet, Ph.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
14. Brenner, S.C. and Scott, L.R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, New York: Springer, 2008.
15. Blum, H. and Rannacher, R., On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, vol. 2, pp. 556–581.
16. Bacuta, C., Bramble, J.H., and Pasciak, J.E., Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem, in *Recent Progress in Computational and Applied PDEs, Zhangjiajie, 2001*, eds. T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang [et al.], New York: Kluwer/Plenum, 2002, pp. 1–26.
17. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Eigenvibrations of a beam with load, *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 849–855.
18. Samsonov, A.A., Solov'ev, S.I., and Solov'ev, P.S., Eigenvibrations of a bar with load, *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 129, art. 06013.
19. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Investigation of eigenvibrations of a loaded bar, *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 224, art. 04013.
20. Korosteleva, D.M., Koronova, L.N., Samsonov, A.A., and Solov'ev, S.I., Approximation of the problem on eigenvibrations of a string with attached load, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 4, pp. 996–1005.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

© А. Д. Ахметшин

Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, Казахстан

e-mail: aleksandr_050401@mail.ru

Поступила в редакцию 24.02.2024 г., после доработки 06.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассмотрена краевая задача для уравнения с переменными коэффициентами, содержащего дробную производную Лиувилля по одной из переменных с началом в точке минус бесконечность. Получены представление решения задачи, достаточные условия его существования и единственности.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, краевая задача, производная дробного порядка, производная Лиувилля, функция Райта.

DOI: 10.31857/S0374064124080109, EDN: KSECCJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a < x < b, y < T\}$ уравнение

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^{\alpha} u(x, y) + \mu(x) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$D_{-\infty y}^{\alpha} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^y \frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, t) dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

— дробная производная Лиувилля [1, с. 85].

Одними из первых работ по решению уравнений с частными производными вида (1) были статьи [2, 3]. В [4–11] исследованы краевые задачи для уравнений с различными видами дробных производных как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Ниже будем использовать обозначения

$$\Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x < b, y < T\}, \quad \Omega^{\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a < x < b - \varepsilon, y < T - \varepsilon\}.$$

Определение. Будем называть функцию $u(x, y)$ *регулярным решением уравнения (1)* в области Ω , если: $u(x, y) \in C(\Omega_a)$, функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x , а функция $D_{-\infty y}^{\alpha-1} u(x, y)$ — по переменной y для всех $(x, y) \in \Omega$; $(R-y)^{-\alpha} u(x, y)$, как функция переменной y , интегрируема на множестве $y \in (-\infty, R)$, $R < T$, для любого $x \in (a, b)$; $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в Ω .

Задача. В области Ω найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(a, y) = \varphi(y), \quad y < T. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_\eta(x, y) = y^{\eta-1} \phi\left(-\alpha, \eta, -\frac{x}{y^\alpha}\right), \quad x, y > 0, \tag{3}$$

где

$$\phi(\xi, \eta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)}, \quad \xi > -1,$$

— функция Райта [12, 13].

В данной работе будут использованы следующие свойства для функции (3) [11]:

$$\frac{\partial \omega_\eta(x, y)}{\partial x} = -\omega_{\eta-\alpha}(x, y); \tag{4}$$

$$D_{0y}^\beta \omega_\eta(x, y) = \omega_{\eta-\beta}(x, y), \quad \beta \in \mathbb{R}; \tag{5}$$

$$|\omega_\eta(x, y)| < C y^{\eta-1} \exp\{-\rho x^{1/(1-\alpha)} y^{-\alpha/(1-\alpha)}\}, \quad C = C(\alpha, \eta), \quad \rho < (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}; \tag{6}$$

$$\omega_\eta(x, y) > 0, \quad \eta \geq 0;$$

$$|\omega_\eta(x, y)| < C x^{-\theta} y^{\eta+\alpha\theta-1}, \quad \begin{cases} -1, & -\eta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & -\eta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad C = C(\alpha, \eta, \theta). \tag{7}$$

Здесь и далее через C обозначаются положительные постоянные, вообще говоря, различные, при этом в скобках, в случае необходимости, указываются параметры, от которых зависит их выбор.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) \in L(a, b)$, $(\lambda(x))^{-1} \in C(a, b)$, $\lambda(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $f(x, y), f(x, y)/(\lambda(x)) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $\varphi(y) \in L(-\infty, T - \varepsilon)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x \in (a, b - \varepsilon) \\ y < R}} |u(x, y)| = 0 \tag{8}$$

для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Если $u(x, y)$ — регулярное решение задачи (1), (2), то оно представимо в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) G_0(x, a, y, t) dt + \int_a^x \int_{-\infty}^y f(q, t) G_0(x, q, y, t) dt dq, \tag{9}$$

где

$$G_\eta(x, q, y, t) = e^{-\int_q^x \mu(\gamma) d\gamma} \omega_\eta\left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t\right). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1). Сделаем замену

$$u = \psi(x, y) e^{-\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma}. \tag{11}$$

Легко заметить, что подстановка (11) позволит избавиться от третьего слагаемого в уравнении (1), при этом функция $\psi(x, y)$ будет регулярным решением нового уравнения. В результате замены и введения обозначений

$$z = \int_a^x \lambda(s) ds + a, \quad a < z < a + \int_a^b \lambda(s) ds,$$

$$\bar{\psi}(z, y) = \psi(x(z), y), \quad \bar{f}_2(z, y) = f(x(z), y)e^{\int_a^{x(z)} \mu(\gamma) d\gamma} (\lambda(x(z)))^{-1}$$

получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \bar{\psi}(z, y)}{\partial z} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \bar{\psi}(z, y) = \bar{f}_2(z, y).$$

Из регулярности $u(x, y)$ следует регулярность $\bar{\psi}(z, y)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x(z) \in (a, b - \varepsilon) \\ y < R}} |\bar{\psi}(z, y)| = 0.$$

Заметим, что $\bar{\psi}(a, y) = \varphi(y)$.

В силу теоремы из [11] и обратной замены $x(s) = q, s = \int_a^q \lambda(\gamma) d\gamma + a$, регулярное решение уравнения, полученного в результате подстановки (11), можно записать в виде

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) \omega_0 \left(\int_a^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t \right) dt + \int_{a-\infty}^x \int_{a-\infty}^y f(q, t) e^{\int_a^q \mu(\gamma) d\gamma} \omega_0 \left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t \right) dt dq.$$

Возвращаясь к начальным обозначениям (11), получим (9). Теорема доказана.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи (1), (2) в классе функций, удовлетворяющих условию (8).*

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — два регулярных решения задачи (1), (2). Тогда их разность $v(x, y) \equiv u_2(x, y) - u_1(x, y)$ является регулярным решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^\alpha v(x, y) + \mu(x)v(x, y) &= 0, \\ v(a, y) = u_2(a, y) - u_1(a, y) &= 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющим условию (8). В силу теоремы 1 это регулярное решение $v(x, y) \equiv 0$, откуда следует, что $u_2(x, y) \equiv u_1(x, y)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(y) \in C(-\infty, T) \cap L(-\infty, T - \varepsilon)$, $f(x, y) \in C(\Omega_a) \cap L(\Omega^\varepsilon)$, $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) = (x - a)^\zeta g_1(x)$, $g_1(x) \in C[a, b]$, $g_1(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$, $\zeta > -1$,*

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (-y)^\delta \varphi(y) = 0, \quad \delta > 1 - \alpha, \tag{12}$$

и функция $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = D_{-\infty y}^{-\nu} g(x, y), \quad \nu > \alpha, \tag{13}$$

где $g(x, y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $(x - a)^{-\sigma_1} g(x, y) \in C(\Omega_a)$ и

$$\sup \{ (x - a)^{-\sigma_1} (T - y)^{-\sigma_2} |g(x, y)| : (x, y) \in \Omega^\varepsilon \} \leq C(\varepsilon) \tag{14}$$

для некоторых $\sigma_1 > \zeta$, $-\sigma_2 > \nu + 1$ и любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Тогда функция $u(x, y)$, определённая равенством (9), является регулярным решением задачи (1), (2).

Доказательство. Рассмотрим функцию (10). Из условий теоремы следует, что $g_1(x) \geq C(\varepsilon) > 0$ и $|\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma| < +\infty$ для любого $x \in [a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, откуда с учётом (7) получим

$$G_\eta(x, q, y, t) \leq C \left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma \right)^{-\theta} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1} \leq C(q-a+(x-q)\theta_1)^{-\zeta\theta} (x-q)^{-\theta} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}, \quad (15)$$

где $\theta_1 = \theta_1(x, q)$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

Если $q = a$, то

$$G_\eta(x, a, y, t) \leq C(x-a)^{-\theta(\zeta+1)} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}.$$

Введём обозначения

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) G_0(x, a, y, t) dt, \quad F(x, y) = \int_a^x \int_{-\infty}^y f(q, t) G_0(x, q, y, t) dt dq,$$

$$L(u) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^\alpha u(x, y) + \mu(x) u(x, y).$$

Используя (12)–(15), получаем

$$|\Phi(x, y)| \leq C \int_{-\infty}^y (T-t)^{-\delta} G_0(x, a, y, t) dt \leq C(T-y)^{-\delta}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq C \int_a^x \int_{-\infty}^y (q-a)^{\sigma_1} (T-t)^{\sigma_2} (q-a+(x-q)\theta_1)^{-\zeta\theta} (x-q)^{-\theta} (y-t)^{\nu+\alpha\theta-1} dt dq \leq \\ &\leq C(x-a)^{\sigma_1-\theta+1-\zeta\theta} (T-y)^{\nu+\sigma_2+\alpha\theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17) заключаем, что $(R-y)^{-\alpha} u(x, y) \in L(-\infty, R)$ как функция переменной y для любых $x \in (a, b)$ и $R < T$.

Ввиду свойств (4), (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\eta(x, q, y, t)}{\partial x} &= -\mu(x) G_\eta(x, q, y, t) - \lambda(x) G_{\eta-\alpha}(x, q, y, t), \\ D_{yt}^\alpha G_\eta(x, q, y, t) &= D_{yt}^\alpha G_\eta(x, q, y, t) = G_{\eta-\alpha}(x, q, y, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда с учётом

$$\lim_{t \rightarrow y} \varphi(t) G_{1-\alpha}(x, q, y, t) = 0, \quad y < T - \varepsilon, \quad x - a \geq \varepsilon > 0,$$

запишем преобразование

$$L(\Phi) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) \left(\frac{\partial G_0(x, a, y, t)}{\partial x} + \lambda(x) G_{-\alpha}(x, a, y, t) + \mu(x) G_0(x, a, y, t) \right) dt \equiv 0.$$

Аналогично для функции $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= f(x, y) + \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) (-\lambda(x) G_{\nu-\alpha}(x, q, y, t) - \mu(x) G_\nu(x, q, y, t)) dt dq, \\ \frac{\partial^\alpha F(x, y)}{\partial y^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) D_{ty}^{\alpha-1} G_\nu(x, q, y, t) dt dq = \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) G_{\nu-\alpha}(x, q, y, t) dt dq. \end{aligned}$$

Здесь были использованы равенства, полученные на основании (7), (13) и (15):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow y-0} \int_a^x g(q, t) G_{\nu+1-\alpha}(x, q, y, t) dq &= 0, \quad x, y \in \Omega^\varepsilon, \\ \lim_{q \rightarrow x-0} \int_{-\infty}^y g(q, t) G_\nu(x, q, y, t) dt &= \int_{-\infty}^y g(x, t) \frac{(y-t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt = f(x, y), \quad x, y \in \Omega^\varepsilon, \\ \lim_{q \rightarrow x-0} G_\nu(x, q, y, t) &= \frac{(y-t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad y-t \geq \varepsilon > 0, \quad x < b-\varepsilon. \end{aligned}$$

В результате получаем $L(F) \equiv f(x, y)$, т.е. функция (9) является решением уравнения (1). Проверим выполнение условия (2). Из неравенства (17) следует предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a+0} F(x, y) = 0, \quad y < T.$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \Phi(x, y) = \varphi(y). \quad (19)$$

Для доказательства (19) рассмотрим выражение

$$\Phi(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^y \right) [\varphi(t) - \varphi(y)] G_0(x, a, y, t) dt + \varphi(y) \int_{-\infty}^y G_0(x, a, y, t) dt = I_1 + I_2 + \varphi(y) I_3.$$

Из оценок (6) и (15) вытекает, что $\lim_{x \rightarrow a} I_1 = 0$. Для интеграла I_2 получим $|I_2| \leq C \sup_{t \in (y-\varepsilon, y)} |\varphi(t) - \varphi(y)|$, откуда из произвольности выбора ε и из непрерывности $\varphi(t)$ следует, что $\lim_{x \rightarrow a} I_2 = 0$. Для интеграла I_3 с помощью (18) вычислим

$$\lim_{x \rightarrow a+0} I_3 = \lim_{x \rightarrow a+0} \int_{-\infty}^y G_0(x, a, y, t) dt = \lim_{x \rightarrow a+0} \lim_{z \rightarrow \infty} G_1(x, a, z, 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} e^{-\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma} = 1.$$

Это подтверждает справедливость (19) и завершает доказательство теоремы.

Замечание. В условии (13), в отличие от аналогичного условия из работы [11] (см. условие (21)), требуется представимость правой части $f(x, y)$ в виде дробного интеграла лишь по одной переменной y . В этом смысле данное условие оказывается слабее условия (21) из [11]. При этом меняются (немного усиливаются) требования к поведению функции $g(x, y)$ на границе области.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.
2. Псху, А.В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка / А.В. Псху // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2000. — Т. 5, № 1. — С. 45–53.
3. Clément, Ph. Schauder estimates for equations with fractional derivatives / Ph. Clément, G. Gripenberg, S-O Londen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — V. 352, № 5. — P. 2239–2260.

4. Мамчуев, М.О. Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами / М.О. Мамчуев // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 32–35.
5. Псху, А.В. Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 385–395.
6. Псху, А.В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1076–1082.
7. Богатырева, Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашьяна–Нерсесяна / Ф.Т. Богатырева // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 9–16.
8. Богатырева, Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашьяна–Нерсесяна / Ф.Т. Богатырева // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 17–24.
9. Псху, А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 12. — С. 1682–1694.
10. Мамчуев, М.О. Краевая задача для линейной системы уравнений с частными производными дробного порядка / М.О. Мамчуев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, № 3. — С. 295–311.
11. Псху, А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной Лиувилля / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1043–1051.
12. Wright, E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities / E.M. Wright // J. London Math. Soc. — 1933. — V. s1-8, № 1. — P. 71–79.
13. Wright, E.M. The generalized Bessel function of order greater than one / E.M. Wright // Quart. J. Math. — 1940. — V. 11, № 1. — P. 36–48.

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION
WITH VARIABLE COEFFICIENTS
AND A FRACTIONAL LIOUVILLE DERIVATIVE**

A. D. Akhmetshin

*Karaganda Buketov University, Kazakhstan
e-mail: aleksandr_050401@mail.ru*

A boundary value problem for an equation with variable coefficients containing a fractional Liouville derivative for one of the variables with a beginning at minus infinity is considered. A representation of the solution of the problem and sufficient conditions for its existence and uniqueness have been obtained.

Keywords: partial fractional order differential equation, boundary value problem, fractional order derivative, Liouville derivative, Wright function.

REFERENCES

1. Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Fractional Integrals and Derivatives and Some Applications), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.
2. Pskhu, A.V., Solution of a boundary value problem for a fractional partial differential equation, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 45–53.
3. Clément, Ph., Gripenberg, G., and Londen, S-O., Schauder estimates for equations with fractional derivatives, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2000, vol. 352, no. 5, pp. 2239–2260.

4. Mamchuev, M.O., Boundary value problem for a first-order equation with a fractional partial derivative with variable coefficients, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2009, vol. 11, no. 1, pp. 32–35.
5. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a multidimensional fractional partial differential equation, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 382–392.
6. Pskhu, A.V., On a boundary value problem for a fractional partial differential equation in a domain with curvilinear boundary, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1072–1078.
7. Bogatyreva, F.T., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan operator, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 9–16.
8. Bogatyreva, F.T., Boundary value problem for a partial differential equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan operator, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 17–24.
9. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610–1623.
10. Mamchuev, M.O., Boundary value problem for a linear system of equations with the partial derivatives of fractional order, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2017, vol. 2, no. 3, pp. 295–311.
11. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with Liouville fractional derivative, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1043–1051.
12. Wright, E.M., On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, 1933, vol. s1-8, no. 1, pp. 71–79.
13. Wright, E.M., The generalized Bessel function of order greater than one, *Quart. J. Math.*, 1940, vol. 11, no. 1, pp. 36–48.

УДК 517.925

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ УРАВНЕНИЯ ТИПА БРИО–БУКЕ

© А. Я. Янченко

*Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”**e-mail: yanchenkoay@mpei.ru**Поступила в редакцию 26.02.2024 г., после доработки 07.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.*

Исследованы целые решения дифференциальных обобщённых уравнений типа Брио–Буке. Показано, что при некоторых условиях, которым удовлетворяют многочлены P и Q , все целые трансцендентные решения таких уравнений являются квазимногочленами.

Ключевые слова: целая функция, уравнение типа Брио–Буке.

DOI: 10.31857/S0374064124080111, EDN: KCCNTN

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Исследование целых (или мероморфных) решений для тех или иных классов уравнений является традиционной задачей теории алгебраических дифференциальных уравнений. При этом результатов (в отличие от линейных уравнений), описывающих (в том или ином смысле) целые (мероморфные) решения каких-либо достаточно общих классов нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений, немного. К хорошо исследованным относятся так называемые уравнения типа Брио–Буке, имеющие вид $P(y, y^{(n)}) = 0$ при некотором натуральном n и многочлене P с комплексными коэффициентами.

Существует гипотеза [1], что все мероморфные решения таких уравнений (при некоторых условиях на P) лежат в классе W , состоящем из рациональных функций, рациональных функций от какой-либо экспоненты и эллиптических функций. Над доказательством этой гипотезы работали многие математики (Ш. Эрмит, Э. Пикар, Ш. Брио и Ж.-К. Буке, Э. Холле, Р. Кауфман, С. Бэнкс, А.Э. Ерёмченко и другие). В 2009 г. гипотеза была доказана А.Э. Ерёмченко с соавторами [2] при произвольных n для любых мероморфных функций, имеющих хотя бы один полюс. Далее в статье [3] было показано, что при произвольном n (при наличии некоторых ограничений на многочлен P) любое целое трансцендентное решение уравнения $P(y, y^{(n)}) = 0$ является лорановским многочленом от некоторой экспоненты $e^{\alpha z}$.

Разработанная в [4] техника позволила описать целые решения и для обобщённых уравнений типа Брио–Буке — уравнений вида $P(y, y^{(n)}) + Q(z, y, \dots, y^{(n)}) = 0$. Было показано, что при некоторых условиях на многочлены P, Q все целые решения здесь также являются квазимногочленами. В доказательстве этого утверждения существенно использовалось то, что n одно и то же в $P(y, y^{(n)})$ и в $Q(z, y, \dots, y^{(n)})$. Однако оказалось, что это условие “одинаковости n ” не является существенным, а именно, для класса уравнений вида $P(y, y^{(l)}) + Q(z, t, \dots, y^{(n)}) = 0$ при произвольных $l, n \in \mathbb{N}$ (и аналогичных ограничениях на многочлены P, Q) все целые решения также являются квазимногочленами. Доказательству этого факты посвящена данная статья.

Отметим, что для более общих уравнений вида $P(y^{(k)}, y^{(l)}) + Q(z, t, \dots, y^{(n)}) = 0$ при произвольных натуральных k, l, n (с аналогичными ограничениями на P, Q) вопрос описания целых решений пока остаётся открытым (возможно, что здесь целые решения квазимногочленами уже не исчерпываются).

В дальнейшем, как обычно, через \mathbb{N} и \mathbb{C} обозначаются множества натуральных и комплексных чисел; через $\mathbb{C}[t_0, \dots, t_m]$ — кольцо многочленов над множеством \mathbb{C} от переменных t_0, \dots, t_m .

Пусть $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — целая функция. Тогда её порядок ρ определяется формулой

$$\rho = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln M_f(R))}{\ln R},$$

где $M_f(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Если $\rho < +\infty$, то $f(z)$ называется *функцией конечного порядка* [5, гл. 1].

Основным результатом данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть l, n, d — натуральные числа; $P \in \mathbb{C}[\omega_0, \omega_l]$; $Q \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \dots, \omega_n]$, причём:

1) $P = \prod_{j=1}^d (\omega_l - \alpha_j \omega_0)$, где все $\alpha_j \in \mathbb{C}$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$;

2) степень многочлена Q по совокупности переменных $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ не превосходит $d-1$.

Пусть $y = f(z)$ — целая функция, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$P(y, y^{(l)}) + Q(z, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Тогда либо $f(z)$ — многочлен из $\mathbb{C}[z]$, либо $f(z)$ — квазимногочлен, т.е.

$$f(z) = \sum_{j=1}^M T_j(z) e^{\beta_j z},$$

где $M \in \mathbb{N}$, $T_j(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\beta_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Если целая функция $y = f(z)$ удовлетворяет уравнению (1), то $f(z)$ — целая функция конечного порядка.

Доказательство. Для любого монома вида $I \equiv a(z) \omega_0^{j_0} \dots \omega_t^{j_t}$ (где $a(z) \in \mathbb{C}[z]$) определим его степень $\deg I = j_0 + \dots + j_t$ и норму $\|I\| = j_0 + 2j_1 + \dots + (t+1)j_t$. Для любого многочлена $H = \sum_l I_l$, где I_l — мономы, определим его главную часть как совокупность мономов из $\{I_l\}$, у которых степень $\deg I$ максимальна. Далее, из главной части отберём те мономы I , у которых норма $\|I\|$ максимальна. Обозначим получившееся множество мономов через $B(H)$. Пусть

$$B(H) = \{I_q = a_q(z) \omega_0^{j_{0,q}} \dots \omega_t^{j_{t,q}}, a_q(z) \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Будем называть многочлен *правильным*, если $\sum_{I_q \in B(H)} a_q(z) \neq 0$.

Доказано [6, теорема С], что если целая функция $y = f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $H(z, y, y', \dots, y^{(t)}) = 0$, где H — правильный многочлен, то $f(z)$ — целая функция конечного порядка. Рассмотрим многочлен $H = P(\omega_0, \omega_l) + Q(z, \omega_0, \dots, \omega_n)$ из условия теоремы, который является правильным.

Действительно, в силу условий теоремы множество $B(H)$ в данном случае состоит только из одного монома $I = \omega_l^d$. Таким образом, утверждение леммы верно.

Лемма 2. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция порядка $\rho < +\infty$ и $M \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся числа R_0 и δ , зависящие от M и $\varphi(z)$, такие, что при любых $R > R_0$ в кольце $C_R =$

$= \{2R \leq |z| \leq 3R\}$ можно выбрать конечное множество B_R кругов с общей суммой радиусов не более $2M^2R^{1/2}$ так, что при всяком $z \in C_R \setminus B_R$ и любом $j \in \{0, 1, \dots, M\}$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \delta R^{\rho M}.$$

Замечание 1. Утверждение леммы 2 вытекает из следствия 1 к лемме 4 [3, с. 203] при $\varepsilon = 1/2$, $H = R^{1/2}$.

Лемма 3. Пусть $R > 0$; $L \in \mathbb{N}$; $C_R = \{2R \leq |z| \leq 3R\}$; B_R — конечное множество замкнутых кругов с общей суммой радиусов не более $2L^2R^{1/2}$, причём $B_R \subset C_R$. Тогда найдётся постоянная $R_0 > 0$ (зависящая от L) такая, что при всяком $R > R_0$ найдётся $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что окружность $\gamma_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ не пересекается с множеством B_R .

Замечание 2. Утверждение леммы 3 следует из леммы 5 [3, с. 204] при $H = R^{1/2}$.

Лемма 4. Пусть $\varphi(z)$ — функция конечного порядка ρ ; $L \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся числа $R_0, \delta > 0$ (зависящие только от $\varphi(z)$ и L) такие, что при каждом $R > R_0$ существует число $R_1 \in [2R, 3R]$ с условием: при любых $j = \overline{0, L}$ и $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R_1$, справедлива оценка

$$\left| \frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \delta R^{\rho L}.$$

Замечание 3. Утверждение леммы 4 вытекает из лемм 2 и 3.

Лемма 5. Пусть целая функция $y = f(z)$ является решением уравнения (1). Тогда найдутся постоянные $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ (не зависящие от R) такие, что при любом $R > \gamma_1$ найдётся число $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что при всяком z с условием $|z| = R_1$ справедлива оценка

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|}.$$

Доказательство. Применим лемму 4 с $L = \max\{l, n\}$. Тогда при всех достаточно больших R найдётся $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что при всех натуральных $j \leq L$ выполняется неравенство

$$\max_{|z|=R_1} \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \delta R^{\rho L}, \tag{2}$$

где δ не зависит от R . Пусть (см. уравнение (1))

$$Q(z, \omega_0, \dots, \omega_n) = \sum_{j_0 + \dots + j_n \leq d-1} a_{\bar{j}}(z) \omega_0^{j_0} \dots \omega_n^{j_n},$$

где $a_{\bar{j}}(z)$ — многочлены степени не выше h , причём максимум модулей коэффициентов у них не превосходит B .

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z| = R_1$. Разделим обе части уравнения (1) на $(f(z))^d$. Тогда с учётом (2) получим

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq d^{d+1} B (3R)^h \delta R^{\rho L(d-1)} \frac{1}{|f(z)|}$$

или

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|},$$

где γ_2 не зависит от R . Таким образом, лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая уравнению (1). Тогда найдутся числа R_0 и m (зависящие только от $f(z)$ и многочленов P, Q из уравнения (1)) такие, что при всяком $R > R_0$ найдётся число $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что при любом $z \in \mathbb{C}, |z| = R_1$, имеется число $\alpha(z) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, удовлетворяющее условию

$$|f^{(l)}(z) - \alpha(z)f(z)| < R^m. \tag{3}$$

Доказательство. По лемме 5 при достаточно большом $R > R_0$ найдётся $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что при любом $z \in \mathbb{C}, |z| = R_1$, имеет место оценка

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R_2^\gamma}{|f(z)|}, \tag{4}$$

где γ_2 зависит только от $f(z)$, уравнения (1) и не зависит от R .

Считаем также, что R_0 столь велико, что

$$\min_{i,j} |\alpha_i - \alpha_j| \geq 10R_0^{-\gamma_2/d}. \tag{5}$$

Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}, |z| = R_1$. Возможны два случая.

1. $|f(z)| \leq R^{2\gamma_2}$. Тогда по лемме 4 найдём, что $|f^{(l)}(z)| \leq \delta R^{\rho L} R^{2\gamma_2}$, откуда при любом $j = \overline{1, d}$ следует оценка

$$|f^{(l)}(z) - \alpha_j f(z)| \leq (1 + \max_j |\alpha_j|)(1 + \delta)R^{\rho L + 2\gamma_2}.$$

Тогда, выбрав m так, чтобы $(1 + \max_j |\alpha_j|)(1 + \delta)R^{\rho L + 2\gamma_2} < R^m$, утверждение леммы будет выполняться.

2. $|f(z)| > R^{2\gamma_2}$. Пусть j_0 таково, что

$$\min_j \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| = \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right|.$$

Тогда из (4) найдём

$$\left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right| \leq \left(\frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|} \right)^{1/d} \leq R^{-\gamma_2/d}.$$

Далее с учётом оценки (5) получим соотношения

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| &\geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \left(|\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right| \right) \geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d (|\alpha_j - \alpha_{j_0}| - R^{-\gamma_2/d}) \geq \\ &\geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d (|\alpha_j - \alpha_{j_0}| - R_0^{-\gamma_2/d}) \geq \left(\frac{9}{10} \right)^d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d |\alpha_j - \alpha_{j_0}|. \end{aligned}$$

Поэтому из (4) имеем

$$\left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R_2^\gamma}{|f(z)|} \gamma_3,$$

где

$$\gamma_3 = \left(\frac{9}{10} \right)^d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d |\alpha_j - \alpha_{j_0}|.$$

Но тогда $|f^{(l)}(z) - \alpha_{j_0} f(z)| \leq R^m$ (здесь $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\gamma_3 R^{\gamma_2} < R^m$). Таким образом, утверждение леммы и в этом случае верно.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

По лемме 6 существует число $M \in \mathbb{N}$ такое, что при всех достаточно больших $R > R_0$ найдётся $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что при всяком $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R_1$, и при некотором $\alpha \equiv \alpha(z) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ справедливо неравенство

$$|f^{(l)}(z) - \alpha f(z)| < R^M. \tag{6}$$

Далее будем обозначать через γ_i постоянные, не зависящие от R . Зафиксируем произвольное z такое, что $|z| = R_1$. Применив лемму 4 к $\varphi(z) = f^{(l)}(z) + \alpha f(z)$, найдём, что

$$|f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z)| < \gamma_1 R^{LM},$$

откуда

$$\begin{aligned} |f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z)| &= |f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z) + \alpha f^{(l)}(z) - \alpha^2 f(z)| \leq \\ &\leq |f^{(2l)}(z) - f^{(l)}(z)| + |\alpha| |f^{(l)}(z) - \alpha f(z)| \leq \gamma_2 R^{LM}. \end{aligned}$$

Рассуждая далее аналогично, получаем, что при всех $k = \overline{1, d}$ справедливы оценки

$$|f^{(kl)}(z) - \alpha^k f(z)| < R^{\gamma_2}$$

с некоторой постоянной $\gamma_2 > 0$.

Пусть $P(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n) = t^d + \beta_{d-1}t^{d-1} + \dots + \beta_0$. Положим

$$L(f) = f^{(dl)} + \beta_{d-1}f^{((d-1)l)} + \dots + \beta_1 f^{(l)} + \beta_0 f.$$

Тогда с учётом (6) имеет место оценка

$$\begin{aligned} |(f^{(dl)} - \alpha^d f) + \beta_{d-1}(f^{((d-1)l)} - \alpha^{d-1} f) + \dots + \beta_1(f^{(l)} - \alpha f) + \beta_0(f - f)| &= |L(f) - P(\alpha)f| = \\ &= |L(f)| \leq R^{\gamma_2} (1 + |\beta_{d-1}| + \dots + |\beta_0|) \leq R_1^{\gamma_3} \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\gamma_3 > 0$.

Итак, получили, что при любом $R > R_0$ найдётся $R_1 \in [2R, 3R]$ такое, что для всякого $z \in \mathbb{C}$ с условием $|z| = R_1$ выполняется неравенство $|L(f(z))| \leq R_1^{\gamma_3}$, где постоянная γ_3 не зависит от R . Но $L(f(z))$ — целая функция, поэтому (см., например, [5, гл. 1]) $L(f(z)) = q(z)$, где $q(z)$ — некоторый многочлен. Но тогда $f(z)$ является квазимногочленом, т.е. $f(z) = \sum_i h_i(z)e^{\delta_i z}$ при некоторых $\{h_i(z)\} \in \mathbb{C}[z]$ и $\{\delta_i\} \in \mathbb{C}$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еременко, А.Э. Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений / А.Э. Еременко // *Успехи мат. наук.* — 1982. — Т. 37, № 4 (226). — С. 53–82.
2. Eremenko, A.E. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations / A.E. Eremenko, L. Liao, N.W. Ng // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 2009. — V. 146, № 1. — P. 197–206.
3. Янченко, А.Я. Об одном продвижении в доказательстве гипотезы о мероморфных решениях уравнений типа Брио–Буке / А.Я. Янченко // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2022. — Т. 86, № 5. — С. 197–208.
4. Янченко, А.Я. О целых решениях одного класса нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений / А.Я. Янченко // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1186–1192.
5. Левин, Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. — М. : Гостехиздат, 1956. — 632 с.
6. Hayman, W.K. The growth of solutions of algebraic differential equations / W.K. Hayman // *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9.* — 1996. — V. 7, № 2. — P. 67–73.

**WHOLE SOLUTIONS OF ONE CLASS OF ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
GENERALIZING BRIOT–BOUQUET TYPE EQUATIONS**

A. Ya. Yanchenko

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Russia
e-mail: yanchenkoay@mpei.ru*

The paper examines entire solutions of differential equations of Briot–Bouquet type. It is shown that (under some conditions that the polynomials P , Q satisfy) all integer transcendental solutions of such equations are quasi-polynomials.

Keywords: integer function, equation of Briot–Bouquet type.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00196).

REFERENCES

1. Eremenko, A.E., Meromorphic solutions of algebraic differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 1982, vol. 37, no. 4, pp. 61–95.
2. Eremenko, A.E., Liao, L., and Ng, N.W., Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2009, vol. 146, no. 1, pp. 197–206.
3. Yanchenko, A.Ya., One advance in the proof of the conjecture on meromorphic solutions of Briot–Bouquet type equations, *Izvestiya: Math.*, 2022, vol. 86, no. 5, pp. 1020–1030.
4. Yanchenko, A.Ya., On integer solutions of one class of nonlinear algebraic differential equations, *Differ. Uravn.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1186–1192.
5. Levin, B.Y., *Raspredeleniye korney tselykh funktsiy* (Distribution of Roots of Integer Functions), Moscow: Gostekhizdat, 1956.
6. Hayman, W.K., The growth of solutions of algebraic differential equations, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9*, 1996, vol. 7, no. 2, pp. 67–73.

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2024. Т. 60. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: iline@cs.msu.ru)**)

А. С. Фурсов, Ц. Оу (МГУ ВМК, Москва, Россия) “О задаче слежения для динамической модели ленточного конвейера” (12.02.2024).

Рассматривается динамическая модель ленточного конвейера в виде следующей переключаемой системы:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \frac{u_1 - \mu v - m_1 g \sin \alpha}{m_0 + m_1}, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{u_2 - p\omega}{h^2 s(m_0 + m_1)} - \frac{g \cos \alpha}{h}, \quad (1)$$

где x характеризует перемещение ленты конвейера, v и m_0 — линейная скорость и масса ленты конвейера, m_1 — общая масса грузов на конвейере, μ — коэффициент трения качения, g — ускорение свободного падения, u_1 — управление тягой конвейера, p — коэффициент осевого трения, h — положение центра масс конвейера относительно нижнего ролика, s — коэффициент, определяющий момент инерции конвейера, α — угол подъёма конвейера относительно горизонта, u_2 — управление углом ленты конвейера.

Для данной модели в работе [1] была сформулирована задача слежения, состоящая в поддержании на постоянном уровне значений скорости ленты и угла подъёма конвейера в процессе его функционирования при условии, что в произвольные моменты времени может производиться погрузка или разгрузка перемещаемых грузов, а именно, необходимо построить управление $u = (u_1, u_2)$, обеспечивающее стремление ошибок слежения e_v , e_α к нулю:

$$e_v = v_0 - v \rightarrow 0, \quad e_\alpha = \alpha_0 - \alpha \rightarrow 0,$$

где v_0 и α_0 — постоянные значения задающих сигналов.

При решении поставленной задачи в [1] было предложено для стабилизации скорости v использовать регулятор u_1 , обеспечивающий возникновение в замкнутой системе скользящего режима, а для стабилизации угла α — нечёткий регулятор u_2 .

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий свести указанную выше задачу слежения к задаче стабилизации линейной интервальной системы статической обратной связью по состоянию.

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

***) Составитель хроники А.В. Ильин.

Итак, перепишем систему (1) в переменных e_v , e_α , ω :

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= \frac{\mu}{m_0 + m_1}(v_0 - e_v) + \frac{m_1 g}{m_0 + m_1} \sin(\alpha_0 - e_\alpha) - \frac{1}{m_0 + m_1} u_1, & \dot{e}_\alpha &= -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g}{h} \cos(\alpha_0 - e_\alpha) + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} u_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Применяя к управляющим функциям u_1 , u_2 следующие преобразования:

$$u_1 = \mu v_0 + m_1 g \sin \alpha_0 + \bar{u}_1, \quad u_2 = sgh(m_1 + m_0) \cos \alpha_0 + \bar{u}_2, \quad (3)$$

перепишем систему (2) в виде

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= -\frac{\mu}{m_0 + m_1} e_v + \frac{m_1 g}{m_0 + m_1} (\sin(\alpha_0 - e_\alpha) - \sin \alpha_0) - \frac{1}{m_0 + m_1} \bar{u}_1, & \dot{e}_\alpha &= -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g(\cos(\alpha_0 - e_\alpha) - \cos \alpha_0)}{h} + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} \bar{u}_2\end{aligned}\quad (4)$$

и рассмотрим задачу стабилизации системы (4) в нулевом положении равновесия. Заметим, что функцию $h(t)$ приближённо можно считать кусочно-постоянной со значениями в некотором ограниченном множестве H . Учитывая это, линеаризуем систему (4) в некоторой окрестности нулевого положения равновесия (вариации переменных для упрощения обозначаем теми же буквами e_v , e_α , ω):

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= -\frac{\mu}{m_0 + m_1} e_v - \frac{m_1 g \cos \alpha_0}{m_0 + m_1} e_\alpha - \frac{1}{m_0 + m_1} \bar{u}_1, & \dot{e}_\alpha &= -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g \sin \alpha_0}{h} e_\alpha + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} \bar{u}_2\end{aligned}\quad (5)$$

и будем решать задачу стабилизации линейной системы (5), т.е. задачу поиска управления $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, обеспечивающего стремление к нулю её переменных состояния:

$$e_v \rightarrow 0, \quad e_\alpha \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0.$$

Заметим, что система (5) фактически является переключаемой системой, режимы которой описываются линейными стационарными подсистемами. Учитывая конечные диапазоны возможных изменений коэффициентов системы (5), сопоставим ей переключаемую линейную интервальную систему

$$\dot{e}_v = [a_{11}]e_v + [a_{12}]e_\alpha + [b_{11}]\bar{u}_1, \quad \dot{e}_\alpha = -\omega, \quad \dot{\omega} = [a_{32}]e_\alpha + [a_{33}]\omega + [b_{32}]\bar{u}_2 \quad (6)$$

или в матричной форме

$$\dot{\xi} = [A]\xi + [B]\bar{u}, \quad \xi = \begin{pmatrix} e_v \\ e_\alpha \\ \omega \end{pmatrix}, \quad [A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & [a_{32}] & [a_{33}] \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} [b_{11}] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & [b_{32}] \end{pmatrix}.$$

Согласно [2, с. 25] если статическая обратная связь $\bar{u} = -K\xi$ (K — вещественная матрица размерности 2×3) обеспечивает существование единой функции Ляпунова для всех замкнутых этой обратной связью систем из интервального семейства (6), то она же обеспечивает

и стабилизацию переключаемой системы (5) в нуле. Нахождение указанной обратной связи может быть сведено в решении системы линейных матричных неравенств. При этом, выбирая должным образом указанную систему матричных неравенств, можно обеспечить наперёд заданную степень устойчивости замкнутой системы. Далее, переходя к управлению $u = (u_1, u_2)$ в соответствии с формулами (3) и заменяя функции m_1 и h их средними значениями из соответствующих интервалов, получаем решение исходной задачи слежения для системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература. 1. Дружинина, О.В. Математическое моделирование систем конвейерного транспорта с интеллектуальным управлением / О.В. Дружинина, О.Н. Масина, А.А. Петров // Транспорт: наука, техника, управление. — 2021. — № 4. — С. 3–8. 2. Liberzon, D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. — Boston : Springer, 2003. — 233 p.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь) “Сильно нерегулярное периодическое решение линейной периодической системы с программным управлением” (19.02.2024).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

в которой $A(t)$ — непрерывная ω -периодическая $n \times n$ -матрица, B — постоянная $n \times r$ -матрица ($r \leq n$), u — управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и самой системы (см., например, [1]). Такой подход был обусловлен тем, что до середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы, поэтому другие возможные соотношения частот не изучались.

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данную проблему, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [2]. Этот результат послужил началом нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах [3–9] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр — *асинхронным*, а описываемые ими колебания — *асинхронными*.

Сложившееся мнение о невозможности, а затем об исключительности сильно нерегулярных колебаний отчасти было продиктовано схожей ситуацией в прикладных областях. В теории механических колебаний широко использовалось предположение о том, что поддерживаемые внешней гармонической силой колебания всегда происходят с частотой этой силы или кратной ей. Одна из причин такого предположения состоит в рассмотрении относительно простых систем, а также игнорировании целого ряда специфических эффектов (инерционных, термических и др.), вносящих временные сдвиги между значениями действующей силы и значениями динамических функций колебаний, которые могут привести к асинхронному возбуждению незатухающих колебаний. Между тем ещё в середине 30-х гг.

XX века в исследованиях под руководством Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси изучалась возможность параметрического воздействия на двухконтурные системы, при котором возбуждение колебаний осуществлялось на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотами параметров системы [10]. Позднее в этом направлении исследовался, в частности, ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные колебания, частота которых практически не зависит от частоты источника (см., например, [11]).

Задача построения периодических дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, сформулирована в работе [12] как задача управления асинхронным спектром. Далее в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r -вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Тогда применительно к линейной системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать из указанного допустимого множества такое программное управление $u = U(t)$, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \quad (2)$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством). Если же требовать наличия у системы (2) только сильно нерегулярного периодического решения, без предварительного задания целевого множества, то такую (несколько менее жёсткую) задачу будем называть *задачей синтеза асинхронного режима (задачей возбуждения асинхронных колебаний)*.

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) на основе вида среднего значения матрицы коэффициентов исследовались в статьях [13, 14]. Случай максимального ранга матрицы (равного числу её столбцов) при управлении изучен в [15].

В настоящей работе, предполагая, что ранг матрицы при управлении меньше числа её столбцов, укажем строение сильно нерегулярного периодического решения системы (2).

Для непрерывной на всей числовой оси ω -периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \omega^{-1} \int_0^\omega F(t) dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Через $\text{rank}_{\text{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ — наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ могут не совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B при управлении не является максимальным:

$$\text{rank } B = r_1 < r, \quad d_1 = n - r_1.$$

Тогда найдётся постоянная неособенная $n \times n$ -матрица S такая, что у матрицы SB будет d_1 нулевых первых строк. Введём замену фазовых переменных $y = Sx$, приводящую (1) к системе

$$\dot{y} = C(t)y + Du, \quad C(t) = SA(t)S^{-1}, \quad D = SB, \quad (3)$$

и соответствующей ей системе

$$\dot{y} = C(t)y + Du(t). \quad (4)$$

Через $C_{d_1, n}(t)$ обозначим матрицу размерности $d_1 \times n$, составленную из первых d_1 строк матрицы $C(t)$, а через $\tilde{C}_{d_1, n}(t)$ — её осциллирующую часть.

Укажем необходимое условие существования решения задачи возбуждения асинхронных колебаний.

Лемма. Для разрешимости задачи возбуждения асинхронных колебаний в системе (3) необходимо выполнение оценки

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{C}_{d_1, n} = r_2 < n. \quad (5)$$

Оказывается, что в случае разрешимости между компонентами искомого решения системы (2) существует линейная зависимость, тесно связанная с оценкой (5), т.е. справедлива

Теорема. Пусть для системы (3) разрешима задача возбуждения асинхронных колебаний и $y = y(t) = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ — сильно нерегулярное периодическое решение системы (4). Тогда найдутся два набора попарно различных натуральных индексов (их можно считать упорядоченными)

$$1 \leq i_1 < \dots < i_{n-r_2} \leq n, \quad 1 \leq i_{n-r_2+1} < \dots < i_n \leq n$$

и некоторая постоянная $r_2 \times (n - r_2)$ -матрица F такие, что между координатами вектора y будет линейная зависимость вида

$$\text{col}(y_{i_{n-r_2+1}}, \dots, y_{i_n}) = F \text{col}(y_{i_1}, \dots, y_{i_{r_2}}).$$

Замечание. Аналогичный результат имеет место и в случае задачи управления асинхронным спектром.

Исследование выполнено в рамках гранта Президента Республики Беларусь на 2024 г.

Литература. 1. Зубов, В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. — М.: Наука, 1975. — 495 с. 2. Massera, J.L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J.L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. — 1950. — V. 4, № 1. — P. 37–45. 3. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. мат. журн. — 1955. — Т. 5, № 3. — С. 362–370. 4. Еругин, Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Прикл. математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 1. — С. 148–152. 5. Еругин, Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963. — 273 с. 6. Гайшун, И.В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И.В. Гайшун // Докл. АН БССР. — 1979. — Т. 23, № 8. — С. 684–686. 7. Грудо, Э.И. Периодические системы, имеющие решения с несоизмеримыми периодами по отношению к периоду системы / Э.И. Грудо // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 200. 8. Грудо Э.И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э.И. Грудо, А.К. Деменчук // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 3. — С. 409–416. 9. Борухов, В.Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В.Т. Борухов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 5. — С. 585–591. 10. Папалекси, Н.Д. Об одном случае параметрически связанных систем / Н.Д. Папалекси // J. Phys. Acad. Sci. USSR. — 1939. — Т. 1. — С. 373–379. 11. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д.И. Пеннер, Д.Б. Дубошинский, М.И. Козаков [и др.] // Успехи физ. наук. — 1973. — Т. 109, № 2. — С. 402–406. 12. Деменчук, А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А.К. Деменчук // Докл. НАН Беларуси. — 2009. — Т. 53, № 4. — С. 37–42. 13. Деменчук, А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А.К. Деменчук // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 31–34. 14. Деменчук, А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А.К. Деменчук // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2019. — Т. 27, № 1-2. — С. 23–28. 15. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Наука, 1989. — 666 с.

В. Е. Хартовский (ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Беларусь) “К вопросу асимптотической наблюдаемости линейных непрерывно-дискретных систем” (26.02.2024).

В настоящей работе исследуются линейные автономные гибридные непрерывно-дискретные системы с известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = \overline{m, m+1, \dots}, \quad (3)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$; $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$; y — наблюдаемый выходной сигнал; $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots$, $h > 0$ — шаг квантования.

Обозначим $X(t) = \text{col}[x_1(t), x_2(t)]$. Начальное состояние для системы (1), (2) имеет вид

$$X(0) = \text{col}[a_1, a_2], \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Под *решением системы* (1), (2) с начальным условием (4) понимается пара функций $\{x_1(t), t \geq 0, x_2(t_k), k = 0, 1, \dots\}$, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) и начальному условию (4), где $x_1(t)$, $t \geq 0$, — непрерывная функция, дифференцируемая при $t \neq t_j$, $j = 0, 1, \dots$; $x_2(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$, — дискретная функция. В уравнении (1) при $t = t_k$ понимается правосторонняя производная.

Системы вида (1)–(3) можно интерпретировать [1] как непрерывные системы при воздействии регуляторов дискретного действия. Различные свойства наблюдаемости таких систем при $m = 0$ подробно изучены в работе [1]. Предлагаемый нами подход, в отличие от [1], основывается на решении задачи асимптотической наблюдаемости [2, 3], а также на методах построения наблюдателей из [4].

Предположим, что начальное условие (4) неизвестно. Цель исследования — по измерениям наблюдаемого выхода (3) восстановить вектор $X(t_0)$, где $t_0 > 0$ — достаточно большой момент времени.

Определение 1. Будем говорить, что система (1), (2) *финально наблюдаема*, если существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что из условия $y(t_k) = 0$, $k = \overline{m, k_0}$, следует $X(t_{k_0}) = 0$.

Введём матрицы

$$A = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C_j = [C_{1j}, C_{2j}], \quad C(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Следуя идеям работы [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система (1), (2) была финально наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Предположим, что условие (5) нарушается. В этом случае представляет интерес возможность восстановления текущего состояния $X(t_0)$ с некоторой ошибкой, стремящейся к нулю с возрастанием t_0 .

Определение 2. Будем говорить, что система (1), (2) *асимптотически наблюдаема*, если из условия $y(t_k) = 0, k = m, m + 1, \dots$, следует $\|X(t_k)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Далее понадобятся некоторые обозначения. Пусть $B_j = C_j^T$. Построим уравнение

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^m B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \dots \tag{6}$$

Последовательность $g(k), k = m, m+1, \dots$, определяемая уравнением (6) и начальными условиями $g(i) = g_i, i = \overline{1, m}, g_i \in \mathbb{R}^l$, существует в том и только в том случае [5], если $g_{m-i} = T_i c, i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{l \times r} (r \in \mathbb{N})$ — некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор (один и тот же для всех матриц T_i). Способ построения матриц T_i основан [5] на решении конечной цепочки алгебраических линейных систем. Набор матриц $\{T_i, i = \overline{1, m}\}$ назовём *базисным набором матриц* для уравнения (6). Если матрицы T_i образуют базисный набор, то любой другой базисный набор матриц образуют матрицы $\{T_i K, i = \overline{1, m}\}$, где K — некоторая невырожденная матрица.

Зафиксируем произвольный базисный набор матриц $\{T_i, i = \overline{1, m}\}$ и определим множество матриц

$$\mathbf{S} = \left\{ S \in \mathbb{R}^{r \times r} : B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^m B_i T_i = 0, T_k S = T_{k-1}, k = \overline{2, m} \right\}.$$

В статье [6] предложен способ выбора из множества \mathbf{S} матрицы с заданным спектром (или с заданной частью спектра) и получены условия возможности такого выбора. Пусть

$$G(\lambda, S) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i \sum_{j=0}^i B_j T S^{i-j},$$

где $S \in \mathbf{S}, \rho(S)$ — спектральный радиус матрицы S .

Теорема 2. Пусть существует матрица $S_0 \in \mathbf{S}$ такая, что $\rho(S_0) < 1$ и

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \\ (G(\lambda, S_0))^T \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Тогда система (1), (3) *асимптотически наблюдаема*.

Схема доказательства. Если выполняется условие (7), то [7] существуют полиномиальные матрицы $M_{ij}(\lambda), i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$, подходящих размеров такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda M_{11}(\lambda) C(\lambda) - \lambda M_{13}(\lambda) (G(\lambda, S_0))^T & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda) C(\lambda) - \lambda M_{23}(\lambda) (G(\lambda, S_0))^T & I_l - \lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1.$$

Пусть $M_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j M_{ik}^j$, где M_{ik}^j — постоянные матрицы подходящих размеров. Определим систему с дискретным временем:

$$\begin{aligned} z_1(t_{k+1}) &= A z_1(t_k) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{11}^j \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{12}^j z_2(t_{k-j}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{13}^j z_3(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_0} M_{11}^j w(t_{k-j}), \\ z_2(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_0} M_{21}^j \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{22}^j z_2(t_{k-j}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{23}^j z_3(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_0} M_{21}^j w(t_{k-j}), \end{aligned}$$

$$z_3(t_{k+1}) = T_m^T \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-i}) + S_0^T z_3(t_k) - T_m^T w(t_k), \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, \quad k_0 \geq m_0 + m, \quad (8)$$

где матрица T_m берётся из описанного выше базисного набора матриц. Начальные условия для системы (8) возьмём в виде

$$z_1(t_k) = b_k^1, \quad k = \overline{k_0 - (m + m_0), k_0}; \quad z_2(t_k) = b_k^2, \quad z_3(t_k) = b_k^3, \quad k = \overline{k_0 - m_0, k_0}, \quad (9)$$

где b_k^1, b_k^2, b_k^3 — некоторые векторы подходящего размера. Легко видеть, что если нарушается условие (5), то среди матриц M_{i3}^j по крайней мере одна является ненулевой. Пусть произвольное, но фиксированное начальное состояние (4) системы (1)–(3) порождает выход $y(t_k) = \widehat{y}(t_k)$, $k = m, m + 1, \dots$. Считаем, что $\rho(S_0) < 1$. Тогда, используя подход [4], можно показать, что если $w(t_k) = \widehat{y}(t_k)$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, то каково бы ни было начальное условие (9) для соответствующих решений систем (1)–(3) и (8) выполняется соотношение $\|z_1(t_k) - X(t_k)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Литература. 1. Марченко, В.М. Наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1421–1435. 2. Ильин, А.В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием / А.В. Ильин, А.В. Буданова, В.В. Фомичев // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448, № 4. — С. 399–402. 3. Хартовский, В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1701–1716. 4. Хартовский, В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 3. — С. 409–422. 5. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости / В.Е. Хартовский // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2020. — № 2. — С. 290–311. 6. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства / В.Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. — 2020. — Т. 55. — С. 102–121. 7. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.

А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров (УдГУ, Ижевск, Россия) “Задача группового преследования в линейных нестационарных дифференциальных играх с дробными производными” (25.03.2024).

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: преследователей P_1, \dots, P_n и убегающего E , описываемая системой

$$D^{(\alpha)} z_i = A_i(t) z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \quad (1)$$

Здесь $D^{(\alpha)}$ — производная по Капуто порядка α , $\alpha \in (0, 1)$, $A_i(t)$ — непрерывные матричные функции порядка $k \times k$, $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты в \mathbb{R}^k , $i \in I = \{1, \dots, n\}$. Заданы терминальные множества $M_i^* = M_i + M_i^0$, где M_i — линейные подпространства пространства \mathbb{R}^k , M_i^0 — выпуклые компакты из L_i — ортогонального дополнения к M_i в \mathbb{R}^k . Считаем, что $z_i^0 \notin M_i^*$ для всех $i \in I$.

Определение 1. Будем говорить, что задана *квазистратегия* \mathcal{U}_i преследователя P_i , если определено отображение U_i^0 , ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = z_i^0$, $i \in I$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i .

Обозначим данную игру $G(n, z^0)$.

Определение 2. В игре $G(n, z^0)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии U_1, \dots, U_n преследователей P_1, \dots, P_n такие, что для любой измеримой функции $v(t) \in V, t \in [t_0, T]$, существуют момент $\tau \in [t_0, T]$ и номер $p \in I$, для которых $z_p(\tau) \in M_p$.

Введём следующие обозначения [1]: E — единичная матрица порядка $k \times k$; $\text{Int } A$, со A — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A ; $\pi_i: \mathbb{R}^k \rightarrow L_i$ — оператор ортогонального проектирования;

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} s^{\beta-1} e^{-s} ds; \quad \tau J_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds;$$

$$G_i^0(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E, \quad G_i^{l+1}(t, \tau) = \tau J_t(A_i(t)G_i^l(t, \tau)), \quad l=0, 1, \dots; \quad \Phi_i(t, \tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} G_i^l(t, \tau);$$

$$\tilde{G}_i^0(t, \tau) = E, \quad \tilde{G}_i^{l+1}(t, \tau) = \tau J_t(A_i(t)\tilde{G}_i^l(t, \tau)), \quad l=0, 1, \dots; \quad \Psi_i(t, \tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} \tilde{G}_i^l(t, \tau);$$

$$W_i(t, \tau, v) = \pi_i \Phi_i(t, \tau)(U_i - v); \quad W_i(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, \tau, v).$$

Предположение. Для всех $i \in I, t \geq t_0, \tau \in [t_0, t]$ выполнено условие $W_i(t, \tau) \neq \emptyset$.

Из теоремы об измеримом выборе [2, теорема 8.1.3] следует, что для каждого $i \in I$ при любом $t \geq t_0$ существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_i(t, \tau) \in W_i(t, \tau)$ для всех $t \geq t_0, \tau \in [t_0, t]$. Выберем произвольные измеримые селекторы $\gamma_i(t, \tau)$, зафиксируем их и обозначим

$$\xi_i(t) = \pi_i \Psi_i(t, t_0) z_i^0 + \int_{t_0}^t \gamma_i(t, \tau) d\tau.$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение и существуют $T > t_0, l \in I$ такие, что $\xi_l(T) \in M_l^0$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

В дальнейшем будем считать, что $\xi_i(t) \notin M_i^0$ для всех $i \in I, t \geq t_0$.

Определим далее

$$\lambda_i(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda(M_i^0 - \xi_i(t)) \cap (W_i(t, \tau, v) - \gamma_i(t, \tau)) \neq \emptyset\}, \quad \delta(t, \tau) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(t, \tau, v).$$

Теорема 2. Пусть выполнено предположение и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \delta(t, s) ds = +\infty$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

Пример. Рассмотрим игру $G(2, z^0)$, в которой система (1) имеет вид

$$D^{(\alpha)} z_{i1} = t \cdot z_{i2}, \quad D^{(\alpha)} z_{i2} = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0.$$

Здесь $I = \{1, 2\}, z_i = (z_{i1}, z_{i2}) \in \mathbb{R}^2, U_i = V = [-1, 1], M_i^* = \{(z_{i1}, z_{i2}) \in \mathbb{R}^2: z_{i1} = 0\}, z_1^0 = (-1, -1), z_2^0 = (1, 1)$. Обозначим

$$p(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad q(t, \tau) = \frac{\alpha(t-\tau)^{2\alpha-1}(t+\tau)}{\Gamma(2\alpha+1)}, \quad r(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha(t+\alpha\tau)}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad f(t) = 1 + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Тогда [1]

$$\Psi_i(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & r(t, \tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_i(t, \tau) = \begin{pmatrix} p(t, \tau) & q(t, \tau) \\ 0 & p(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad \pi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $M_i^0 = \{0\}$,

$$\begin{aligned} W_i(t, \tau, v) &= q(t, \tau)(V - v), \quad W_i(t, \tau) = \{0\}, \quad \gamma_i(t, \tau) = 0, \\ \xi_1(t) &= \pi_1 \Psi_1(t, 0)z_1^0 = -f(t), \quad \xi_2(t) = \pi_2 \Psi_2(t, 0)z_2^0 = f(t), \\ \lambda_1(t, \tau, v) &= \frac{q(t, \tau)(1 - v)}{f(t)}, \quad \lambda_2(t, \tau, v) = \frac{q(t, \tau)(1 + v)}{f(t)}, \quad \delta(t, \tau) = \frac{q(t, \tau)}{f(t)}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \delta(t, s) ds = +\infty$, то выполнены все условия теоремы 2, и, значит, в игре $G(2, z^0)$ происходит поимка.

Теорема 3. Пусть в системе (1) $t_0 = 0$, для всех $i \in I$ $A_i(t) = a_i E$ при $t \geq 0$, $M_i^* = \{0\}$, $U_i = V = \{v : \|v\| \leq 1\}$, $a_i \leq 0$ и $0 \in \text{Int co}\{z_i^0, i \in I\}$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Matychyn, I. Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems // I. Matychyn, V. Onyshchenko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2023. — V. 26. — P. 1031–1051. 2. Aubin, J.P. Set-Valued Analysis / J.P. Aubin, H. Frankowska. — Boston : Birkhauser, 1990. — 461 p.

С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева (УдГУ, Ижевск, Россия) “О свойстве локальной достижимости линейных управляемых гибридных систем” (08.04.2024).

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) &= A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и $B_{11} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ кусочно-непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; управление $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно-непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции $A_{j2} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ ($j = 1, 2$) и $B_{21} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ произвольны; управление $v : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ произвольно.

Под решением системы (1) при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$.

Выберем в системе (1) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ и получим свободную систему

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \quad y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \tag{2}$$

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l) = \prod_{j=l}^{k-1} Z(j+1, j), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (2) справедливо равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$, *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени.

Замкнем систему (1) линейной обратной связью

$$u(t) = U(t)x(t), \quad v(k) = V(k)y(k),$$

где функция $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ кусочно-непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция $V: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ произвольна. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_{11}(t) + B_{11}(t)U(t))x(t) + (A_{12}(k) + B_{12}(k)V(k))y(k), \\ y(k+1) &= (A_{21}(k) + B_{21}(k)U(k))x(k) + (A_{22}(k) + B_{22}(k)V(k))y(k). \end{aligned} \quad (3)$$

Положим $W(t) = (U(t), V(k))$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Система (3) имеет вид (2), поэтому для неё также можно определить матрицу Коши в целочисленные моменты времени, которую будем обозначать $Z_W(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$.

Определение 1. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Система (3) называется *локально достижимой на отрезке* $[l, k]$, если найдётся такое $r > 0$, что для любой матрицы $H \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$, удовлетворяющей неравенству $\|H - E\| \leq r$ ($E \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ — единичная матрица), существует управление $W(t) = (U(t), V(j))$, $t \in [j, j+1)$, $j \in \{l, \dots, k-1\} \subset \mathbb{N}_0$, такое, что $Z_W(k, l) = Z(k, l)H$.

Определение 2 [1]. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[l, k]$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u: [l, k] \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ и $v: [l, k-1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(k) = x_1$, $y(k) = y_1$.

Теорема. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Если система (1) вполне управляема на отрезке $[l, k]$, то соответствующая замкнутая система (3) локально достижима на этом отрезке.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. II. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.

Т. С. Быкова, В. А. Зайцев (УдГУ, Ижевск, Россия) “Об управлении спектром показателей линейных нестационарных систем в гильбертовом пространстве” (22.04.2024).

Пусть \mathfrak{X} — сепарабельное гильбертово пространство; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathfrak{X} ; $\|x\|_{\mathfrak{X}} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма в \mathfrak{X} ; $I: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ — тождественный оператор в \mathfrak{X} . Мы отождествляем

двойственное пространство \mathfrak{X}^* с \mathfrak{X} . Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов $F: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ с нормой $\|F\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)} := \sup\{\|Fx\|_{\mathfrak{X}_2} : \|x\|_{\mathfrak{X}_1} \leq 1\}$ (далее будем опускать индекс в обозначениях норм).

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}. \quad (1)$$

Предполагаем, что функция $A(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ кусочно строго непрерывна;
- 3) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| =: a < +\infty$.

Под *решением системы* (1) понимаем решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds$, где $x(t_0) = x_0$.

Через $\Phi(t, \tau)$ обозначим эволюционный оператор системы (1) [1, с. 147], т.е. решение операторной системы $dX/dt = A(t)X$, $X(\tau) = I$.

Через Σ_A обозначим *спектр показателей* [1, с. 170] системы (1), т.е. множество всех (верхних) показателей экспоненциального роста $\varkappa = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|x(t)\|$ всевозможных (нетривиальных) решений $x(t)$ системы (1). В силу условия 3) для некоторого $a_1 > 0$ выполнено $\Sigma_A \subset [-a_1, a_1]$. Спектр показателей Σ_A системы (1) характеризует асимптотическое поведение решений системы (1), в частности, условие $\sup \Sigma_A < 0$ является достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы (1).

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad u \in \mathfrak{U}; \quad (2)$$

здесь \mathfrak{U} — сепарабельное гильбертово пространство; $A(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3); $B(t)$ удовлетворяет следующему условию:

- 4) для любого $t \in \mathbb{R}$ $B(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, функция $t \mapsto B(t)$ кусочно строго непрерывна и $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|B(t)\| < +\infty$.

В качестве допустимых управлений для системы (2) на некотором конечном промежутке $[t_0, t_1]$ выбираются функции $u(\cdot) \in L_2([t_0, t_1], \mathfrak{U})$.

Определение 1 [2]. Система (2) называется *в точности управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, которое переводит решение системы (2) из состояния $x(t_0) = x_0$ в состояние $x(t_1) = x_1$.

Пусть управление в системе (2) имеет вид линейной обратной связи по состоянию:

$$u(t) = U(t)x(t), \quad (3)$$

где $U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $U(\cdot)$ кусочно строго непрерывна, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\| < +\infty$ (в этом случае управление (3) будет допустимым на любом промежутке $[t_0, t_1]$). Оператор обратной связи $U(\cdot)$, удовлетворяющий таким условиям, будем называть *допустимым*. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)U(t))x(t). \quad (4)$$

Исследуется задача управления спектром показателей системы (4) в следующей постановке: с помощью допустимого оператора обратной связи $U(\cdot)$ требуется сдвинуть спектр показателей системы на произвольную наперёд заданную величину относительно спектра показателей свободной системы (1). Скажем, что *спектр показателей системы (4) допус-*

кает произвольный сдвиг, если для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ существует допустимый оператор $U(\cdot)$ такой, что $\Sigma_{A+BU} = \Sigma_A + \lambda$.

Аналогичная задача об управлении верхним показателем Боля была решена в работе [3] для системы (2) с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$) и в [4] для системы (2) с периодическими коэффициентами ($A(t+\omega) \equiv A(t)$, $B(t+\omega) \equiv B(t)$). Для решения этой задачи использовалось свойство точной управляемости. Здесь мы решаем подобную задачу для произвольных систем с переменными коэффициентами, при этом для решения нам будет недостаточно свойства точной управляемости, а потребуется более сильное свойство *равномерной* точной управляемости.

Построим *грамиан управляемости* $W(t_1, t_0): \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ системы (2) на промежутке $[t_0, t_1]$ (см. [5]):

$$W(t_1, t_0)x = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_0, s)x ds.$$

Система (2) является в точности управляемой на $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда существует $\gamma > 0$ такое, что для произвольного $x \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство $\langle W(t_1, t_0)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$ (см., например, [4, теорема 1]).

Определение 2. Будем говорить, что система (2) является *равномерно в точности управляемой*, если существуют $\vartheta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ для произвольного $x \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство $\langle W(t_0 + \vartheta, t_0)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$.

Это определение восходит к определению 5.13 классической работы Р. Калмана [5], где равномерность понимается по $t \in \mathbb{R}$, на $W(t_0 + \vartheta, t_0)$ накладываются ещё три неравенства в смысле квадратичных форм. В определении 2 подобные условия не накладываются, поскольку они будут выполнены автоматически в силу условий 3) и 4).

На основе определения 2 установлены следующие результаты.

Теорема. Пусть система (2) является равномерно в точности управляемой. Тогда спектр показателей системы (4) допускает произвольный сдвиг.

Следствие. Пусть система (2) является равномерно в точности управляемой. Тогда она экспоненциально стабилизируема посредством обратной связи по состоянию (3).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с. 2. Triggiani, R. Controllability and observability in Banach space with bounded operators / R. Triggiani // SIAM J. Control. — 1975. — V. 13, № 2. — P. 462–491. 3. Zaitsev, V. On assignment of the upper Bohl exponent for linear time-invariant control systems in a Hilbert space by state feedback / V. Zaitsev, M. Zhuravleva // Mathematics. — 2020. — V. 8, № 6. — Art. 992. 4. Dashkovskiy, S. Assignment of the upper Bohl exponent for linear periodic control systems in Hilbert spaces / S. Dashkovskiy, V. Zaitsev // Europ. J. Contr. — 2022. — V. 67. — Art. 100703. 5. Kalman, R. Contribution to the theory of optimal control / R. Kalman // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 1960. — V. 5, № 1. — P. 102–119.

В. А. Зайцев, И. Г. Ким (УдГУ, Ижевск, Россия) “Матричное модальное управление блочными системами посредством статической обратной связи по выходу” (13.05.2024).

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$; $M_{m,n}$ — пространство $m \times n$ -матриц с элементами из поля \mathbb{K} ; $M_n := M_{n,n}$; $I \in M_n$ — единичная матрица; τ — операция транспонирования матрицы.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с блочными матричными коэффициентами с блоками размерности $s \in \mathbb{N}$:

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}, \quad u \in \mathbb{K}^{ms}, \quad (1)$$

$$y = Hx, \quad y \in \mathbb{K}^{ks}, \quad (2)$$

где $F = \{F_{ij}\} \in M_{ns}$, $G = \{G_{j\alpha}\} \in M_{ns,ms}$, $H = \{H_{\beta i}\} \in M_{ks,ns}$, $F_{ij}, G_{j\alpha}, H_{\beta i} \in M_s$, $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{1, k}$; x — вектор состояния, u — вектор управления, y — вектор выхода. Пусть управление в системе (1), (2) строится по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \quad (3)$$

Здесь $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}$, $Q_{\alpha\beta} \in M_s$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{1, k}$. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = (F + GQH)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}. \quad (4)$$

Пусть задан приведённый (старший коэффициент — единичная матрица) матричный многочлен степени n порядка s :

$$\Psi(\lambda) = I\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \Gamma_{n-1}\lambda + \Gamma_n, \quad I, \Gamma_j \in M_s, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

По многочлену (5) построим блочную сопровождающую матрицу Φ , соответствующую матричному многочлену $\Psi(\lambda)$ (см. [1]), т.е.

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\Phi_{ij}\} \in M_{ns}, \quad \Phi_{ij} \in M_s, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad \Phi_{i, i+1} = I \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \Phi_{ij} &= 0 \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i+1 \neq j; \quad \Phi_{nj} = -\Gamma_{n+1-j}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрицу Φ вида (6) также называют *нижней блочной матрицей Фробениуса*.

Определение. Скажем, что для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочно-го) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s$, $i = \overline{1, n}$, существует матрица $Q \in M_{ms,ks}$ обратной связи такая, что матрица $F + GQH$ замкнутой системы (4) подобна матрице Φ из (6).

Если $s = 1$, то указанная задача совпадает с обычной классической задачей скалярного модального управления, которая эквивалентна задаче о назначении спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Таким образом, мы рассматриваем обобщение задачи назначения спектра собственных значений на блочные матричные системы.

Зафиксируем $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ и $p \in \{\overline{1, n}\}$. Введём вспомогательные определения и обозначения. Для фиксированного $s \in \mathbb{N}$ определим операцию блочного транспонирования \mathcal{T} по следующему правилу: если $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}$, $X_{ij} \in M_s$, $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, r}$, то

$$X^{\mathcal{T}} := Y = \{Y_{ji}\} \in M_{rs,qs}, \quad Y_{ji} := X_{ij}, \quad j = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, q}.$$

Пусть X, Y — блочные матрицы с блоками размерности s такие, что число (блочных) столбцов матрицы X совпадает с числом (блочных) строк матрицы Y :

$$\begin{aligned} X &= \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}, \quad X_{ij} \in M_s, \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, r}; \\ Y &= \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs,ts}, \quad Y_{j\nu} \in M_s, \quad j = \overline{1, r}, \quad \nu = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Для матриц X и Y определим операцию блочного умножения [2] по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^r X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1, q}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Здесь \otimes — кронекерово произведение матриц. Имеем $Z_{i\nu} \in M_{s^2}$, $i = \overline{1, q}$, $\nu = \overline{1, t}$, поэтому $Z := X \star Y \in M_{qs^2, ts^2}$.

Введём отображение $\text{VECRR}_s: M_{qs, rs} \rightarrow M_{s, qrs}$, разворачивающее матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs, rs}$ по блочным строкам в блочную строку с блоками размерности s : $\text{VECRR}_s X = [X_{11}, \dots, X_{1r}, \dots, X_{q1}, \dots, X_{qr}]$.

Рассмотрим систему (1), (2). Предположим, что коэффициенты этой системы имеют следующий специальный вид: для некоторого $p \in \{1, \dots, n\}$ первые $p-1$ блочных строк матрицы G равны нулю, последние $n-p$ блочных столбцов матрицы H равны нулю, матрица F является нижней блочной матрицей Фробениуса, т.е.

$$F = \{F_{ij}\} \in M_{ns}, \quad F_{ij} \in M_s, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$F_{i, i+1} = I \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad F_{ij} = 0 \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i+1 \neq j; \quad (7)$$

$$G = \{G_{j\alpha}\} \in M_{ns, ms}, \quad G_{j\alpha} \in M_s, \quad j = \overline{1, n}, \quad \alpha = \overline{1, m};$$

$$G_{\nu\alpha} = 0 \in M_s, \quad \nu = \overline{1, p-1}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \quad (8)$$

$$H = \{H_{\beta i}\} \in M_{ks, ns}, \quad H_{\beta i} \in M_s, \quad \beta = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$H_{\beta\mu} = 0 \in M_s, \quad \beta = \overline{1, k}, \quad \mu = \overline{p+1, n}. \quad (9)$$

Рассмотрим матрицы

$$(H^T)^T \star G, \quad (H^T)^T \star FG, \quad \dots, \quad (H^T)^T \star F^{n-1}G.$$

Имеем $(H^T)^T \in M_{ks, ns}$, $F^{i-1}G \in M_{ns, ms}$, следовательно, $(H^T)^T \star F^{i-1}G \in M_{ks^2, ms^2}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Построим матрицы $\text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star F^{i-1}G) \in M_{s^2, kms^2}$, $i = \overline{1, n}$, и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star G) \\ \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star FG) \\ \dots \\ \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star F^{n-1}G) \end{bmatrix} \in M_{ns^2, kms^2}.$$

Теорема 1. Для системы (1), (2) с коэффициентами (7)–(9) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если выполнено условие $\text{rank } \Theta = ns^2$.

В частных случаях, когда блоки матриц системы состоят из скалярных матриц, условие на ранг матрицы Θ может быть понижено. Рассмотрим матрицу

$$\Omega := \begin{bmatrix} \text{VECRR}_s((H^T)^T G) \\ \text{VECRR}_s((H^T)^T FG) \\ \dots \\ \text{VECRR}_s((H^T)^T F^{n-1}G) \end{bmatrix} \in M_{ns, kms}.$$

Теорема 2. Пусть система (1), (2) имеет коэффициенты (7)–(9) и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) блоки матрицы H — скалярные матрицы;
- (ii) блоки матриц F и G — скалярные матрицы.

Тогда для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если выполнено следующее условие:

$$\text{rank } \Omega = ns. \quad (10)$$

Предположим, что выполнены одновременно условия (i) и (ii) теоремы 2. Тогда матрицы (7)–(9) имеют вид $F = F_0 \otimes I$, $G = G_0 \otimes I$, $H = H_0 \otimes I$, $I \in M_s$, для некоторых матриц $F_0 \in M_n$, $G_0 \in M_{n,m}$, $H_0 \in M_{k,n}$. В таком случае условие (10) равносильно тому, что матрицы

$$H_0 G_0, \quad H_0 F_0 G_0, \quad \dots, \quad H_0 F_0^{n-1} G_0 \quad (11)$$

линейно независимы. Отсюда получаем

Следствие. Пусть система (1), (2) имеет коэффициенты (7)–(9) и выполнены условия (i) и (ii) теоремы 2. Тогда для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если матрицы (11) линейно независимы.

Замечание. Результаты настоящей статьи обобщают полученные ранее в частных случаях: когда $s = 1$ [3, 4] и когда управляемая система задана дифференциальным уравнением порядка n размерности s [2]. Следует отметить, что достаточные условия для этих частных случаев являлись также и необходимыми. В теоремах 1, 2 и в следствии необходимость пока не доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24–21–00311).

Литература. 1. Gohberg, I. Spectral analysis of matrix polynomials. I. Canonical forms and divisors / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman // *Lin. Alg. Appl.* — 1978. — V. 20, № 1. — P. 1–44. 2. Zaitsev, V. Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback / V. Zaitsev, I. Kim // *Lin. Alg. Appl.* — 2021. — V. 613. — P. 115–150. 3. Зайцев, В.А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью / В.А. Зайцев // *Дифференц. уравнения.* — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1320–1328. 4. Зайцев, В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром / В.А. Зайцев // *Дифференц. уравнения.* — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1789–1793.